Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, Объем куба Ламберта в сферическом пространстве, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 2, 190–201

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8472>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:05:57

Объем куба Ламберта в сферическом пространстве

Д. А. Деревнин, А. Д. Медных

Куб Ламберта $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ является одним из простейших многогранников. По определению это комбинаторный куб с двугранными углами α , β и γ при трех некомпланарных ребрах и с прямыми углами при всех остальных ребрах. Объем куба Ламберта в гиперболическом пространстве был найден Рут Келлерхальц (1989) в терминах функции Лобачевского $\Lambda(x)$. В данной работе находится объем куба Ламберта в сферическом пространстве. Он выражается в терминах функции

$$\delta(\alpha, \theta) = \int_{\theta}^{\pi/2} \log(1 - \cos 2\alpha \cos 2\tau) \frac{d\tau}{\cos 2\tau},$$

которая может быть рассмотрена как сферический аналог функции

$$\Delta(\alpha, \theta) = \Lambda(\alpha + \theta) - \Lambda(\alpha - \theta).$$

Библиография: 21 название.

1. Введение. Вычисление объема многогранника – это классическая задача, известная со времен Евклида и не потерявшая актуальность в наши дни. Вероятно, первый результат в данном направлении принадлежит Тартальи (Tartaglia, 1499–1557), который нашел объем евклидова тетраэдра. В настоящее время этот результат известен как формула Кэли–Менгера. Сабитов [1] доказал, что объем любого евклидова многогранника – это корень алгебраического уравнения, коэффициенты которого являются целочисленными многочленами, зависящими от длин ребер многогранника и его комбинаторного типа.

В гиперболическом и сферическом случаях ситуация более сложная. Формулы объема для тетраэдров специального вида известны еще со времен Н. И. Лобачевского и Л. Шлефли. Объемы гиперболического куба Ламберта и некоторых других многогранников были получены Келлерхальц [2], Медных [3], Весниным, Медных и Паркером [4]. Объемы гиперболических многогранников, имеющих хотя бы одну вершину на бесконечности, были найдены Винбергом [5].

Общая формула для объема неевклидова тетраэдра долгое время оставалась неизвестной. Несколько лет назад Чо, Ким [6], Мураками, Яно [7] и Ушиджима [8] получили указанную формулу в виде линейной комбинации шестнадцати дилогарифмических функций. Деревнин и Медных [9] предложили элементарную интегральную

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00153), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-8526.2006.1) и фонда Fondescut (гранты №№ 7050189, 1060378).

формулу объема гиперболического тетраэдра. Отметим, что если многогранник обладает какой-либо нетривиальной симметрией, то формула для его объема существенно упрощается. Впервые этот замечательный факт был установлен самим Лобачевским для идеального гиперболического тетраэдра. Милнор [10] представил соответствующий результат в весьма элегантной форме. В общем случае, объем неевклидова тетраэдра с симметриями был найден Деревниным, Медных и Пашкевич [11].

Удивительно, что более ста лет назад, в 1906 г., итальянский математик Гаetano Сфорца нашел формулу для вычисления объема неевклидова тетраэдра. Этот факт приобрел известность после дискуссии одного из авторов с Хосе Мария Монтезиносом на конференции в Эль Бурго д'Осма (Испания) в августе 2006 г. К сожалению, выдающаяся работа Сфорца [12] до этого времени была полностью забыта.

Основные принципы вычисления объемов в неевклидовых геометриях были даны Лобачевским [13] и Шлефли [14]. В частности, они нашли объемы бипрямоугольных тетраэдров (ортосхем) в размерности три. Соотношения между объемами ортосхем в гиперболическом и сферическом пространствах установлены Коксетером [15]. Известно, что всякий многогранник может быть разложен на конечное число ортосхем. Это дает принципиальную возможность найти объем произвольного многогранника. Отметим, что для практического применения такой метод мало эффективен, поскольку разбиение на ортосхемы – само по себе непростая задача.

Простейшим обобщением понятия ортосхемы является куб Ламберта $Q(\alpha, \beta, \gamma)$. Напомним, что $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ – это комбинаторный куб с (существенными) двугранными углами α , β и γ при трех некомпланарных ребрах и с прямыми углами при всех остальных ребрах (см. рис. 1).

Рис. 1. Куб Ламберта $Q(\alpha, \beta, \gamma)$

Куб Ламберта $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ может быть реализован в гиперболическом пространстве [2], [16] при $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi/2$ и в сферическом пространстве [17] при $\pi/2 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$.

Объем гиперболического куба Ламберта был найден в [2] и [3] в терминах функции Лобачевского

$$\Lambda(x) = - \int_0^x \log |2 \sin t| dt.$$

В настоящей работе вычисляется объем сферического куба Ламберта. Он выражается в терминах функции $\delta(\alpha, \theta)$, которая служит сферическим аналогом функции

$$\Delta(\alpha, \theta) = \Lambda(\alpha + \theta) - \Lambda(\alpha - \theta).$$

Главным результатом статьи является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Объем сферического куба Ламберта $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ с существенными углами α, β и γ , $\pi/2 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, находится по формуле*

$$V(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{4} \left(\delta(\alpha, \theta) + \delta(\beta, \theta) + \delta(\gamma, \theta) - 2\delta\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right) - \delta(0, \theta) \right),$$

где

$$\delta(\alpha, \theta) = \int_{\theta}^{\pi/2} \log(1 - \cos 2\alpha \cos 2\tau) \frac{d\tau}{\cos 2\tau},$$

а θ , $\pi/2 < \theta < \pi$, – основной параметр, определяемый равенствами

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta &= -K + \sqrt{K^2 + A^2 B^2 C^2}, \\ K &= \frac{A^2 + B^2 + C^2 + 1}{2}, \quad A = \tan \alpha, \quad B = \tan \beta, \quad C = \tan \gamma. \end{aligned}$$

Любопытно сравнить свойства функции $\delta(\alpha, \theta)$ со свойствами функции $\Delta(\alpha, \theta)$. Заметим, что гиперболические объемы узлов, орбифолдов и конических многообразий во многих случаях могут быть выражены в терминах $\Delta(\alpha, \theta)$ (см. [2]–[5], [18], [19]).

В частности, формула для объема гиперболического куба Ламберта дается следующей теоремой [3]. Этот результат является уточненной версией формулы, полученной ранее в [2].

ТЕОРЕМА 2. *Объем гиперболического куба Ламберта $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ с существенными углами α, β и γ , $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi/2$, находится по формуле*

$$V(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{4} \left(\Delta(\alpha, \theta) + \Delta(\beta, \theta) + \Delta(\gamma, \theta) - 2\Delta\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right) - \Delta(0, \theta) \right),$$

где θ , $0 < \theta < \pi/2$, – основной параметр, определяемый равенствами

$$\begin{aligned} \tan^2 \theta &= K + \sqrt{K^2 + A^2 B^2 C^2}, \\ K &= \frac{A^2 + B^2 + C^2 + 1}{2}, \quad A = \tan \alpha, \quad B = \tan \beta, \quad C = \tan \gamma. \end{aligned}$$

2. Геометрические свойства куба Ламберта. Мы воспользуемся следующими хорошо известными фактами (см. [2], [17]).

ТЕОРЕМА 3. *Куб Ламберта $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ с существенными углами α, β и γ реализуется в гиперболическом пространстве при $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi/2$, в евклидовом пространстве при $\alpha = \beta = \gamma = \pi/2$ и в сферическом пространстве при $\pi/2 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$.*

Рис. 2. Сферический четырехугольник Ламберта $Q(\alpha)$

Отметим, что куб Ламберта является естественным обобщением четырехугольника Ламберта (см. рис. 2), играющего важную роль в основаниях неевклидовой геометрии [5; гл. 3].

Нам потребуется следующая лемма [5; гл. 3, § 3.2].

ЛЕММА 1. *В сферическом четырехугольнике Ламберта $Q(\alpha)$, $\pi/2 < \alpha < \pi$, выполнены соотношения*

$$\frac{\cos \ell}{\sin \alpha} = \cos b, \quad \frac{\sin \ell}{\cos \alpha} = -\frac{1}{\sin a}, \quad \frac{\sin \ell}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\cos a}.$$

При этом справедливы неравенства $0 < a, b, \ell < \pi/2$.

Основным результатом этого пункта является следующая

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $Q(\alpha, \beta, \gamma)$, $\pi/2 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, – сферический куб Ламберта. Обозначим через ℓ_α , ℓ_β и ℓ_γ длины ребер, двугранные углы при которых равны α , β и γ соответственно. Тогда справедливы следующие соотношения:*

1) *правило тангенсов*

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \ell_\alpha} = \frac{\tan \beta}{\tan \ell_\beta} = \frac{\tan \gamma}{\tan \ell_\gamma} = T;$$

2) *правило синусов*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \ell_\alpha} \frac{\sin \beta}{\sin \ell_\beta} \frac{\sin \gamma}{\sin \ell_\gamma} = -T,$$

где T – отрицательный корень уравнения

$$T^4 + (A^2 + B^2 + C^2 + 1)T^2 - A^2B^2C^2 = 0, \quad (1)$$

$$A = \tan \alpha, \quad B = \tan \beta, \quad C = \tan \gamma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим три смежные грани куба Ламберта $Q(\alpha, \beta, \gamma)$, изображенные на рис. 3.

Учитывая, что каждая грань куба является сферическим четырехугольником Ламберта, из леммы 1 получим следующий предварительный результат.

ЛЕММА 2. *Справедливы равенства*

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \ell_\alpha} = \frac{\tan \beta}{\tan \ell_\beta} = \frac{\tan \gamma}{\tan \ell_\gamma} = T, \quad (2)$$

Рис. 3. Смежные грани куба Ламберта $Q(\alpha, \beta, \gamma)$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \ell_\alpha} \frac{\sin \beta}{\sin \ell_\beta} \frac{\sin \gamma}{\sin \ell_\gamma} = -T, \quad (3)$$

$$де T = -\cot p \cot q \cot r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала убедимся, что справедливы равенства (2). Из рассмотрения верхней грани куба (рис. 3) по лемме 1 имеем

$$(i) \quad \frac{\cos \ell_\gamma}{\sin \alpha} = \cos p, \quad (ii) \quad \frac{\sin \ell_\gamma}{\cos \alpha} = -\frac{1}{\sin r}, \quad (iii) \quad \frac{\sin \ell_\gamma}{\sin \alpha} = \frac{\sin p}{\cos r}.$$

Поделив (iii) на (i), получим

$$\tan \ell_\gamma = \frac{\sin p}{\cos r \cos p}. \quad (4)$$

Аналогично, из рассмотрения смежных граней при других вершинах установим равенства

$$\tan \ell_\beta = \frac{\sin r}{\cos q \cos r}, \quad (5)$$

$$\tan \ell_\alpha = \frac{\sin q}{\cos p \cos q}. \quad (6)$$

В результате деления (ii) на (iii), получим

$$\tan \alpha = -\frac{\cos r}{\sin r \sin p}. \quad (7)$$

Из тех же соображений имеем

$$\tan \beta = -\frac{\cos p}{\sin p \sin q}, \quad (8)$$

$$\tan \gamma = -\frac{\cos q}{\sin q \sin r}. \quad (9)$$

Из (6) и (7) выводим

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \ell_\alpha} = -\cot p \cot q \cot r = T.$$

Равенства

$$\frac{\tan \beta}{\tan \ell_\beta} = T, \quad \frac{\tan \gamma}{\tan \ell_\gamma} = T$$

устанавливаются аналогично.

Наконец, проверим соотношение (3). По лемме 1 имеем

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \ell_\gamma} = \frac{\cos r}{\sin p}, \quad \frac{\sin \beta}{\sin \ell_\alpha} = \frac{\cos p}{\sin q}, \quad \frac{\sin \gamma}{\sin \ell_\beta} = \frac{\cos q}{\sin r}.$$

Откуда

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \ell_\alpha} \frac{\sin \beta}{\sin \ell_\beta} \frac{\sin \gamma}{\sin \ell_\gamma} = \frac{\cos r}{\sin p} \frac{\cos p}{\sin q} \frac{\cos q}{\sin r} = -T. \quad (10)$$

Заметим, что в силу леммы 1 справедливы неравенства $0 < \ell_\alpha, \ell_\beta, \ell_\gamma < \pi/2$. Поскольку $\pi/2 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, из соотношений (2) заключаем, что $T < 0$.

Для завершения доказательства теоремы 4 осталось проверить, что T является корнем уравнения (1).

Действительно, полагая $A = \tan \alpha$, $B = \tan \beta$ и $C = \tan \gamma$, перепишем соотношение (2) в виде

$$\tan \ell_\alpha = \frac{A}{T}, \quad \tan \ell_\beta = \frac{B}{T}, \quad \tan \ell_\gamma = \frac{C}{T}.$$

Откуда

$$\sin^2 \ell_\alpha = \frac{A^2}{T^2 + A^2}, \quad \sin^2 \ell_\beta = \frac{B^2}{T^2 + B^2}, \quad \sin^2 \ell_\gamma = \frac{C^2}{T^2 + C^2}.$$

Возводя соотношение (10) в квадрат, получим

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \ell_\alpha} \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \ell_\beta} \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \ell_\gamma} = \frac{T^2 + A^2}{1 + A^2} \frac{T^2 + B^2}{1 + B^2} \frac{T^2 + C^2}{1 + C^2} = T^2. \quad (11)$$

Последнее равенство эквивалентно

$$(T^2 - 1)(T^4 + (A^2 + B^2 + C^2 + 1)T^2 - A^2 B^2 C^2) = 0. \quad (12)$$

Отметим следующее любопытное свойство куба Ламберта, которое нам потребуется для завершения доказательства теоремы.

ЛЕММА 3. Пусть $T = -1$. Тогда

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 из условия $T = -1$ имеем

$$\ell_\alpha = \pi - \alpha, \quad \ell_\beta = \pi - \beta, \quad \ell_\gamma = \pi - \gamma.$$

Тогда из первого и второго утверждений леммы 1 следует, что

$$\cos p = \frac{\cos \ell_\gamma}{\sin \alpha} = -\frac{\cos \gamma}{\sin \alpha} \quad \text{и} \quad \sin p = -\frac{\cos \beta}{\sin \ell_\alpha} = -\frac{\cos \beta}{\sin \alpha}.$$

Откуда

$$\sin^2 p + \cos^2 p = \frac{\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}{\sin^2 \alpha} = 1,$$

что эквивалентно равенству

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Вернемся к полученному выше уравнению (12). Если $T^2 - 1 = 0$ и $T < 0$, то по лемме 3 справедливо равенство (13), которое, очевидно, можно переписать в виде

$$1^4 + (A^2 + B^2 + C^2 + 1)1^2 - A^2 B^2 C^2 = 0.$$

Откуда, $T = \pm 1$ является корнем уравнения

$$T^4 + (A^2 + B^2 + C^2 + 1)T^2 - A^2 B^2 C^2 = 0.$$

Если $T^2 - 1 \neq 0$, то из равенства (12) заключаем, что T также удовлетворяет указанному биквадратному уравнению.

3. Объем сферического куба Ламберта. С этого момента, рассматривая функцию $\phi: (\pi/2, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, мы будем писать $\phi(\pi/2)$ и $\phi(\pi)$ вместо $\phi(\pi/2+0)$ и $\phi(\pi-0)$, если соответствующие пределы существуют и конечны.

Пусть $V = V(\alpha, \beta, \gamma)$ обозначает объем сферического куба Ламберта $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ с существенными углами α , β и γ . Прежде всего, отметим, что $V(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow 0$ при $\alpha, \beta, \gamma \rightarrow \pi/2 + 0$.

В этом можно убедиться следующим образом. Каждая грань $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ является четырехугольником Ламберта с существенным углом α , β или γ , стремящимся к $\pi/2$. Это означает, что площадь каждой грани стремится к нулю. Следовательно, объем $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ также стремится к нулю.

Таким образом, справедливо равенство

$$V\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 0. \quad (14)$$

Обозначим через ℓ_α , ℓ_β и ℓ_γ длины ребер, двугранные углы при которых равны α , β и γ соответственно. По формуле Шлефли (см. [14], [20]) имеем

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \ell_\alpha, \quad \frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{1}{2} \ell_\beta, \quad \frac{\partial V}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} \ell_\gamma. \quad (15)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Объем сферического куба Ламберта $Q(\alpha, \beta, \gamma)$, $\pi/2 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, находится по формуле*

$$V(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^T \log \frac{(t^2 + A^2)(t^2 + B^2)(t^2 + C^2)}{(1 + A^2)(1 + B^2)(1 + C^2)t^2} \frac{dt}{t^2 - 1}, \quad (16)$$

где T – отрицательный корень уравнения

$$T^4 + (A^2 + B^2 + C^2 + 1)T^2 - A^2 B^2 C^2 = 0,$$

$A = \tan \alpha$, $B = \tan \beta$ и $C = \tan \gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже показано выше, функция объема $V = V(\alpha, \beta, \gamma)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (15) с начальным условием (14). Указанное решение задачи Коши всегда существует и единственно.

Положим

$$\tilde{V} = \int_{-\infty}^T F(t, A, B, C) dt,$$

где

$$F(t, A, B, C) = \frac{1}{4(t^2 - 1)} \log \frac{(t^2 + A^2)(t^2 + B^2)(t^2 + C^2)}{(1 + A^2)(1 + B^2)(1 + C^2)t^2},$$

и покажем, что $\tilde{V}$ удовлетворяет условиям (14) и (15). Тогда $V = \tilde{V}$ и предложение доказано.

По формуле Лейбница получим

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \alpha} = F(T, A, B, C) \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \int_{-\infty}^T \frac{\partial F(t, A, B, C)}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial \alpha} dt. \quad (17)$$

Из (11) и (12) следует, что $F(T, A, B, C) = 0$. Более того, поскольку $\alpha = \arctan A$, имеем

$$\frac{\partial A}{\partial \alpha} = 1 + A^2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F(t, A, B, C)}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial \alpha} = -\frac{A}{2(t^2 + A^2)}. \quad (18)$$

Учитывая (17) и (18), по правилу тангенсов (теорема 4) получим

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \alpha} = \int_{-\infty}^T -\frac{A dt}{2(t^2 + A^2)} = \frac{1}{2} \arctan \frac{A}{T} = \frac{1}{2} \ell_\alpha.$$

Равенства

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \beta} = \frac{1}{2} \ell_\beta \quad \text{и} \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} \ell_\gamma$$

устанавливаются аналогичным образом.

Чтобы проверить начальное условие (14) для функции $\tilde{V}$ заметим, что $A, B, C \rightarrow +\infty$ при $\alpha, \beta, \gamma \rightarrow \pi/2 + 0$. Отсюда, $T \rightarrow -\infty$. Из сходимости интеграла (16) заключаем, что $\tilde{V} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow -\infty$.

4. Доказательство основной теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Из предложения 1 имеем

$$\begin{aligned} V(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^T \log \left(\frac{t^2 + A^2}{1 + A^2} \frac{t^2 + B^2}{1 + B^2} \frac{t^2 + C^2}{1 + C^2} : \frac{t^2 + 0^2}{1 + 0^2} \right) \frac{dt}{t^2 - 1} \\ &= \frac{1}{4} (I(A, T) + I(B, T) + I(C, T) - I(0, T)), \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$I(A, T) = \int_{-\infty}^T \log \left(\frac{t^2 + A^2}{1 + A^2} \right) \frac{dt}{t^2 - 1}.$$

Пусть $T = \tan \theta$, $A = \tan \alpha$, $B = \tan \beta$ и $C = \tan \gamma$. Используя подстановку $t = \tan \tau$, получим

$$\begin{aligned} I(A, T) &= \int_{\pi/2}^{\theta} \log \left(\frac{\tan^2 \tau + \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \right) \frac{d\tau}{\cos^2 \tau (\tan^2 \tau - 1)} \\ &= \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{\log(1 - \cos 2\tau \cos 2\alpha) d\tau}{\cos 2\tau} - \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{\log(1 + \cos 2\tau) d\tau}{\cos 2\tau} \\ &= \delta(\alpha, \theta) - \delta\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right). \end{aligned}$$

Таким образом, формула (19) примет вид

$$\begin{aligned} V(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{1}{4}(I(A, T) + I(B, T) + I(C, T) - I(0, T)) \\ &= \frac{1}{4}\left(\delta(\alpha, \theta) + \delta(\beta, \theta) + \delta(\gamma, \theta) - 2\delta\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right) - \delta(0, \theta)\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

5. Элементарные свойства функции $\delta(\alpha, \theta)$. Для вычисления объемов нам понадобятся некоторые элементарные свойства функции $\delta(\alpha, \theta)$. Мы приведем их в следующих двух предложениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Функция*

$$\delta(\alpha, \theta) = \int_{\theta}^{\pi/2} \log(1 - \cos 2\alpha \cos 2\tau) \frac{d\tau}{\cos 2\tau}$$

удовлетворяет следующим свойствам:

- (i) $\delta(\alpha, \theta)$ непрерывна для всех $(\alpha, \theta) \in \mathbb{R}^2$ и дифференцируема почти всюду в $\mathbb{R}^2$;
- (ii) $\delta(\alpha, \theta) + \delta(\alpha, -\theta) = 2\delta(\alpha, 0)$ для всех $(\alpha, \theta) \in \mathbb{R}^2$;
- (iii) $\delta(\alpha, \theta) = \delta(\pi - \alpha, \theta)$ и $\delta(\alpha, \theta) = -\delta(\alpha, \pi - \theta)$;
- (iv) $\delta(\alpha, \theta)$ – четная и π -периодическая относительно α функция;
- (v) $\delta(\alpha, \theta)$ – функция, линейно периодическая относительно θ в следующем смысле:

$$\delta(\alpha, \theta + k\pi) = \delta(\alpha, \theta) - 2k\delta(\alpha, 0), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства (i)–(iv) получаются непосредственно из определения $\delta(\alpha, \theta)$. Для доказательства свойства (ii) заметим, что равенство, очевидно, справедливо для $\theta = 0$. По определению $\delta(\alpha, \theta)$ производные обеих частей равенства по θ равны нулю. Восстанавливая функции по их производным, получим требуемый результат. Для доказательства (v) заметим, что производные по θ обеих частей указанного равенства совпадают. Для установления равенства достаточно проверить его для конкретного значения θ . Пусть $\theta = 0$. В этом случае равенство (v) справедливо для $k = 0$. Для всех $k \in \mathbb{Z}$ из свойств (iii) и (ii) имеем

$$\delta(\alpha, (k+1)\pi) = -\delta(\alpha, -k\pi), \quad -\delta(\alpha, -k\pi) = \delta(\alpha, k\pi) - 2\delta(\alpha, 0).$$

Откуда

$$\delta(\alpha, (k+1)\pi) = \delta(\alpha, k\pi) - 2\delta(\alpha, 0),$$

и утверждение (v) следует по индукции.

Для точных вычислений более удобно использовать следующую альтернативную форму $\delta(\alpha, \theta)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть $\pi/2 < \alpha, \theta < \pi$, тогда функция $\delta(\alpha, \theta)$ может быть представлена в форме*

$$\delta(\alpha, \theta) = 2 \int_{3\pi/4}^{\alpha} \operatorname{arccot} \left(\frac{\cot \nu}{\cot \theta} \right) d\nu,$$

где $0 < \operatorname{arccot} x < \pi$ для всех x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению имеем

$$\delta(\alpha, \theta) = \int_{\theta}^{\pi/2} \log(1 - \cos 2\alpha \cos 2\tau) \frac{d\tau}{\cos 2\tau}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta(\alpha, \theta)}{\partial \alpha} &= \int_{\theta}^{\pi/2} \frac{2 \sin 2\alpha \cos 2\tau}{1 - \cos 2\alpha \cos 2\tau} \frac{d\tau}{\cos 2\tau} \\ &= \pi - 2 \arctan(\cot \alpha \tan \theta) = 2 \operatorname{arccot}(\cot \alpha \tan \theta). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\delta\left(\frac{3\pi}{4}, \theta\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\delta(\alpha, \theta) = \int_{3\pi/4}^{\alpha} \frac{\partial \delta(\nu, \theta)}{\partial \nu} d\nu = 2 \int_{3\pi/4}^{\alpha} \operatorname{arccot}\left(\frac{\cot \nu}{\cot \theta}\right) d\nu.$$

Предложение доказано.

Мы используем это утверждение для вычисления $\delta(\alpha, \theta)$ в конкретных случаях. Результаты вычислений собраны в следующем следствии.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всех α , $0 \leq \alpha \leq \pi$, имеем

- (i) $\delta(\alpha, 0) = \pi(\pi/4 - |\pi/2 - \alpha|)$;
- (ii) $\delta(\alpha, \pi/4) = (\pi/2 - |\pi/2 - \alpha|)^2 - \pi^2/16$;
- (iii) $\delta(\alpha, 3\pi/4) = \pi^2/16 - (\pi/2 - |\pi/2 - \alpha|)^2$;
- (iv) $\delta(\alpha, \pi) = \pi(|\pi/2 - \alpha| - \pi/4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данные равенства легко следуют из предложения 2 и свойств (i)–(iii) функции δ .

6. Вычисление некоторых объемов. Этот пункт посвящен вычислению точных значений объемов в некоторых частных случаях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть α, β, γ , $\pi/2 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, удовлетворяют соотношению

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Тогда объем сферического куба Ламберта $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ находится по формуле

$$V(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{2} - (\pi - \alpha)^2 - (\pi - \beta)^2 - (\pi - \gamma)^2 \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что

$$\tan \theta = -\sqrt{-K + \sqrt{K^2 + A^2 B^2 C^2}},$$

где

$$K = \frac{A^2 + B^2 + C^2 + 1}{2}, \quad A = \tan \alpha, \quad B = \tan \beta, \quad C = \tan \gamma.$$

Пусть $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Используя формулы элементарной тригонометрии, имеем

$$A^2 B^2 C^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \gamma} - 1 = 2K + 1.$$

Откуда, $\tan \theta = -\sqrt{-K + \sqrt{K^2 + 2K + 1}} = -1$ и $\theta = 3\pi/4$. По теореме 1 и следствию 1, (iii) получим

$$\begin{aligned} V(\alpha, \beta, \gamma) &= \frac{1}{4} \left(\delta(\alpha, \theta) + \delta(\beta, \theta) + \delta(\gamma, \theta) - 2\delta\left(\frac{\pi}{2}, \theta\right) - \delta(0, \theta) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\pi^2}{2} - (\pi - \alpha)^2 - (\pi - \beta)^2 - (\pi - \gamma)^2 \right). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

В частности, имеет место следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Объем сферического куба Ламберта $Q(2\pi/3, 2\pi/3, 3\pi/4)$ находится по формуле

$$V\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{31}{576} \pi^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В работе Анны Феликсон [21] показано, что $Q(2\pi/3, 2\pi/3, 3\pi/4)$ является единственным сферическим кубом Ламберта, представимым в виде объединения кокстеровских тетраэдров.

Авторы благодарны И. А. Медных за помощь в оформлении работы и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] I. Kh. Sabitov, “The volume as a metric invariant of polyhedra”, *Discrete Comput. Geom.*, **20**:4 (1998), 405–425.
- [2] R. Kellerhals, “On the volume of hyperbolic polyhedra”, *Math. Ann.*, **285**:4 (1989), 541–569.
- [3] A. D. Mednykh, “On hyperbolic and spherical volumes for link cone-manifolds”, *Kleinian Groups and Hyperbolic 3-Manifolds* (Warwick, 2001), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **299**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, 145–163.
- [4] A. D. Mednykh, J. R. Parker, A. Yu. Vesnin, “On hyperbolic polyhedra arising as convex cores of quasi-Fuchsian punctured torus groups”, *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (3), **10**, Special Issue (2004), 357–381.
- [5] *Geometry. II. Spaces of Constant Curvature*, Encyclopaedia Math. Sci., **29**, ed. E. B. Vinberg, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [6] Y. Cho, H. Kim, “On the volume formula for hyperbolic tetrahedra”, *Discrete Comput. Geom.*, **22**:3 (1999), 347–366.
- [7] J. Murakami, M. Yano, “On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron”, *Comm. Anal. Geom.*, **13**:2 (2005), 379–400.
- [8] A. Ushijima, “A volume formula for generalised hyperbolic tetrahedra”, *Non-Euclidean Geometries*, Math. Appl. (N. Y.), **581**, Springer-Verlag, New York, 2006, 249–265.
- [9] Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, “О формуле объема гиперболического тетраэдра”, *УМН*, **60**:2 (2005), 159–160.
- [10] J. Milnor, “Hyperbolic geometry: the first 150 years”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **6**:1 (1982), 9–24.

- [11] Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич, “Объем симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах”, *Сиб. матем. журн.*, **45**:5 (2004), 1022–1031.
- [12] G. Sforza, “Spazi metrico-proiettivi”, *Ric. Esten. Different. Ser.* (3), **8** (1906), 3–66.
- [13] N. I. Lobatschefskij, *Imaginäre Geometrie und ihre Anwendung auf einige Integrale*, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, **19**, Teubner, Leipzig, 1904.
- [14] L. Schläfli, “Theorie der vielfachen Continuität”, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Bd. I, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1950, 167–392.
- [15] H. S. M. Coxeter, “The functions of Schläfli and Lobatschefsky”, *Quart. J. Math. (Oxford)*, **6**:1 (1935), 13–29.
- [16] H. M. Hilden, M. T. Lozano, J. M. Montesinos-Amilibia, “On the Borromean orbifolds: geometry and arithmetic”, *Topology* **90** (Columbus, OH, 1990), Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., **1**, de Gruyter, Berlin, 1992, 133–167.
- [17] R. Díaz, “A characterization of Gram matrices of polytopes”, *Discrete Comput. Geom.*, **21**:4 (1999), 581–601.
- [18] W. P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.
- [19] А. Ю. Веснин, А. Д. Медных, “Гиперболические объемы многообразий Фибоначчи”, *Сиб. матем. журн.*, **36**:2 (1995), 266–277.
- [20] J. Milnor, “The Schläfli differential equality”, *Collected Papers. I. Geometry*, Publish or Perish, Houston, TX, 1994, 281–295.
- [21] А. А. Феликсон, “Кубы Ламберта, порождающие дискретные группы отражений”, *Матем. заметки*, **75**:2 (2004), 277–286.

Д. А. Деревнин

Тюменский государственный архитектурно-строительный
университет
E-mail: derevnin@mail.ru

Поступило

30.07.2008

Исправленный вариант

31.12.2008

А. Д. Медных

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
E-mail: mednykh@math.nsc.ru