Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Деменко, О базисах в весовых пространствах Соболева, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 3, 343–354

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm847>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:03:06

УДК 517

О БАЗИСАХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

В. Н. Деменко

В статье строится система гладких двумерных сплайнов, а также описывается класс мер, при которых эта система будет базисом в весовом пространстве Соболева на квадрате.

Библиография: 9 названий.

В статье изучаются сплайн-базисы в весовых пространствах Соболева на квадрате. В 1932 году Банах поставил вопрос о существовании гладкого базиса в пространстве гладких функций на квадрате. Оказалось (Чисельский [1], Шонефельд [2]), что базисом может служить система гладких двумерных сплайнов. В 1972 году Чисельский и Домста [3] построили ортонормированную систему тензорных произведений сплайнов, являющуюся базисом в пространстве $C^r(I^d)$ и пространстве Соболева $W_p^r(I^d)$ ($r \geq 0$, $d \geq 1$, $p \geq 1$, $I = [0, 1]$). Целью данной работы является построение системы гладких двумерных сплайнов, а также описание класса мер μ , при которых эта система будет базисом в весовом пространстве Соболева на квадрате.

Мы будем рассматривать заданные на квадрате меры μ с непрерывными весами $\rho(t)$, имеющими, быть может, только конечное число нулей $\{t^{(j)}\}$ ($j = 1, \dots, k$), такими, что для некоторых констант $\delta > 0$, $c > 0$, $C > 0$ и набора $\{\alpha_j\}$ ($\alpha_j > 0$)

$$c|t - t^{(j)}|^{\alpha_j} \leq \rho(t) \leq C|t - t^{(j)}|^{\alpha_j}, \quad t \in O_\delta(t), \quad (1)$$

где $O_\delta(t)$ означает δ -окрестность точки t .

В работе мы будем иметь дело со следующими функциональными пространствами:

- а) пространством $C^r(I^2)$ r раз непрерывно дифференцируемых функций на квадрате I^2 с нормой

$$\|f\|_{C^r(I^2)} = \max_{|\alpha| \leq r} \left(\max_{t \in I^2} |D^\alpha f(t)| \right), \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^2, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial t_1^{\alpha_1} \partial t_2^{\alpha_2}};$$

- б) пространством $L_2(I^2, \rho)$ со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_{I^2} f(t)g(t)\rho(t) dt;$$

- в) весовым пространством Соболева $W_p^r(I^2, \rho) = \{f \in L_p(I^2, \rho) : \|f\|_{W_p^r(I^2, \rho)} < \infty\}$, где

$$\|f\|_{W_p^r(I^2, \rho)} = \sum_{|\alpha| \leq r} \left(\int_{I^2} |D^\alpha f(t)|^p \rho(t) dt \right)^{1/p}. \quad (2)$$

Пространство Соболева определяется в терминах обобщенных производных. Если вес $\rho(t)$ удовлетворяет условию (1), то пространство $W_p^r(I^2, \rho)$ является пополнением $C^r(I^2)$ по отношению к норме (2).

Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 2. Пусть вес $\rho(t)$ удовлетворяет условию (1). Тогда для любого $r \geq 1$ существует система сплайн-функций $\{f_n^{(r, \rho)}(t), n \in \mathbb{N}\}$, являющаяся базисом в $W_p^r(I^2, \rho)$.

Система из теоремы 2 ортогональна в пространстве $L_2(I^2, \rho)$. Одномерный B -сплайн с множеством узлов $\theta = \{t_{-1}, \dots, t_{r+1}\}$, $a \leq t_{-1} \leq \dots \leq t_{r+1} \leq b$, определяется равенством

$$M(t) = M(t | \theta) = (r+2)[t_{-1}, \dots, t_{r+1}](\cdot - t)_+^{r+1},$$

где $[t_{-1}, \dots, t_{r+1}]f$ – разделенная разность функции f , а $(\cdot)_+^r$ – усеченная степень: $x_+^r = x^r$ при $x \geq 0$ и $x_+^r = 0$ при $x \leq 0$. В случае различных узлов имеет место равенство

$$M(t | \theta) = \sum_{i=-1}^{r+1} \frac{(r+2)(t_i - t)_+^{r+1}}{\prod_{\substack{j=-1 \\ j \neq i}}^{r+1} (t_i - t_j)} = \sum_{i=-1}^{r+1} \frac{(r+2)(t - t_i)_+^{r+1}}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^r (t_i - t_j)}.$$

Введем семейство двоичных разбиений Θ_n ($n \in \mathbb{N}$) оси $\mathbb{R}$:

$$\Theta_n = \{\theta_{n,j}, j \in \mathbb{Z}; \theta_{n,0} = 0, \theta_{n,n} = 1, \theta_{n,j} < \theta_{n,j+1}\}.$$

Если $n = 1$, то положим $\theta_{n,j} = j$ ($j \in \mathbb{Z}$), а если $n = 2^\lambda + \nu$, где $\lambda \geq 0, 1 \leq \nu \leq 2^\lambda$, то

$$\theta_{n,j} = \begin{cases} \frac{j}{2^{\lambda+1}}, & j = \dots, -1, 0, 1, \dots, 2\nu; \\ \frac{j - \nu}{2^\lambda}, & j = 2\nu + 1, 2\nu + 2, \dots \end{cases}$$

Возьмем меру μ с весом, удовлетворяющим (1), и построим по ней и разбиениям Θ_n еще два семейства разбиений

$$T_{n,i} = \{\tau_{n,i}^{(j)}, j \in \mathbb{Z}\}, \quad i = 1, 2, \quad n \geq n_0 = \frac{16(r+2)^2}{\delta^2},$$

$$\tau_{n,i}^{(j)} = \begin{cases} t_i^{(l)}, & \text{если существует } l \text{ такое, что } \frac{1}{2}(\theta_{n,j-1} + \theta_{n,j}) < t_i^{(l)} \leq \frac{1}{2}(\theta_{n,j+1} + \theta_{n,j}), \\ \theta_{n,j} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через $I_{n,i}^{(j)}$ интервал $(\tau_{n,i}^{(j-1)}, \tau_{n,i}^{(j)})$. Положим

$$\sigma_n = \begin{cases} 2\nu, & \text{если } \nu < 2^\lambda, \\ 0, & \text{если } \nu = 2^\lambda. \end{cases}$$

Определим по $T_{n,i}$ последовательность B -сплайнов

$$M_{n,j,i}^{(r)}(t) = M(t | \tau_{n,i}^{(j-1)}, \dots, \tau_{n,i}^{(j+r+1)}).$$

Они являются сплайнами $(r + 1)$ -й степени по отношению к разбиению $T_{n,i}$ и имеют, в частности, следующие свойства (см., например, [4]):

- 1) $M_{n,j,i}^{(r)} \geq 0$, $\text{supp } M_{n,j,i}^{(r)} = \langle \tau_{n,i}^{(r)}, \tau_{n,i}^{(j+r+1)} \rangle$;
- 2) $\sum_j M_{n,j,i}^{(r)}(t) \equiv 1$, $t \in [0, 1]$;
- 3) если $p \geq 1$, то для нормы $M_{n,j,i}^{(r)}$ в $L_p(\mathbb{R})$ справедлива оценка

$$r^{-1/q} \|M_{n,j,i}^{(r)}\|_1 \leq \|M_{n,j,i}^{(r)}\|_p \leq \|M_{n,j,i}^{(r)}\|_1^{1/p};$$

- 4) для $\Delta \subset (0, 1)$ система нетривиальных ограничений $M_{n,j,i}^{(r)}|_{\Delta}$ является базисом в пространстве сплайнов на Δ .

Многомерные B -сплайны были определены де Бором в [5]. Детальное описание их свойств, а также свойств многомерных бокс-сплайнов можно найти в [6]. Нам будет удобно пользоваться двумерными сплайнами, определяемыми как произведения одномерных B -сплайнов.

Каждое целое $n \geq (r + 2)^2$ может быть представлено единственным образом в виде $n = (l + r + 1)(l + r + 1 + \varepsilon) + m$, где $l \geq 1$, $\varepsilon = 0, 1$, $0 \leq m \leq l + r + \varepsilon$.

Введем подпространства $\Lambda_n^{(r)}$ ($n \geq n_0$) пространства $C^r(I^2)$:

$$\Lambda_n^{(r)} = \begin{cases} \text{span}[M_{l+\varepsilon,i,1}^{(r)}(x_1)M_{l,j,2}^{(r)}(x_2), -r \leq i \leq l + \varepsilon, -r \leq j \leq l], & \text{если } m = 0, \\ \text{span}[M_{l,i,1}^{(r)}(x_1)M_{l,j,2}^{(r)}(x_2), -r \leq i, j \leq l; \\ M_{l+1,\sigma_{l+1},1}^{(r)}(x_1)M_{l,j,2}^{(r)}(x_2), -r \leq j \leq m - r - 1], & \text{если } m > 0, \varepsilon = 0, \\ \text{span}[M_{l+1,i,1}^{(r)}(x_1)M_{l,j,2}^{(r)}(x_2), -r \leq i \leq l + 1, -r \leq j \leq l; \\ M_{l+1,i,1}^{(r)}(x_1)M_{l+1,\sigma_{l+1},2}^{(r)}(x_2), -r \leq i \leq m - r - 1], & \text{если } m > 0, \varepsilon = 1. \end{cases}$$

Обозначим через $\varphi_{n,j}^{(r)}$ занумерованную произвольным образом систему произведений B -сплайнов, участвующих в определении $\Lambda_n^{(r)}$. Носитель каждой функции f из $\Lambda_n^{(r)}$ состоит из $(r + 2)^2$ прямоугольников, на каждом из которых f бесконечно дифференцируема. Множество всех этих прямоугольников обозначим через Π_n .

Возьмем область $\Delta \subseteq I^2$ и целое $n \geq n_0$, определим семейства множеств $\Omega_n^{(r)}(\Delta)$, $U_n^{(r)}(\Delta)$ и операторов $\Phi_{n,\Delta}^{(r)}$:

$$\Omega_n^{(r)}(\Delta) = \{j : \text{supp } \varphi_{n,j}^{(r)} \cap \Delta \neq \emptyset\}, \quad U_n^{(r)}(\Delta) = \bigcup_{j \in \Omega_n^{(r)}(\Delta)} \text{supp } \varphi_{n,j}^{(r)},$$

$$\Phi_{n,\Delta}^{(r)} : \Lambda_n^{(r)} \rightarrow \Lambda_n^{(r)}, \quad \Phi_{n,\Delta}^{(r)} \left(\sum_{j=1}^n c_j \varphi_{n,j}^{(r)} \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \Omega_n^{(r)}(\Delta)}}^n c_j \varphi_{n,j}^{(r)}.$$

Проведем вертикальные прямые через точки $(\tau_{l+\varepsilon,1}^{(i(r+2))}, 0)$ и горизонтальные через точки $(0, \tau_{l,2}^{(j(r+2))})$. Эти прямые разобьют все прямоугольники из Π_n на блоки, состоящие из $(r + 2)^2$ прямоугольников, если блок не является правым или верхним граничным и, быть может, меньшего числа, если блок граничный. Обозначим эти блоки

через $\pi_{i,j}^{(n)}$, где (i, j) — обычная нумерация: i слева направо, j снизу вверх. Пусть ω_n обозначает множество индексов всех блоков $\pi_{i,j}^{(n)}$ из I^2 , $\Delta_{i,j}^{(n)}$ — прямоугольник из Π_{n-m} , являющийся левым нижним в $\pi_{i,j}^{(n)}$, а $t_{i,j}^{(n)}$ — левая нижняя вершина $\Delta_{i,j}^{(n)}$. Нетрудно заметить, что носитель произвольной функции $\varphi_{n,m}^{(r)}$ имеет непустое пересечение с одним и только одним из $\Delta_{i,j}^{(n)}$. Определим последовательность операторов

$$P_{i,j}^{(n)}: \Lambda_n^{(r)} \rightarrow \Lambda_n^{(r)}, \quad n \geq n_0; \quad P_{i,j}^{(n)} \left(\sum_{m=1}^n c_m \varphi_{n,m}^{(r)} \right) = \sum_{m \in \Omega_n^{(r)}(\Delta_{i,j}^{(n)})} c_m \varphi_{n,m}^{(r)}.$$

Заметим, что для $f \in \Lambda_n^{(r)}$

$$\sum_{(i,j) \in \omega_n} (P_{i,j}^{(n)} f)(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}^2.$$

Обозначим для $p \geq 1$ и $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0\}$ (набор α определен в (1)) через $X_{p,\alpha}$ линейное пространство $\Lambda_n^{(r)}$ с нормой $\|f\|_{X_{p,\alpha}} = \|f\|_{L_p(I^2, |\mathbf{t}|^\alpha)}$, а через $Y_{p,\alpha}$ то же пространство с нормой $\|f\|_{Y_{p,\alpha}} = \|f\|_{W_p^r(\mathbb{R}^2, |\mathbf{t}|^\alpha)}$. Положим

$$A = \max_{\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_k, 0\}} \|P_{0,0}^{(n_0)}\|_{X_{p,\alpha} \rightarrow Y_{p,\alpha}}.$$

Ниже через A мы будем обозначать константы, зависящие только от r и p , вообще говоря, разные.

Из последнего неравенства с учетом соображений подобия и оценки (1) получаем, что для любых $f \in \Lambda_n^{(r)}$ ($n \geq n_0$) и $(i, j) \in \omega_n$

$$\|P_{i,j}^{(n)} f\|_{W_p^r(\mathbb{R}^2, \rho)} \leq A n^{r/2} \|f\|_{L_p(\Delta_{i,j}^{(n)}, \rho)}. \quad (3)$$

Нам понадобится следующая простая модификация результата де Бора [7, с. 272–273] для двумерных сплайнов.

ЛЕММА 1. Для любого целого $r \geq 1$ найдется константа $D_r > 1$, не зависящая от n и p ($p \geq 1$), такая, что для любого $\Delta \in \Pi_n$

$$D_r^{-1} \left(\sum_{j \in \Omega_n^{(r)}(\Delta)} |c_j|^p \right)^{1/p} \leq \left\| \sum_j c_j \gamma_{n,j}^{(r)} \varphi_{n,j}^{(r)} \right\|_{L_p(\Delta)} \leq \left(\sum_{j \in \Omega_n^{(r)}(\Delta)} |c_j|^p \right)^{1/p},$$

где $\gamma_{n,j}^{(r)} = \|\varphi_{n,j}^{(r)}\|_{L_p(I^2)}^{-1/p}$.

Теперь докажем следующую простую лемму.

ЛЕММА 2. Пусть $S \in \Lambda_n^{(r)}$ и пусть прямоугольник $\Delta \subseteq I^2$. Тогда для любого $\delta \in \Pi_n^{(r)}$ такого, что $\delta \in U_n^{(r)}(\Delta) \setminus \Delta$,

$$\|\Phi_{n,\Delta}^{(r)} S\|_{C(\delta)} \leq D_r \|S\|_{C(\delta)}. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta \in \Pi_n^{(r)}$ и $\delta \in U_n^{(r)}(\Delta) \setminus \Delta$. Тогда по лемме 1

$$\begin{aligned} \|S\|_{C(\delta)} &= \left\| \sum_{j=1}^n c_j \varphi_{n,j}^{(r)} \right\|_{C(\delta)} \geq D_r^{-1} \max_{j \in \Omega_n^{(r)}(\delta)} |c_j|, \\ \|\Phi_{n,\Delta}^{(r)}(S)\|_{C(\delta)} &= \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \Omega_n^{(r)}(\Delta)}}^n c_j \varphi_{n,j}^{(r)} \right\|_{C(\delta)} \leq \max_{j \in \Omega_n^{(r)}(\delta) \setminus \Omega_n^{(r)}(\Delta)} |c_j|. \end{aligned}$$

Комбинация последних двух неравенств дает (4).

ЛЕММА 3. Для любого целого $r \geq 1$ существует последовательность линейных операторов $Q_n^{(r)}$ таких, что для $X = W_p^r(I^2, \rho)$ или $C^r(I^2)$ и $Y = L_p(I^2, \rho)$ или, соответственно, $C(I^2)$

$$\|Q_n^{(r)}\|_{X \rightarrow X} \leq A, \quad (5)$$

$$\|Q_n^{(r)} - E\|_{X \rightarrow Y} \leq A n^{-r/2}, \quad (6)$$

где E – тождественный оператор, A – константа, зависящая только от r и p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $n \geq n_0$. Возьмем произвольный прямоугольник $\Delta_{i,j}^{(n)}$ $((i, j) \in \omega_n)$. Обозначим через $T(t, x)$ многочлен Тейлора функции $f(t)$ в точке x :

$$T(t, x) = \sum_{|\mathbf{k}| \leq r-1} \frac{1}{k_1! k_2!} D^{\mathbf{k}} f(x) (t_1 - x_1)^{k_1} (t_2 - x_2)^{k_2}.$$

Введем оператор Q_Δ :

$$(Q_\Delta f)(t) = \frac{1}{\mu(\Delta)} \iint_{\Delta} T(t, x) \rho(x) dx.$$

Имеем

$$f(t) - (Q_\Delta f)(t) = \frac{1}{\mu(\Delta)} \iint_{\Delta} (f(t) - T(t, x)) \rho(x) dx.$$

Точки x и t можно соединить, например, такими путями:

$$\begin{aligned} \Gamma_1(x, t) &: (x_1, x_2) - (t_1, x_2) - (t_1, t_2), \\ \Gamma_2(x, t) &: (x_1, x_2) - (x_1, t_2) - (t_1, t_2), \\ \Gamma_3(x, t) &: (x_1, x_2) - (t_2, x_2) - (t_2, t_2) - (t_1, t_2), \\ \Gamma_4(x, t) &: (x_1, x_2) - (x_1, t_1) - (t_1, t_1) - (t_1, t_2). \end{aligned}$$

Обозначим через ϑ_r множество $\{1, 2\}^r$. Пусть для $l \in \vartheta_r$ l' и l'' обозначают соответственно числа единиц и двоек в наборе l . Положим $\mathbf{a}_l = (l', l'')$. Интегрируя производные функции f по пути Γ_i , получим для разности $f(t) - T(x, t)$ формулу

$$f(t) - T(x, t) = \sum_{l \in \vartheta_r} \int_{\Gamma_i(x, t)} \int_{\Gamma_i(x, \mathbf{u}^{(1)})} \cdots \int_{\Gamma_i(x, \mathbf{u}^{(r-1)})} D^{\mathbf{a}_l} f(\mathbf{u}^{(r)}) du_{l_r}^{(r)} \cdots du_{l_1}^{(1)}.$$

Возьмем произвольные прямоугольник $\Delta = \Delta_{i,j}^{(n)}$ ($(i, j) \in \omega_n$), точку $\mathbf{t} \in I^2$, число $\xi \in \mathbb{R}$ и определим для $k = 1, 2, 3, 4$ множества

$$\begin{aligned}\delta_{1,k}(\Delta, \mathbf{t}, \xi) &= \{\mathbf{x} \in \Delta : \forall s \in \Gamma_k(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \quad \xi \rho(s) \geq \rho(\mathbf{x})\}, \\ \delta_{2,k}(\Delta, \mathbf{t}, \xi) &= \{\mathbf{x} \in \Delta : \forall s \in \Gamma_k(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \quad \xi \rho(s) \geq \rho(\mathbf{t})\}.\end{aligned}$$

Пусть $\Delta' = d'_1 \times d'_2 = \Delta_{i',j'}^{(n)}$, а $\Delta'' = d''_1 \times d''_2 = \Delta_{i'',j''}^{(n)}$ или $\Delta'' = \pi_{i'',j''}^{(n)}$, где $(i', j'), (i'', j'') \in \omega_n$ и $0 \leq i'' - i' \leq 1, 0 \leq j'' - j' \leq 1$.

Для упрощения дальнейшей записи перенесем начало координат в точку $\mathbf{t}_{i',j'}$, если $\rho(\mathbf{t}) \neq 0$ на

$$\pi = \bigcup_{\substack{0 \leq i - i' \leq 1 \\ 0 \leq j - j' \leq 1}} \pi_{i,j}^{(n)},$$

или в точку $\mathbf{t} \in \pi$, в которой $\rho(\mathbf{t}) = 0$. Обозначим через $\Delta^* = d_1^* \times d_2^*$ наименьший из квадратов, содержащий $\Delta' \cup \Delta''$ с левым нижним концом в нуле, если $\rho(\mathbf{t}_{i',j'}) = 0$, или с центром в нуле в противном случае. Исходя из свойств веса ρ (формулы (1) и непрерывности) нетрудно обнаружить, что для любых точек $\mathbf{t}, \mathbf{x} \in \Delta$ таких, что $|\mathbf{t}| < |\mathbf{x}|$, и любого прямоугольника $\tilde{\Delta} \supset \Delta$ будет справедливо $\rho(\mathbf{t}) < M\rho(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{t}) < M\rho_\Delta$,

$$\mu \tilde{\Delta} < M \mu \Delta \cdot \frac{|\tilde{\Delta}|^\alpha}{|\Delta|^\alpha}, \quad (7)$$

где

$$M = \max \left\{ \frac{C}{c}, \sup_{I^2} \rho(\mathbf{t}) / \inf_{I^2 \setminus \bigcup_i O_{\delta}(\mathbf{t}^{(i)})} \rho(\mathbf{t}) \right\}, \quad \alpha = \max\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_k\},$$

$|\Delta|$ – площадь прямоугольника Δ , а $\rho_\Delta = \mu\Delta/|\Delta|$ – среднее значение веса ρ на прямоугольнике Δ .

Оценим для $i = 1, 2, j = 1, 2, 3, 4$ интегралы

$$I_{i,j} = \frac{1}{\mu\Delta'} \left\| \iint_{\delta_{i,j}(\Delta')} (f(\mathbf{t}) - T(\mathbf{x}, \mathbf{t})) \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\|_{L_p(\Delta'', \rho)}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}I_{1,j} &\leq \frac{\xi}{\mu\Delta'} \sum_{l \in \vartheta_r} \left\| \iint_{\delta_{1,j}} \int_{\Gamma_j(\mathbf{x}, \mathbf{t})} \dots \int_{\Gamma_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r-1)})} |D^{\mathbf{a}_l} f(\mathbf{u}^{(r)})| \right. \\ &\quad \times \rho(\mathbf{u}^{(r)}) du_{l_r}^{(r)} \dots du_{l_1}^{(1)} d\mathbf{x} \left. \right\|_{L_p(\Delta'', \rho)} \\ &\leq \frac{\xi 3^r |\Delta|^{r/2}}{\mu\Delta'} \sum_{l \in \vartheta_r} \left\| \iint_{\Delta^*} |D^{\mathbf{a}_l} f(\mathbf{u})| \rho^{1/p}(\mathbf{u}) \rho^{1/q}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right\|_{L_p(\Delta'', \rho)} \\ &\leq \frac{A |\Delta^*|^{r/2}}{\mu\Delta'} (\mu\Delta'')^{1/p} (\mu\Delta^*)^{1/q} \sum_{l \in \vartheta_r} \left(\iint_{\Delta^*} |D^{\mathbf{a}_l} f(\mathbf{u})|^p \rho(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right)^{1/p} \\ &\leq A |\Delta^*|^{r/2} \|f\|_{W_p^r(\Delta^*, \rho)}.\end{aligned}$$

Аналогично оцениваем $I_{2,j}$:

$$\begin{aligned}
 I_{2,j} &\leq \frac{\xi^{1/p}}{\mu \Delta'} \sum_{l \in \vartheta_r} \left(\iint_{\Delta''} \left| \iint_{\delta_{2,j}} \int_{\Gamma_j(\mathbf{x}, \mathbf{t})} \cdots \int_{\Gamma_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}^{(r-1)})} |D^{\mathbf{a}_l} f(\mathbf{u}^{(r)})| \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \rho^{1/p}(\mathbf{u}^{(r)}) du_{l_r}^{(r)} \cdots du_{l_1}^{(1)} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|^p dt \right)^{1/p} \\
 &\leq \frac{A}{|\Delta'|} \sum_{l \in \vartheta_r} |\Delta^*|^{(r+1)/2+1/(2p)} \left(\left(\int_{d_1^*} \left(\int_{d_2^*} |D^{\mathbf{a}_l} f(t_1, u)| \rho^{1/p}(t_1, u) du \right)^p dt_1 \right)^{1/p} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\int_{d_2^*} \left(\int_{d_1^*} |D^{\mathbf{a}_l} f(u, t_2)| \rho^{1/p}(u, t_2) du \right)^p dt_2 \right)^{1/p} \right. \\
 &\quad \left. + |\Delta^*|^{-1/(2q)} \iint_{\Delta^*} |D^{\mathbf{a}_l} f(\mathbf{u})| \rho^{1/p}(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right) \\
 &\leq A |\Delta^*|^{r/2} \|f\|_{W_p^r(\Delta^*, \rho)}.
 \end{aligned}$$

Учитывая свойства веса ρ , замечаем, что для любой точки $\mathbf{t}$ из Δ^* будет справедливо вложение

$$\Delta' \subset \bigcap_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3,4}} \delta_{i,j}(\Delta', \mathbf{t}, M).$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
 \|f - Q_{\Delta'} f\|_{L_p(\Delta'', \rho)} &\leq \frac{1}{\mu \Delta'} \sum_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2,3,4}} \left\| \iint_{\delta_{i,j}} (f(\mathbf{t}) - T(\mathbf{x}, \mathbf{t})) \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right\|_{L_p(\Delta'', \rho)} \\
 &\leq A \|f\|_{W_p^r(\Delta^*, \rho)} \cdot n^{-r/2},
 \end{aligned}$$

т.е.

$$\|f - Q_{\Delta'} f\|_{L_p(\Delta'', \rho)} \leq \|f\|_{W_p^r(\Delta^*, \rho)} \cdot n^{-r/2}, \quad (8)$$

где A – константа, зависящая только от ρ и r .

Положим

$$Q_n^{(r)} = \sum_{(i,j) \in \omega_n} P_{i,j}^{(n)} Q_{\Delta_{i,j}}^{(n)}.$$

Теперь выберем произвольную пару индексов (i_0, j_0) и оценим, используя (3), норму $\|Q_n^{(r)} f\|_{W_p^r(\pi_{i_0, j_0}, \rho)}$ (для упрощения записи опустим ниже индексы n и ρ):

$$\begin{aligned}
 \|Q^{(r)} f\|_{W_p^r(\pi_{i_0, j_0})} &\leq \sum_{\substack{0 \leq i-i_0 \leq 1 \\ 0 \leq j-j_0 \leq 1}} \|P_{i,j}(Q_{\Delta_{i,j}}^{(r)} - Q_{\Delta_{i_0, j_0}}^{(r)}) f\|_{W_p^r(\pi_{i_0, j_0})} \\
 &\quad + \|Q_{\Delta_{i_0, j_0}}^{(r)} f\|_{W_p^r(\pi_{i_0, j_0})} \\
 &\leq A n^{r/2} \sum_{\substack{0 \leq i-i_0 \leq 1 \\ 0 \leq j-j_0 \leq 1}} \|(Q_{\Delta_{i,j}}^{(r)} - Q_{\Delta_{i_0, j_0}}^{(r)}) f\|_{L_p(\Delta_{i,j})} \\
 &\quad + \|Q_{\Delta_{i_0, j_0}}^{(r)} f\|_{W_p^r(\pi_{i_0, j_0})}.
 \end{aligned}$$

Каждое из слагаемых правой части последнего неравенства оценим отдельно:

$$\|(Q_{\Delta_{i,j}}^{(r)} - Q_{\Delta_{i_0,j_0}}^{(r)})f\|_{L_p(\Delta_{i,j})} \leq \|Q_{\Delta_{i,j}}^{(r)}f - f\|_{L_p(\Delta_{i,j})} + \|Q_{\Delta_{i_0,j_0}}^{(r)}f - f\|_{L_p(\Delta_{i,j})}.$$

Воспользуемся (6) при $\Delta' = \Delta'' = \Delta_{i,j}^{(n)}$:

$$\|Q_{\Delta_{i,j}}^{(r)}f - f\|_{L_p(\Delta_{i,j})} \leq An^{-r/2}\|f\|_{W_p^r(\Delta_{i,j})}. \quad (9)$$

Если же $\Delta' = \Delta_{i_0,j_0}$, а $\Delta'' = \Delta_{i,j}$, то можем записать

$$\|Q_{\Delta_{i_0,j_0}}^{(r)}f - f\|_{L_p(\Delta_{i,j})} \leq An^{-r/2}\|f\|_{W_p^r(\Delta_{i_0,j_0}^*)}, \quad (10)$$

где

$$\Delta_{i_0,j_0}^* \subseteq \bigcup_{\substack{|i-i_0| \leq 1 \\ |j-j_0| \leq 1}} \pi_{i,j}. \quad (11)$$

Рассмотрим $\|Q_{\Delta_{i,j}}^{(r)}f\|_{W_p^r(\pi_{i,j})}$. Так как индексы i и j сейчас меняться не будут, то для упрощения записи опустим их в следующей ниже выкладке. Имеем

$$\begin{aligned} \|Q_{\Delta}^{(r)}f\|_{W_p^r(\pi)} &\leq \sum_{|\alpha| \leq r} \left(\int_{\pi} \left| D^{\alpha} \left(\frac{1}{\mu\Delta} \int_{\Delta} T(x,t)\rho(x) dx \right) \right|^p \rho(t) dt \right)^{1/p} \\ &\leq (r!)^2 r^2 (\mu\pi)^{1/p} (\mu\Delta)^{-1/p} \sum_{|\mathbf{k}| \leq r-1} \left(\int_{\Delta} |D^{\mathbf{k}}f(x)|^p \rho(x) dx \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|Q_{\Delta}^{(r)}f\|_{W_p^r(\pi)} \leq A\|f\|_{W_p^r(\Delta)}. \quad (12)$$

Объединяя (9)–(12), получим

$$\|Q_n^{(r)}f\|_{W_p^r(\pi_{i_0,j_0})} \leq A \sum_{\substack{0 \leq i-i_0 \leq 1 \\ 0 \leq j-j_0 \leq 1}} \|f\|_{W_p^r(\Delta_{i,j}^*)} + A\|f\|_{W_p^r(\Delta_{i_0,j_0})},$$

или

$$\|Q_n^{(r)}f\|_{W_p^r(\pi_{i_0,j_0})} \leq A\|f\|_{W_p^r(\Delta_{i_0,j_0}^*)}, \quad (13)$$

где A зависит только от ρ и r , а Δ_{i_0,j_0}^* удовлетворяет (11). Воспользуемся (13) для доказательства (5) в случае $X = W_p^r(I^2, \rho)$. Пусть $f \in W_p^r(I^2, \rho)$. Тогда (опустим опять в выкладках индекс ρ)

$$\|Q_n^{(r)}f\|_{W_p^r(I^2)} \leq A \left(\sum_{(i,j) \in \omega_n} \sum_{\substack{|k-i| \leq 1 \\ |l-j| \leq 1}} \|f\|_{W_p^r(\pi_{k,l})}^p \right)^{1/p} \leq A 9^{1/p} \|f\|_{W_p^r(I^2)}.$$

Теперь докажем (6) для $X = W_p^r(I^2, \rho)$ и $Y = L_p(I^2, \rho)$. С учетом (3) и (8) имеем

$$\begin{aligned} \|Q_n^{(r)}f - f\|_{L_p(I^2)} &= \left(\sum_{(i,j) \in \omega_n} \left\| \sum_{\substack{|k-i| \leq 1 \\ |l-j| \leq 1}} P_{k,l}(Q_{\Delta_{k,l}} - Q_{\Delta_{i,j}})f + Q_{\Delta_{i,j}}f - f \right\|_{L_p(\pi_{i,j})}^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{(i,j) \in \omega_n} \left(A \sum_{\substack{|k-i| \leq 1 \\ |l-j| \leq 1}} \|Q_{\Delta_{k,l}}f - f\|_{L_p(\Delta_{i,j})} + \|Q_{\Delta_{i,j}}f - f\|_{L_p(\pi_{i,j})} \right)^p \right)^{1/p} \\ &\leq An^{-r/2} \|f\|_{W_p^r(I^2)}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\rho \rightarrow \infty$ в оценках $\|Q_n^{(r)}f\|_{W_p^r}$ и $\|Q_n^{(r)}f - f\|_{L_p}$ для $f \in C^r(I^2)$, убеждаемся в справедливости (5), (6) и для случая $X = C^r$, $Y = C$.

ЛЕММА 4. Пусть мера μ с весом ρ удовлетворяет условию (1), константа $r \geq 0$, прямоугольник $\delta \in \Pi_n$ ($n \geq n_0$), а функция $S \in \Lambda_n^r$. Тогда для некоторой константы β , зависящей только от r и μ , и для любого $\rho \geq 1$

$$\|S\|_{L_p(\delta, \rho)} \geq \frac{1}{2} \|S\|_{C(\delta)} (\beta \mu \delta)^{1/p}. \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого полинома $p(t)$ степени $r+1$ на интервале $\tau \subset \mathbb{R}$

$$\|p'\|_{C(\tau)} \leq \frac{2(r+1)^2 \|p\|_{C(\tau)}}{|\tau|} \quad (15)$$

(неравенство Маркова, см. [8, с. 323]). Из (15) видим, что существует прямоугольник $\delta' \in \Pi_n$ такой, что $\delta' \subset \delta$, $|\delta'| > |\delta|/(16(r+1)^4)$ и $\|S(t)\| \geq \frac{1}{2} \|S\|_{C(\delta)}$ для $t \in \delta'$. Тогда с учетом (7)

$$\|S\|_{L_p(\delta, \rho)} > \frac{1}{2} \|S\|_{C(\delta)} (\mu \delta')^{1/p} > \frac{1}{2} \|S\|_{C(\delta)} (\beta \mu \delta)^{1/p}.$$

Лемма 4 доказана.

Обозначим через $\mathbf{B}_n^{(r, \rho)}$ n -мерное подпространство $L_p(I^2, \rho)$ с базисом $\varphi_{n,j}^{(r)}$ ($j = 1, \dots, n$), а через $P_n^{(r, \rho)}$ ортогональный проектор пространства $L_p(I^2, \rho)$ на подпространство $\mathbf{B}_n^{(r, \rho)}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть мера μ с весом ρ удовлетворяет условию (1). Тогда для любой функции $f \in C(I^2)$ и любых целых $n \geq 1$, $r \geq 0$ $\|P_n^{(r, \rho)}f\|_C < M_1 \|f\|_C$, где M_1 – константа, зависящая только от $\alpha = \max_{1 \leq j \leq k} \{\alpha_j\}$ и r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем M_1 так, чтобы для всех $l \in \mathbb{Z}_+$

$$\sqrt{M}(2(r+1)(l+1)+1)^\alpha < \gamma^2(1+\gamma^2)^{1/2} M_1, \quad M_1 \beta^{1/2} > 4, \quad (16)$$

где

$$\gamma = \min \left\{ \frac{1}{8} \beta^{1/2} D_r^{-1}, \frac{1}{2} \right\}, \quad \beta = M(16(r+1)^4)^{-\alpha}.$$

Для простоты записи функцию $(P_n^{(r,\rho)}f)(t)$ обозначим через $S_n(t)$. Предположим, что для некоторого номера n в некоторой точке t_0 ($t_0 \in \Delta \subset \Pi_n^r$) будет выполнено

$$|S_n(t_0)| > M_1 \|f\|_{C(I^2)}. \quad (17)$$

Введем последовательность областей $\Delta_0 = \Delta$, $\Delta_{k+1} = U_n^{(r)}(\Delta_k) \cap I^2$. Покажем, что

$$\|S_n - f\|_{L_2(\Delta_k, \rho)} > H_k = (1 + \gamma^2)^{k/2} H_0, \quad (18)$$

где $k \in \mathbb{Z}_+$, $H_0 = \gamma M_1 \|f\|_{C(I^2)} (\mu \Delta_0)^{1/2}$. В самом деле, для $k = 0$, учитывая (14) и (16), получаем

$$\begin{aligned} \|S_n - f\|_{L_2(\Delta_0, \rho)} &\geq \|S_n\|_{L_2(\Delta_0, \rho)} - \|f\|_{L_2(\Delta_0, \rho)} \\ &> \frac{1}{2} M_1 \|f\|_{C(I^2)} (\beta \mu \Delta_0)^{1/2} - \|f\|_{C(I^2)} (\mu \Delta_0)^{1/2} \\ &> \frac{1}{4} M \|f\|_{C(I^2)} (\mu \Delta_0 \beta)^{1/2}. \end{aligned}$$

Предположим, что (18) доказано для $k = l$. Возьмем функцию $\tilde{S}_n = \Phi_{n, \Delta_l}^{(r)} S_n$. Имеем

$$\tilde{S}(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in \Delta_l, \\ S_n(t), & \text{если } t \notin \Delta_{l+1}. \end{cases} \quad (19)$$

Так как S_n — проекция f на $\mathbf{B}_n^{(r, \rho)}$, учитывая (19), получаем

$$\|\tilde{S}_n - f\|_{L_2(\Delta_{l+1}, \rho)} > \|S_n - f\|_{L_2(\Delta_{l+1}, \rho)},$$

т.е.

$$\|\tilde{S}_n\|_{L_2(\Delta_{l+1} \setminus \Delta_l, \rho)} + \|f\|_{L_2(\Delta_{l+1}, \rho)} > \|S_n - f\|_{L_2(\Delta_l, \rho)}.$$

Поскольку $|\Delta_{l+1}| < (2(r+1)(l+1) + 1)^2 |\Delta_0|$ и справедливо (7), имеет место

$$\|f\|_{L_2(\Delta_{l+1}, \rho)} \leq \|f\|_{C(I^2)} M^{1/2} (2(r+1)(l+1) + 1)^\alpha (\mu \Delta_0)^{1/2},$$

откуда с учетом (16) и (18) получаем

$$\|f\|_{L_2(\Delta_{l+1}, \rho)} < \gamma(1 + \gamma^2)^{1/2} H_0 < \gamma \|S_n - f\|_{L_2(\Delta_l, \rho)}. \quad (20)$$

Следовательно,

$$\|\tilde{S}_n\|_{L_2(\Delta_{l+1} \setminus \Delta_l, \rho)} > \|S_n - f\|_{L_2(\Delta_l, \rho)} - \|f\|_{L_2(\Delta_{l+1}, \rho)} > (1 - \gamma) \|S_n - f\|_{L_2(\Delta_l, \rho)}.$$

Обозначим через $\{\delta_i\}$ ($i \in \sigma_l$) множество прямоугольников из $\Pi_m^{(r)}$ таких, что $\Delta_{l+1} \setminus \Delta_l = \bigcup_{i \in \sigma_l} \delta_i$ и $|\delta_i \cap \delta_j| = 0$ при $i \neq j$. Используя леммы 2 и 4, получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{S}_n\|_{L_2(\Delta_{l+1} \setminus \Delta_l, \rho)} &< \left(\sum_{i \in \sigma_l} \|\tilde{S}_n\|_{C(\delta_i)}^2 \mu \delta_i \right)^{1/2} < D_r \left(\sum_{i \in \sigma_l} \|S_n\|_{C(\delta_i)}^2 \mu \delta_i \right)^{1/2} \\ &< 2D_r \beta^{-1/2} \|S_n\|_{L_2(\Delta_{l+1} \setminus \Delta_l, \rho)}. \end{aligned}$$

Из двух последних оценок заключаем, что

$$\|S_n\|_{L_2(\Delta_{l+1} \setminus \Delta_l, \rho)} > 2\gamma \|S_n - f\|_{L_2(\Delta_l, \rho)}.$$

Комбинация последнего неравенства с оценкой (20) дает

$$\|S_n - f\|_{L_2(\Delta_{l+1} \setminus \Delta_l, \rho)} > \|S_n\|_{L_2(\Delta_{l+1} \setminus \Delta_l, \rho)} - \|f\|_{L_2(\Delta_{l+1}, \rho)} > \gamma \|S_n - f\|_{L_2(\Delta_l, \rho)},$$

откуда

$$\|S_n - f\|_{L_2(\Delta_{l+1}, \rho)} > \|S_n - f\|_{L_2(\Delta_l, \rho)}(1 + \gamma^2)^{1/2} > H_{l+1}.$$

Начиная с некоторого номера l_0 будем иметь $\Delta_l = I^2$ ($l \geq l_0$), но в этом случае (18) противоречит тому факту, что S_n — проекция f на $\mathbf{B}_n^{(r, \rho)}$. Следовательно, неравенство (17) не может иметь места.

Теорема 1 доказана.

Теорема 1 означает, что система $\{f_n^{(r, \rho)}\}$ будет базисом в пространстве $C(I^2)$. Из этого факта вытекает (см. [9, с. 100]), что она будет базисом и во всех пространствах $L_p(I^2, \rho)$ ($\rho \geq 1$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть вес $\rho(t)$ удовлетворяет условию (1). Тогда для любого $r \geq 1$ существует система сплайн-функций $\{f_n^{(r, \rho)}(t), n \in \mathbb{N}\}$, являющаяся базисом в $W_p^r(I^2, \rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомую систему сплайнов определим следующим образом: $f_n^{(r, \rho)}$ образуют ортонормированную систему в $L_2(I^2, \rho)$ и $f_1^{(r, \rho)} \equiv 1$,

$$f_n^{(r, \rho)} \in \begin{cases} \mathbf{B}_{(r+2)^2}^{(r, \rho)} & \text{для } n \leq n_0, \\ \mathbf{B}_n^{(r, \rho)} & \text{для } n > n_0. \end{cases}$$

Пусть даны функция $f \in W_p^r(I^2, \rho)$ и $n_1 \geq n_0$. Возьмем оператор $Q_{n_1}^{(r)}$, определенный в лемме 3, и положим

$$q(t) = (Q_{n_1}^{(r)} f)(t). \quad (21)$$

Рассмотрим сплайн $\varphi(x, y) \in \Lambda_n^{(r)}$. Так как для фиксированного $x_1^* \in I$ (соответственно $x_2^* \in I$) функция $\varphi(x_1^*, x_2)$ (соответственно $\varphi(x_1, x_2^*)$) является одномерным сплайном степени $r + 1$ на I с интервалами бесконечной гладкости не меньшими $1/(2\sqrt{n})$, то, учитывая неравенство Маркова и (14), видим, что

$$\begin{aligned} \|D^{\mathbf{a}} \varphi\|_{L_p(I^2, \rho)} &= \left(\sum_{\Delta \in \Pi_n} \|D^{\mathbf{a}} \varphi\|_{L_p(\Delta, \rho)}^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{\Delta} \|D^{\mathbf{a}} \varphi\|_{C(\Delta)}^p \mu \Delta \right)^{1/p} \\ &< A n^{r/2} \left(\sum_{\Delta} \|\varphi\|_{C(\Delta)}^p \mu \Delta \right)^{1/p} \leq A n^{r/2} \|\varphi\|_{L_p(I^2, \rho)}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\|\varphi\|_{W_p^r(I^2, \rho)} \leq A n^{r/2} \|\varphi\|_{L_p(I^2, \rho)}. \quad (22)$$

Следовательно, для $\|P_n^{(r,\rho)} f\|_{W_p^r}$ при $n > n_1$ с учетом (5), (6), (21) и (22) получаем

$$\begin{aligned} \|P_n^{(r,\rho)} f\|_{W_p^r(I^2,\rho)} &\leq \|P_n^{(r,\rho)}(f - q)\|_{W_p^r(I^2,\rho)} + \|q\|_{W_p^r(I^2,\rho)} \\ &< An^{r/2} \|P_n^{(r,\rho)}(f - q)\|_{L_p(I^2,\rho)} + \|q\|_{W_p^r(I^2,\rho)} \\ &< An^{r/2} M_1 \|f - q\|_{L_p(I^2,\rho)} + A \|f\|_{W_p^r(I^2,\rho)} \\ &< A \|f\|_{W_p^r(I^2,\rho)}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ciesielski Z. A construction of basis in $C^{(1)}(I^2)$ // *Studia Math.* 1969. V. 33. № 2. P. 243–247.
- [2] Schonefeld S. Schauder bases in spaces of differentiable functions // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1969. V. 75. P. 589–590.
- [3] Ciesielski Z., Domsta J. Construction of orthonormal basis in $C^m(I^d)$ and $W_p^m(I^d)$ // *Studia Math.* 1972. V. 41. № 2. P. 211–224.
- [4] Carry H. B., Schoenberg I. J. On Polya frequency function. IV // *J. Anal. Math.* 1966. V. 17. P. 71–107.
- [5] de Boor C. Splines as linear combinations of B -splines // *Approximation Theory. V. II.* New York: Acad. Press, 1976. P. 1–47.
- [6] Акопян А. А., Саакян А. А. Многомерные сплайны и полиномиальная интерполяция // *УМН.* 1993. Т. 48. № 5. С. 3–76.
- [7] de Boor C. The quasi interpolant as a tool in elementary spline theory // *Approximation Theory.* New York: Acad. Press, 1973. P. 269–276.
- [8] Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
- [9] Olevskii A. M. Fourier Series with respect to General Orthogonal Systems. Berlin: Springer, 1975.

Московский государственный институт электроники и математики

Поступило

04.02.1998

Исправленный вариант

15.04.1999