Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Арутюнов, Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 2, 163–169

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8471>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 14:35:53

Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений

А. В. Арутюнов

Исследуются свойства замкнутых многозначных накрывающих отображений, действующих из одного метрического пространства в другое. При весьма общих предположениях доказано, что если у заданного α -накрывающего отображения и отображения, удовлетворяющего условию Липшица с константой $\beta < \alpha$, имеется точка совпадения, то она устойчива к малым в смысле хаусдорфовой метрики возмущениям этих отображений. Это утверждение является содержательным также и для однозначных отображений. Исследуется структура множества точек совпадения α -накрывающего и липшицева отображений. Получены условия, при которых предел последовательности α -накрывающих многозначных отображений является $(\alpha - \varepsilon)$ -накрывающим для произвольного $\varepsilon > 0$.

Библиография: 4 названия.

Рассмотрим метрические пространства X и Y , метрика в которых обозначается через ρ_X и ρ_Y соответственно. Через $B_X(x, r)$ обозначим замкнутый шар в X радиуса r с центром в точке x и аналогичное обозначение введем в пространстве Y . Для произвольного подмножества $M \subset Y$ положим $B_Y(M, r) = \bigcup_{y \in M} B_Y(y, r)$ — r -раздутие множества M .

Под многозначным отображением Ψ , действующим из X в Y (обозначаем это как $\Psi: X \rightrightarrows Y$), будем понимать отображение, ставящее в соответствие каждой точке $x \in X$ непустое замкнутое подмножество $\Psi(x)$ пространства Y . В декартовом произведении метрических пространств $X \times Y$ метрику определим по формуле $\rho = \rho_X + \rho_Y$. Множество $\{(x, y) \in X \times Y : y \in \Psi(x)\}$, называемое *графиком* отображения Ψ , обозначим через $\text{grh}(\Psi)$. Отображение называют *замкнутым*, если его график замкнут.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\alpha > 0$. Многозначное отображение $\Psi: X \rightrightarrows Y$ называется α -накрывающим, если

$$\Psi(B_X(x, r)) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r) \quad \forall r \geq 0, \quad \forall x \in X. \quad (1)$$

Если существует $\alpha > 0$, для которого Ψ является α -накрывающим, то Ψ называется *накрывающим*. Очевидно, любое накрывающее отображение сюръективно.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 08-01-90267, 08-01-90001) и программы “Ведущие научные школы”.

¹Иногда в определении многозначного отображения Ψ опускают предположение относительно замкнутости его значений $\Psi(x)$. Однако мы будем предполагать, что все значения $\Psi(x)$ замкнуты.

Отметим также, что понятие накрывающего отображения является естественным развитием понятия равномерно открытого отображения (см. [1; с. 267]).

На множестве замкнутых подмножеств пространства Y будем рассматривать обобщенную метрику Хаусдорфа h , определяемую по формуле

$$h(A, B) = \max\{\rho_*(A, B); \rho_*(B, A)\}.$$

Здесь A и B — произвольные замкнутые подмножества Y , а $\rho_*(A, B) = \sup\{\text{dist}(a, B) : a \in A\}$ (точная верхняя грань может принимать и значение, равное $+\infty$) — полууклонение множества A от множества B . Отметим, что обобщенная метрика Хаусдорфа в отличие от обычной метрики Хаусдорфа может принимать и значение, равное $+\infty$, так как его может принимать полууклонение одного множества от другого.

Мнозначное отображение называется β -липшицевым, если оно удовлетворяет условию Липшица относительно обобщенной метрики Хаусдорфа h с константой β .

Точка ξ называется точкой совпадения отображений Ψ и Φ , если $\Psi(\xi) \cap \Phi(\xi) \neq \emptyset$.

Настоящая заметка посвящена исследованию некоторых свойств накрывающих отображений и связанных с ними свойств точек совпадения двух отображений. Отметим, что хотя все результаты получены для многозначных отображений, тем не менее, основная часть их остаются новыми и содержательными также и для обычных однозначных отображений.

В [2] доказана следующая теорема о совпадении точек. Пусть

$$\Xi = \{\xi \in X : \Psi(\xi) \cap \Phi(\xi) \neq \emptyset\}$$

— множество точек совпадения отображений Ψ и Φ .

ТЕОРЕМА 1 (см. [2]). Пусть $\alpha > \beta$. Предположим, что многозначное отображение Ψ является α -накрывающим и его график замкнут, а многозначное отображение Φ является β -липшицевым. Пусть также хотя бы один из графиков $\text{grh}(\Psi)$ или $\text{grh}(\Phi)$ является полным множеством.

Тогда $\Xi \neq \emptyset$ и

$$\text{dist}(x, \Xi) \leq \frac{\text{dist}(\Psi(x), \Phi(x))}{\alpha - \beta} \quad \forall x \in X. \quad (2)$$

Здесь dist обозначает расстояние между множествами, т.е.

$$\text{dist}(M_1, M_2) = \inf \rho_Y(y_1, y_2), \quad y_1 \in M_1, \quad y_2 \in M_2.$$

Если же, кроме того, для всех $x_1, x_2 \in X$ точные нижние грани в определении выражений для $\text{dist}(\Psi(x_1), \Phi(x_1))$ и $h(\Phi(x_1), \Phi(x_2))$ достигаются (например, множества $\Psi(x)$ и $\Phi(x)$ компактны для всех x), то можно дополнительно гарантировать, что для любого $x \in X$ существует $\xi = \xi(x) \in \Xi$:

$$\rho_X(\xi, x) \leq \frac{\text{dist}(\Psi(x), \Phi(x))}{\alpha - \beta}. \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть пространство X полно. Тогда, если отображение Φ является однозначным (т.е. для каждого x множество $\Phi(x)$ является одноточечным), то график $\text{grh}(\Phi)$ заведомо является полным, а если пространство Y полно и Ψ замкнуто, то график $\text{grh}(\Psi)$ является полным.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. График накрывающего отображения вовсе не обязан быть замкнутым. Соответствующий пример дает функция Дирихле, отображающая отрезок $[0, 1]$ в двухточечное пространство $Y = \{0, 1\}$.

Обсудим следующий важный вопрос: является ли условие накрываемости отображения устойчивым к малым возмущениям. Точнее, пусть даны замкнутые многозначные отображения

$$\Psi, \Psi_n: X \rightrightarrows Y, \quad n = 1, 2, \dots$$

Предположим, что отображение Ψ является накрывающим, а также

$$L(f_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где $f_n(x) = h(\Psi_n(x), \Psi(x))$, а $L(f)$ – константа Липшица функции f . Спрашивается: будут ли при сделанных предположениях отображения Ψ_n также накрывающими при всех больших n ?

Пусть пространство Y является линейным нормированным и для простоты предположим, что существуют такие однозначные отображения ϕ_n , что

$$\Psi_n(x) = \Psi(x) + \phi_n(x), \quad h(\Psi_n(x), \Psi(x)) = \|\phi_n(x)\| \quad \forall x$$

(например, если отображения Ψ и Ψ_n являются однозначными, то $\phi_n(x) := \Psi_n(x) - \Psi(x)$). Тогда положительный ответ на этот вопрос дает теорема 6 (о возмущении) из [3]. Если же пространство Y линейным не является, то, как показывает следующий простой пример, ответ на поставленный вопрос уже является отрицательным.

ПРИМЕР 1. Пусть $X = [0, 1]$, $Y = [0, 1]$ (метрика на всех числовых множествах определяется естественным образом), $\Psi(x) \equiv x$. Для натуральных n положим $\Psi_n(x) = n^{-1} + (1 - n^{-1})x$. Очевидно (4) выполняется. В то же время Ψ является 1-накрывающим, но для всех n отображения Ψ_n накрывающими не будут, так как $0 \notin \Psi_n(X)$, следовательно, $\Psi_n(X) \neq Y$.

Приведем еще один пример, в котором также малые возмущения накрывающего отображения не являются накрывающими, однако, в отличие от примера 1, в нем все возмущенные отображения сюръективны.

ПРИМЕР 2. Пусть X, Y такие же, как в примере 1. Положим

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= x, & \psi_{1,n}(x) &= \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x, & \psi_2(x) &= 1 - x, \\ \Psi(x) &= \{\psi_1(x), \psi_2(x)\}, & \Psi_n(x) &= \{\psi_{1,n}(x), \psi_2(x)\}, & x &\in X. \end{aligned}$$

Очевидно многозначное отображение Ψ является 1-накрывающим, а все Ψ_n накрывающими не будут. В то же время (4) выполняется и $\Psi_n(X) = Y$ для всех n .

Пусть теперь выполняются все предположения теоремы 1. Тогда точка совпадения ξ , для которой выполняется (3), оказывается функцией от переменной x . Возникает естественный вопрос: можно ли эту функцию $\xi(\cdot)$ выбрать непрерывной? Отрицательный ответ на него дает следующий

ПРИМЕР 3. Пусть X, Y такие же, как в примере 1 и $\Psi(x) \equiv x$, $\Phi(x) \equiv 1/2$. Тогда Ψ является 1-накрывающим и уравнение $|x| = 1/2$ имеет ровно два решения: $x_1 = -1/2$ и $x_2 = 1/2$. Поэтому функция $\xi(\cdot)$ принимает не более двух значений, причем в силу (3) $\xi(-1/2) = -1/2$, $\xi(1/2) = 1/2$ и, значит, $\xi(\cdot)$ разрывна (в нуле).

Для $x \in X$ через $\Xi(x)$ обозначим множество (возможно пустое) тех точек $\xi \in \Xi$, для которых выполняется (3). Очевидно, что если $\Psi(x) \cap \Phi(x) \neq \emptyset$, то $\Xi(x) = \{x\}$. Обсудим, как устроены множество Ξ и многозначное отображение $\Xi(\cdot): X \rightrightarrows X$.² Следующий пример показывает, что множество Ξ и множество $\Xi(x)$ для некоторого x могут оказаться незамкнутыми.

ПРИМЕР 4. Пусть

$$X = [0, 1], \quad Y = \{y \in \mathbb{R}^1 : y \geq 1\} \cup \{0\},$$

$$\Psi(x) = \left\{ \frac{1}{x} \right\}, \quad x \in (0, 1], \quad \Psi(0) = \{0\}, \quad \Phi(x) \equiv \{y \in \mathbb{R}^1 : y \geq 1\}.$$

Очевидно, многозначное отображение Ψ замкнуто и является 1-накрывающим, а Φ постоянно. Легко видеть, что

$$\Xi = (0, 1], \quad \Xi(x) = \{x\}, \quad x \in (0, 1], \quad \Xi(0) = (0, 1]$$

и, значит, множества Ξ и $\Xi(0)$ незамкнуты.

В то же время следующая лемма показывает, что при дополнительных предположениях относительно отображений Ψ и Φ можно гарантировать полунепрерывность сверху многозначного отображения $\Xi(\cdot)$ (последнее означает, что для произвольного $x_0 \in X$ из

$$x_i \rightarrow x_0, \quad \xi_i \in \Xi(x_i) \quad \forall i$$

следует, что $\text{dist}(\xi_i, \Xi(x_0)) \rightarrow 0$).

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha > \beta$, многозначное отображение Ψ непрерывно (в смысле метрики Хаусдорфа) и является α -накрывающим, а Φ является β -липшицевым. Предположим также, что для любого $x \in X$ множество $\Phi(x)$ компактно и любой замкнутый шар в пространстве X компактен. Тогда отображение $\Xi(\cdot)$ секвенциально полунепрерывно сверху.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in X$, $x_i \rightarrow x_0$, $\xi_i \in \Xi(x_i)$ для всех i . Докажем, что $\text{dist}(\xi_i, \Xi(x_0)) \rightarrow 0$. Предположим противное. Тогда существует такое $\delta > 0$, что после перехода к подпоследовательности $\text{dist}(\xi_i, \Xi(x_0)) \geq \delta$ для всех i (расстояние до пустого множества условимся считать равным бесконечности).

Многозначное отображение Φ липшицево и, значит, оно так же, как и Ψ , непрерывно относительно метрики Хаусдорфа. Поэтому числовая последовательность $\{\text{dist}(\Psi(x_i), \Phi(x_i))\}$ ограничена, откуда в силу неравенств

$$\rho_X(x_i, \xi_i) \leq \frac{\text{dist}(\Psi(x_i), \Phi(x_i))}{\alpha - \beta} \quad (5)$$

последовательность $\{\rho_X(x_i, \xi_i)\}$ также ограничена. Поэтому последовательность $\{\xi_i\}$ лежит в некотором шаре и, следовательно, переходя к подпоследовательности, будем считать, что $\xi_i \rightarrow \xi_0$. Для каждого i выберем $y_i \in \Psi(\xi_i) \cap \Phi(\xi_i)$. Тогда в силу секвенциальной полунепрерывности сверху Φ $\text{dist}(y_i, \Phi(\xi_0)) \rightarrow 0$, откуда в силу компактности множества $\Phi(\xi_0)$, переходя к подпоследовательности, имеем $y_i \rightarrow y_0 \in \Phi(\xi_0)$. Отсюда в силу замкнутости Ψ $y_0 \in \Psi(\xi_0)$ и, значит, $\Psi(\xi_0) \cap \Phi(\xi_0) \neq \emptyset$,

²Для удобства отображение $\Xi(\cdot)$ также будем называть многозначным, хотя, вообще говоря, множества $\Xi(x)$ не обязаны быть ни непустыми, ни замкнутыми.

откуда $\xi_0 \in \Xi$. Следовательно, $\xi_0 \in \Xi(x_0)$, так как переходя в (5) к пределу при $i \rightarrow \infty$, в силу непрерывности Ψ и Φ имеем

$$\rho_X(x_0, \xi_0) \leq \frac{\text{dist}(\Psi(x_0), \Phi(x_0))}{\alpha - \beta}.$$

Таким образом доказано, что $\text{dist}(\xi_i, \Xi(x_0)) \rightarrow 0$. Но последнее противоречит существованию выбранного выше $\delta > 0$. Лемма доказана.

Отметим, что, как показывает пример 3, в предположениях леммы 1 гарантировать полунепрерывность снизу отображения $\Xi(\cdot)$, вообще говоря, нельзя. Следующий пример показывает, что предположения леммы 1 ослабить, заменяя непрерывность Ψ на секвенциальную полунепрерывность сверху, также нельзя.

ПРИМЕР 5. Пусть $X = [0, 1]$, $Y = [0, 1]$, $\Phi(x) \equiv 1$. Положим $\theta_i = 1/i$, $i = 1, 2, \dots$, и пусть x_i — это середина отрезка $[\theta_{i+1}, \theta_i]$. Многозначное отображение Ψ определим так, что

$$\Psi(x) = \frac{x - \theta_i}{\theta_{i+1} - \theta_i}, \quad x \in (\theta_{i+1}, \theta_i),$$

т.е. на каждом указанном интервале Ψ — это линейная функция, соединяющая точки $(\theta_{i+1}, 1)$ и $(\theta_i, 0)$, и $\Psi(0) = \Psi(\theta_i) = Y$ для любого i .

Построенное многозначное отображение Ψ полунепрерывно сверху и 1-накрывает. Положим $\xi = 1/2$. Тогда $\xi \in \Xi$, $\Psi(x_i) = 1/2$, следовательно,

$$\rho_X(x_i, \xi) \leq \frac{1}{2} = \text{dist}(\Psi(x_i), \Phi(x_i)),$$

откуда $\xi \in \Xi(x_i)$ для любого i (здесь $\alpha = 1$, $\beta = 0$). В то же время $x_i \rightarrow 0$, $\Xi(0) = \{0\}$ и, значит, $\xi \notin \Xi(0)$.

Предположим теперь, что у многозначных отображений Ψ и Φ имеется точка совпадения. Спрашивается, устойчива ли она к малым возмущениям этих отображений? Ответ дает следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha > \beta$ и даны многозначные отображения $\Psi, \Phi: X \rightrightarrows Y$, имеющие точку совпадения x_0 . Пусть также даны последовательности многозначных отображений $\{\Psi_n\}$, $\{\Phi_n\}$ таких, что при каждом n отображение Ψ_n является α -накрывающим и его график замкнут, а отображение Φ_n является β -липшицевым и хотя бы один из графиков $\text{grph}(\Psi_n)$ или $\text{grph}(\Phi_n)$ является полным множеством. Предположим также, что

$$h(\Psi_n(x_0), \Psi(x_0)) \rightarrow 0, \quad h(\Phi_n(x_0), \Phi(x_0)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

и задана последовательность $\{\delta_n\}$: $\delta_n \rightarrow 0+$, $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого n существует x_n такой, что

$$\Psi_n(x_n) \cap \Phi_n(x_n) \neq \emptyset, \quad (7)$$

$$\rho_X(x_n, x_0) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (8)$$

и, более того,

$$\rho_X(x_n, x_0) \leq \frac{\delta_n + \text{dist}(\Psi_n(x_0), \Psi(x_0)) + \text{dist}(\Phi_n(x_0), \Phi(x_0))}{\alpha - \beta}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем номер n и применим к отображениям Ψ_n и Φ_n теорему 1 в точке $x = x_0$. В силу этой теоремы существуют такие $x_n \in X$, что имеет место (7) и

$$\rho_X(x_n, x_0) \leq \frac{\delta_n + \text{dist}(\Psi_n(x_0), \Phi_n(x_0))}{\alpha - \beta}. \quad (10)$$

В силу неравенства треугольника несложно получаем, что

$$\begin{aligned} \text{dist}(\Psi_n(x_0), \Phi_n(x_0)) &\leq h(\Psi_n(x_0), \Psi(x_0)) + \text{dist}(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) + h(\Phi_n(x_0), \Phi(x_0)) \\ &= h(\Psi_n(x_0), \Psi(x_0)) + h(\Phi_n(x_0), \Phi(x_0)), \end{aligned}$$

так как по условию $\Psi(x_0) \cap \Phi(x_0) \neq \emptyset$ влечет $\text{dist}(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) = 0$. Следовательно, доказано, что

$$\text{dist}(\Psi_n(x_0), \Phi_n(x_0)) \leq h(\Psi_n(x_0), \Psi(x_0)) + h(\Phi_n(x_0), \Phi(x_0)).$$

Из полученного неравенства в силу (10) вытекает (9), а значит, и (8). Теорема доказана.

Пусть даны $\alpha > 0$, последовательность α -накрывающих многозначных отображений $\{\Psi_n\}$ и многозначное отображение $\Psi: X \rightrightarrows Y$, график которого замкнут. Предположим, что для каждого $x \in X$ имеет место сходимость

$$h(\Psi_n(x), \Psi(x)) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Возникает естественный вопрос: обязано ли отображение Ψ быть накрывающим. Следующий пример, предложенный Е. С. Жуковским, дает на этот вопрос отрицательный ответ (даже если пространства X, Y полны и все Ψ_n являются однозначными непрерывными отображениями).

ПРИМЕР 6. Пусть $X = Y = [0, 2]$, а функции Ψ_n кусочно-линейны: при $x \in [0, 1]$ они линейно соединяют точку $(0, 0)$ с точкой $M_n = (1/n, 1)$, а при $x \in [1, 2]$ они линейно соединяют точку M_n с точкой $(2, 2)$. Пусть $\Psi(0) = 0$, $\Psi(x) = 1 + x/2$, $x \in (0, 2]$. Здесь очевидно $\Psi_n(x) \rightarrow \Psi(x)$, $n \rightarrow \infty$, при всех x , отображения Ψ_n являются $1/2$ -накрывающими, а Ψ накрывающим не является (так как $1 \notin \Psi(X)$).

В то же время, усилив предположения относительно сходимости $\{\Psi_n\}$, описанного эффекта можно избежать. Это показывает следующая

ТЕОРЕМА 3. Пусть пространство X полно. Предположим, что для произвольного ограниченного множества $U \subseteq X$ условие сходимости (11) выполняется равномерно по всем $x \in U$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ отображение Ψ является $(\alpha - \varepsilon)$ -накрывающим.

Кратко теорема 3 означает, что равномерный предел α -накрывающих отображений является $(\alpha - \varepsilon)$ -накрывающим.

Доказательство теоремы основано на следующем утверждении.

ЛЕММА 2. Пусть X полно, $\alpha > 0$ и график многозначного отображения $\Psi: X \rightrightarrows Y$ замкнут. Предположим, что

$$\text{cl}(\Psi(B_X(x, r))) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r) \quad \forall r > 0, \quad \forall x \in X, \quad (12)$$

где cl означает замыкание множества.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место

$$\Psi(B_X(x, r + \varepsilon)) \supseteq \text{cl}(\Psi(B_X(x, r))) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r) \quad \forall r > 0, \quad \forall x \in X. \quad (13)$$

Мы опускаем доказательство леммы 2, так как она является частным случаем леммы, сформулированной и доказанной в ([1; гл. 6, п. 36, с. 287–288]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Докажем, что выполняется (12). Действительно, зафиксируем произвольные $x_0 \in X$, $r > 0$, и пусть $y \in B_Y(\Psi(x_0), \alpha r)$. Возьмем произвольное $\delta > 0$ и положим $U = B_X(x_0, r)$. В силу (11) существует N_1 такое, что $B_Y(\Psi_n(x_0), \delta) \supseteq \Psi(x_0)$ для всех $n \geq N_1$. Поэтому для всех $n \geq N_1$ существует $y_n \in B_Y(\Psi_n(x_0), \alpha r)$ такой, что $\rho_Y(y_n, y) \leq \delta$. А так как отображения Ψ_n являются α -накрывающими, то $B_Y(\Psi_n(x_0), \alpha r) \subseteq \Psi_n(B_X(x_0, r))$, следовательно, $y_n \in \Psi_n(B_X(x_0, r))$, откуда получаем, что существует $x_n \in U$ такой, что $y_n \in \Psi_n(x_n)$.

Очевидно, что

$$\rho_Y(y_n, \Psi(x_n)) \leq \rho_Y(y_n, \Psi_n(x_n)) + h(\Psi_n(x_n), \Psi(x_n)) = h(\Psi_n(x_n), \Psi(x_n)).$$

Из этой оценки в силу того, что (11) выполняется равномерно по всем $x \in U$, вытекает существование такого $N \geq N_1$, что

$$\rho_Y(y_n, \Psi(B_X(x_0, r))) \leq \delta \quad \forall n \geq N.$$

Отсюда в силу доказанного выше $\rho_Y(y, \Psi(B_X(x_0, r))) \leq 2\delta$, откуда в силу произвольности $\delta > 0$ имеем $y \in \text{cl}(\Psi(B_X(x_0, r)))$. Таким образом (12) доказано. Теперь справедливость теоремы 3 непосредственно вытекает из леммы 2 (см. (13)). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При дополнительном предположении, что отображение Ψ является однозначным, утверждение теоремы 3 вытекает из теоремы 2.8, полученной в [4]. Об этом мне сообщил Дмитрий.

Следующий пример показывает, что в теореме 3 взять $\varepsilon = 0$, вообще говоря, нельзя.

ПРИМЕР 7. Пусть $X = l_1$, $Y = R^1$. Определим линейные непрерывные функционалы

$$x^* = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{i}{i+1}, \dots\right) \in l_\infty \quad \text{и} \quad x_n^* = x^* + \frac{1}{n}(1, \dots, 1, \dots) \in l_\infty.$$

Для $x \in l_1$ положим $\Psi(x) = \langle x^*, x \rangle$, $\Psi_n(x) = \langle x_n^*, x \rangle$. Тогда $\Psi_n \rightrightarrows \Psi$ на любом ограниченном множестве, все отображения Ψ_n являются 1-накрывающими, а Ψ 1-накрывающим не является.

Автор выражает благодарность профессорам Е. С. Жуковскому и М. Ф. Сухинину за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дж. Л. Келли, *Общая топология*, Наука, М., 1981.
- [2] А. В. Арутюнов, “Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки”, *Докл. РАН*, **416**:2 (2007), 151–155.
- [3] А. Д. Иоффе, “Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление”, *УМН*, **55**:3 (2000), 103–162.
- [4] А. В. Дмитриук, А. А. Милютин, Н. П. Осмоловский, “Теорема Люстерника и теория экстремума”, *УМН*, **35**:6 (1980), 11–46.

А. В. Арутюнов

Российский университет дружбы народов

Поступило

04.09.2008