Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка, Квази-энергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 2, 175–183

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8474>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 15:06:30

Квази-энергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами

В. З. Гринес, Ф. Лауденбах, О. В. Починка

В работе рассматривается класс G_4 диффеоморфизмов Морса–Смейла на $\mathbb{S}^3$ с неблуждающим множеством, состоящим из четырех неподвижных точек: одного седла, двух стоков и одного источника. Согласно Пикстону в этом классе существует диффеоморфизм, который не имеет энергетической функции, т.е. функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с множеством периодических точек диффеоморфизма.

Мы вводим понятие квази-энергетической функции для любого диффеоморфизма Морса–Смейла, как функции Ляпунова с наименьшим числом критических точек. Далее, мы выделяем класс $G_{4,1} \subset G_4$ диффеоморфизмов, индуцирующих специальное разбиение Хегора рода 1 сферы $\mathbb{S}^3$. Для каждого диффеоморфизма из класса $G_{4,1}$ мы предъявляем квази-энергетическую функцию с шестью критическими точками.

Библиография: 9 названий.

1. Формулировка результатов

Согласно [1] функция Морса $\varphi: M^n \rightarrow \mathbb{R}$, заданная на замкнутом гладком n -многообразии M^n называется *функцией Морса–Ляпунова для диффеоморфизма Морса–Смейла* $f: M^n \rightarrow M^n$, если

- 1) $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$ для $x \notin \text{Per}(f)$ и $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$ для $x \in \text{Per}(f)$, где $\text{Per}(f)$ – множество периодических точек f ;
- 2) любая точка $p \in \text{Per}(f)$ является невырожденным максимумом $\varphi|_{W^u(p)}$ и невырожденным минимумом $\varphi|_{W^s(p)}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем функцию Морса–Ляпунова $\varphi: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ *квази-энергетической* для диффеоморфизма Морса–Смейла $f: M^n \rightarrow M^n$, если она имеет наименьшее число критических точек среди всех функций Морса–Ляпунова для f .

В этой работе мы рассматриваем класс G_4 диффеоморфизмов Морса–Смейла $f: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$, чье неблуждающее множество состоит в точности из четырех неподвижных точек: одного источника α , одного седла σ и двух стоков ω_1 и ω_2 . Из [2] (теорема 2.3) следует, что замыкание каждой компоненты связности (сепаратрисы) одномерного многообразия $W^u(\sigma) \setminus \sigma$ гомеоморфно отрезку, который состоит из этой

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00547).

сепаратрисы и двух точек: σ и некоторого стока. Обозначим через ℓ_1, ℓ_2 одномерные сепаратрисы, содержащие стоки ω_1, ω_2 соответственно в своих замыканиях. Пусть $\bar{\ell}_i$ – замыкание сепаратрисы ℓ_i , $i = 1, 2$. Тогда согласно [2] $\bar{\ell}_i \setminus \omega_i$ является гладким подмногообразием многообразия $\mathbb{S}^3$. Поэтому топологическое вложение $\bar{\ell}_i$ может быть сложным лишь в окрестности стока ω_i .

Согласно [3] сепаратриса ℓ_i называется *ручной* (или *ручно вложенной*), если существует гомеоморфизм $\psi_i: W^s(\omega_i) \rightarrow \mathbb{R}^3$ такой, что $\psi(\omega_i) = O$, где O – начало координат в $\mathbb{R}^3$ и $\psi_i(\bar{\ell}_i \setminus \sigma)$ – луч с началом в точке O . В противном случае ℓ_i называется *дикой*. Из критерия в [4] следует, что ручность ℓ_i эквивалентна существованию в любой окрестности ω_i гладкого 3-шара B_i , содержащего ω_i и такого, что $\ell_i \cap \partial B_i$ состоит в точности из одной точки. Используя лемму 4.1 из [1], можно уточнить этот критерий следующим образом: сепаратриса ℓ_i является ручной, если и только если существует 3-шар B_{ω_i} такой, что $\omega_i \in f(B_{\omega_i}) \subset \text{int } B_{\omega_i} \subset W^s(\omega_i)$ и $\ell_i \cap \partial B_{\omega_i}$ состоит в точности из одной точки.

В работе [5] было доказано, что для каждого диффеоморфизма $f \in G_4$ по крайней мере одна сепаратриса (скажем ℓ_1) является ручной. Там же было показано, что топологическая классификация диффеоморфизмов из класса G_4 сводится к классификации вложений сепаратрисы ℓ_2 , следовательно, существует бесконечно много диффеоморфизмов в G_4 , которые не являются топологически сопряженными.

Чтобы охарактеризовать тип вложения ℓ_2 , мы введем некоторое специальное разбиение Хегора для $\mathbb{S}^3$. Напомним, что трехмерное ориентируемое многообразие называется *3-шаром* с $g \geq 0$ *ручками*, если оно получено из 3-шара отождествлением g пар попарно непересекающихся 2-дисков, принадлежащих его границе, посредством меняющего ориентацию гомеоморфизма. Граница 3-шаром с g ручками является ориентируемой поверхностью рода g .

Пусть $P^+ \subset \mathbb{S}^3$ – ручное тело рода g такое, что $P^- = \mathbb{S}^3 \setminus \text{int } P^+$ – ручное тело (по необходимости того же рода, что и P^+). Тогда пара (P^+, P^-) называется *разбиением Хегора рода g* сферы $\mathbb{S}^3$ с поверхностью Хегора $S = \partial P^+ = \partial P^-$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Разбиение Хегора (P^+, P^-) сферы $\mathbb{S}^3$ назовем *f -адаптированным* для $f \in G_4$, если

- $\overline{W^u(\sigma)} \subset f(P^+) \subset \text{int } P^+$;
- $W^s(\sigma)$ трансверсально пересекает ∂P^+ и пересечение $W^s(\sigma) \cap P^+$ состоит из единственного 2-диска.

Мы называем f -адаптированное разбиение Хегора $\mathbb{S}^3 = P^+ \cup P^-$ *минимальным*, если оно имеет минимальный род среди всех f -адаптированных разбиений.

Для каждого целого числа $k \geq 0$ обозначим через $G_{4,k}$ множество диффеоморфизмов $f \in G_4$, для которых минимальное f -адаптированное разбиение Хегора имеет род k . Легко заметить, что для каждого $f \in G_{4,0}$ сепаратриса ℓ_2 является ручной и согласно [1] f обладает энергетической функцией. Тогда как любой диффеоморфизм из класса $G_{4,k}$, $k > 0$, не имеет энергетической функции (см. [6]). На рис. 1 изображен фазовый портрет диффеоморфизма из класса $G_{4,1}$. Основным результатом этой работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Каждая квази-энергетическая функция диффеоморфизма $f \in G_{4,1}$ имеет в точности шесть критических точек.*

Рис. 1. Диффеоморфизм из класса $G_{4,1}$

2. Сведения из теории Морса

Следуя Милнору [7; глава 3], мы используем следующие определения.

Компактный $(n + 1)$ -мерный *кобордизм* – это тройка (W, L_0, L_1) , где L_0 и L_1 – замкнутые непересекающиеся многообразия размерности n и W – компактное $(n+1)$ -мерное многообразие, чья граница состоит из объединения $L_0 \cup L_1$. Кобордизм называется *элементарным*, если он обладает функцией Морса $\varphi: W \rightarrow [0, 1]$ только с одной критической точкой и такой, что $\varphi^{-1}(i) = L_i$ для $i = 0, 1$. Если критическая точка имеет индекс r , говорят, что элементарный кобордизм также имеет индекс r .

В этом случае L_1 получается из L_0 *перестройкой* индекса r , т.е. существует вложение $h: \mathbb{S}^{r-1} \times \mathbb{D}^{n-r+1} \rightarrow L_0$ такое, что L_1 диффеоморфно многообразию, полученному из многообразия L_0 удалением внутренности образа h и приклеиванием $\mathbb{D}^r \times \mathbb{S}^{n-r}$, или

$$L_1 \cong \mathbb{D}^r \times \mathbb{S}^{n-r} \bigcup_{h|_{\mathbb{S}^{r-1} \times \mathbb{S}^{n-r}}} L_0 \setminus \text{int}(h(\mathbb{S}^{r-1} \times \mathbb{D}^{n-r+1})).$$

Имеет место и обратное утверждение (см. [7; теорема 3.12]):

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если L_1 получается из L_0 перестройкой индекса r , то существует элементарный кобордизм (W, L_0, L_1) индекса r .

На рис. 2 изображена перестройка индекса 1 из 2-сферы к 2-тору и соответствующий элементарный кобордизм, на котором указаны некоторые множества уровня функции Морса с одной критической точкой индекса 1.

Нам понадобятся также неравенства Морса (см. [8; теорема 5.2]):

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть M^n – замкнутое многообразие, $\varphi: M^n \rightarrow \mathbb{R}$ – функция Морса, C_q – число критических точек индекса q и $\beta_q(M^n)$ – q -е число Бетти

Рис. 2. Элементарный кобордизм

многообразия M^n . Тогда $\beta_q(M^n) \leq C_q$ и эйлерова характеристика

$$\chi(M^n) := \sum_{q=0}^n (-1)^q \beta_q(M^n) = \sum_{q=0}^n (-1)^q C_q.$$

3. Доказательство теоремы 1

Пусть f – диффеоморфизм из класса $G_{4,1}$. Поскольку любая функция Морса на замкнутом 3-многообразии имеет четное число критических точек (это следует из утверждения 2) и оно больше, чем четыре (так как $\text{Per}(f) \subset \text{Cr}(\varphi)$, где $\text{Cr}(\varphi)$ – множество критических точек функции φ , и ℓ_2 – дикая сепаратриса), то для того чтобы доказать теорему 1, достаточно построить функцию Морса–Ляпунова с шестью критическими точками.

3.1. Вспомогательные утверждения. Для доказательства следующих утверждений 3 и 4 мы отсылаем читателя к работе [1] (лемма 2.2 и лемма 4.2 соответственно).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть p – неподвижная точка функции Морса диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$ такая, что $\dim W^u(p) = q$. Тогда, в некоторой окрестности U_p точки p существуют локальные координаты $x_1, \dots, x_n$, $x_i(p) = 0$, $i = 1, \dots, n$, и энергетическая функция $\varphi_p: U_p \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

$$\begin{aligned} \varphi_p(x_1, \dots, x_n) &= q - x_1^2 - \dots - x_q^2 + x_{q+1}^2 + \dots + x_n^2, \\ (TW^u(p) \cap U_p) &\subset O x_1 \dots x_q, \quad (TW^s(p) \cap U_p) \subset O x_{q+1} \dots x_n. \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть ω – неподвижный сток диффеоморфизма Морса–Смейла $f: M^3 \rightarrow M^3$ и B_ω – 3-шар с границей S_ω такой, что $\omega \in f(B_\omega) \subset \text{int } B_\omega \subset W^s(\omega)$. Тогда существует энергетическая функция $\varphi_{B_\omega}: B_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ для f , для которой $S_\omega = \partial B_\omega$ есть множество уровня.

ЛЕММА 1. Пусть ω – неподвижный сток диффеоморфизма Морса–Смейла $f: M^3 \rightarrow M^3$ и Q_ω – заполненный тор такой, что $\omega \in f(Q_\omega) \subset \text{int } Q_\omega \subset W^s(\omega)$. Тогда существует 3-шар B_ω такой, что $f(Q_\omega) \subset B_\omega \subset \text{int } Q_\omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть D_0 – меридианный диск¹ в Q_ω такой, что $\omega \notin D_0$. Так как $Q_\omega \subset W^s(\omega)$, то существует целое число N такое, что $f^n(Q_\omega) \cap D_0 = \emptyset$ для каждого $n > N$. Не уменьшая общности будем считать, что D_0 трансверсален к $G = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\partial Q_\omega)$. Тогда $G \cap \text{int } D_0$ является конечным семейством $\mathcal{C}_{D_0}$ простых замкнутых кривых. Каждая кривая $c \in \mathcal{C}_{D_0}$ принадлежит $f^k(\partial Q_\omega)$ для некоторого целого числа $k \in \{1, \dots, N\}$. Существуют два случая:

- (1) c ограничивает диск на $f^k(\partial Q_\omega)$;
- (2) c не ограничивает диск на $f^k(\partial Q_\omega)$.

Представим $\mathcal{C}_{D_0}$ в виде объединения двух непересекающихся множеств $\mathcal{C}_{D_0}^1$ и $\mathcal{C}_{D_0}^2$, где $\mathcal{C}_{D_0}^1$ и $\mathcal{C}_{D_0}^2$ состоят из кривых, обладающих свойствами (1) и (2) соответственно.

Покажем, что существует меридианный диск D_1 в Q_ω такой, что D_1 является трансверсальным к G и $G \cap \text{int } D_1$ состоит из семейства кривых $\mathcal{C}_{D_1} \subset \mathcal{C}_{D_0}^2$. Если $\mathcal{C}_{D_0}^1 = \emptyset$, то $D_1 = D_0$. В противном случае для любой кривой $c \in \mathcal{C}_{D_0}^1$ обозначим через d_c диск на $f^k(\partial Q_\omega)$ такой, что $\partial d_c = c$. Заметим, что d_c не содержит кривых из семейства $\mathcal{C}_{D_0}^2$. Тогда существует кривая $c \in \mathcal{C}_{D_0}$ такая, что внутренность d_c не содержит кривых из семейства $\mathcal{C}_{D_0}$. Для такой кривой c обозначим через e_c диск на D_0 такой, что $\partial e_c = c$. Поскольку множество $\text{int } Q_\omega \setminus D_0$ гомеоморфно открытому 3-шару, существует единственный 3-шар $b_c \subset \text{int } Q_\omega$ с границей $e_c \cup d_c$. Положим $D'_c = (D_0 \setminus e_c) \cup d_c$. Тогда существует сглаживание D_c диска D'_c такое, что D_c является меридианным диском на Q_ω , D_c трансверсален к G и семейство $G \cap \text{int } D_c$ состоит в точности из всех кривых семейства $\mathcal{C}_{D_0}$, не принадлежащих диску e_c . Повторяя этот процесс, мы получим диск D_1 с требуемыми свойствами.

Пусть теперь $c \in \mathcal{C}_{D_1}$. Обозначим через e_c диск, который кривая c ограничивает в D_1 . Выберем кривую c так, что внутренность e_c не содержит никаких кривых из семейства $\mathcal{C}_{D_1}$. Существуют два случая:

- (a) $e_c \subset f^k(Q_\omega)$;
- (b) $\text{int } e_c \cap f^k(Q_\omega) = \emptyset$.

В случае (a) e_c является меридианным диском в $f^k(Q_\omega)$ и, следовательно, $D = f^{-k}(e_c)$ является меридианным диском в Q_ω таким, что $f(Q_\omega) \cap D = \emptyset$. Действительно, по построению $\text{int } e_c \cap G = \emptyset$, следовательно, $\text{int } D \cap G = \emptyset$. Таким образом, мы можем найти требуемый 3-шар B_ω внутри открытого 3-шара $\text{int } Q_\omega \setminus D$.

В случае (b) существует трубчатая окрестность $V(e_c) \subset \text{int } Q_\omega$ диска e_c такая, что $G \cap \text{int } V(e_c) = \emptyset$ и $B_k = f^k(Q_\omega) \cup V(e_c)$ есть 3-шар. Тогда $f^k(Q_\omega) \subset B_k \subset \text{int } f^{k-1}(Q_\omega)$. Таким образом, $B_\omega = f^{1-k}(B_k)$ – требуемый 3-шар.

3.2. Построение квази-энергетической функции для диффеоморфизма $f \in G_{4,1}$. Построение квази-энергетической функции мы будем делать аналогично построению энергетической функции, проведенному в разделе 4.3 работы [1]. При этом мы опустим некоторые детали, ссылаясь на соответствующие места конструкции из [1].

¹Диск D в заполненном торе Q называется меридианным, если $\partial Q \cap D = \partial D$ и ∂D не ограничивает диск в ∂Q .

Рис. 3. Разбиение Хегора (Q^+, Q^-)

Шаг 1. Следуя утверждению 3 выберем энергетическую функцию $\varphi_p: U_p \rightarrow \mathbb{R}$ в окрестности каждой неподвижной точки p диффеоморфизма f .

Шаг 2. Из определения класса $G_{4,1}$ следует, что для каждого $f \in G_{4,1}$ существует заполненный тор P^+ , принадлежащий разбиению Хегора (P^+, P^-) сферы $\mathbb{S}^3$ и такой, что

- а) $\overline{W^u(\sigma)} \subset f(P^+) \subset \text{int } P^+$;
- б) $W^s(\sigma)$ пересекается трансверсально ∂P^+ и пересечение $W^s(\sigma) \cap P^+$ состоит из единственного 2-диска.

Поскольку $\mathbb{S}^3 \setminus \overline{W^s(\sigma)}$ является несвязным объединением $W^s(\omega_1) \cup W^s(\omega_2)$, то по свойству б) множество $P^+ \setminus W^s(\sigma)$ состоит из двух компонент связности. Кроме того, существует окрестность двумерного диска $P^+ \cap W^s(\sigma)$ такая, что после ее удаления из P^+ мы получим 3-шар P_{ω_1} и заполненный тор P_{ω_2} со следующими свойствами для каждого $i = 1, 2$:

- а) $\omega_i \in f(P_{\omega_i}) \subset \text{int } P_{\omega_i} \subset W^s(\omega_i)$;
- б) ∂P_{ω_i} — поверхность Хегора и $\ell_i \cap \partial P_{\omega_i}$ состоит в точности из одной точки.

Не уменьшая общности, мы можем предполагать, что ∂P_{ω_i} трансверсальна к регулярной части критического уровня $C := \varphi_\sigma^{-1}(1)$ функции φ_σ и пересечение $C \cap \partial P_{\omega_i}$ состоит в точности из одной окружности (в противном случае мы можем, пользуясь λ -леммой², заменить P_{ω_i} на $f^{-n}(P_{\omega_i})$ для некоторого $n > 0$). Для $\varepsilon \in (0, 1/2)$ определим H_ε^+ как замыкание множества

$$\{x \in U_\sigma \mid x \notin (P_{\omega_1} \cup P_{\omega_2}), \varphi_\sigma(x) \leq 1 + \varepsilon\}$$

и положим $P_\varepsilon^+ = P_{\omega_1} \cup P_{\omega_2} \cup H_\varepsilon^+$. Аналогично [1] возможно выбрать $\varepsilon > 0$ таким образом, что ∂P_{ω_i} трансверсально пересекает по одной окружности каждое множество уровня функции φ_σ со значением, принадлежащим интервалу $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$. Выберем

²Утверждение λ -леммы состоит в том, что $f^{-n}(\partial P_{\omega_i}) \cap U_\sigma$ сходится к $\{x_1 = 0\} \cap U_\sigma$ в C^1 -топологии, когда n стремится к $+\infty$ (см., например, [9]).

сглаживание Q^+ заполненного тора P_ε^+ так, что $f(Q^+) \subset \text{int } Q^+$ и $\Sigma := \partial Q^+$ является поверхностью Хегора рода 1 (см. рис. 3). Пусть Q^- – замыкание множества $\mathbb{S}^3 \setminus \text{int } Q^+$. Легко проверить, что Q^+ , как и P_ε^+ , являются изотопными P^+ в $\mathbb{S}^3$. Поэтому пара (Q^+, Q^-) является f -адаптированным разбиением Хегора.

Шаг 3. Для каждого $i = 1, 2$ обозначим через $\tilde{P}_{\omega_i}$ 3-шар с $i - 1$ ручками такой, что

- 1) $f(P_{\omega_i}) \subset \tilde{P}_{\omega_i} \subset \text{int } P_{\omega_i}$;
- 2) $\partial \tilde{P}_{\omega_i}$ трансверсально пересекает по одной окружности каждое множество уровня функции φ_σ со значением, принадлежащим интервалу $[1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$;
- 3) $P_{\omega_i} \setminus \text{int } \tilde{P}_{\omega_i}$ диффеоморфно $\partial P_{\omega_i} \times [0, 1]$.

Определим d_i как замыкание множества

$$\{x \in U_\sigma \mid x \in (W^s(\omega_i) \setminus \tilde{P}_{\omega_i}), \varphi_\sigma(x) = 1 - \varepsilon\}.$$

По построению d_i является диском, граница которого одновременно ограничивает диск D_i в $\partial \tilde{P}_{\omega_i}$. Положим

$$S_i = (\partial \tilde{P}_{\omega_i} \setminus \text{int } D_i) \cup d_i$$

и обозначим через $P(S_i)$ 3-шар с $i - 1$ ручками, ограниченный S_i и содержащий ω_i . Как и в [1], устанавливается, что ε можно выбрать таким образом, что $f(P(S_i)) \subset \text{int } P(S_i)$.

Пусть K – область между ∂Q^+ и $S_1 \cup S_2$. Обозначим через T^+ замыкание множества

$$\{x \in \mathbb{S}^3 \mid x \notin (P_{\omega_1} \cup P_{\omega_2}), 1 - \varepsilon \leq \varphi_\sigma(x) \leq 1 + \varepsilon\}.$$

Заметим, что $T^+ \subset U_\sigma$. Определим функцию $\varphi_K: K \rightarrow \mathbb{R}$ со значениями $1 + \varepsilon$ на ∂Q^+ , $1 - \varepsilon$ на $S_1 \cup S_2$, совпадающую с φ_σ на $K \cap T^+$ и без критических точек вне T^+ . Это последнее условие легко выполнимо, так как рассматриваемая область является тривиальным кобордизмом. Аналогично [1] проверяется, что φ^+ является функцией Морса–Ляпунова.

Шаг 4. Поскольку $P(S_1)$ – 3-шар такой, что

$$\omega_1 \in f(P(S_1)) \subset \text{int } P(S_1) \subset W^s(\omega_1),$$

то согласно утверждению 4 существует энергетическая функция $\varphi_{P(S_1)}: P(S_1) \rightarrow \mathbb{R}$ диффеоморфизма f , которая принимает значение $1 - \varepsilon$ на множестве S_1 .

Шаг 5. Поскольку $P(S_2)$ – заполненный тор такой, что

$$\omega_2 \in f(P(S_2)) \subset \text{int } P(S_2) \subset W^s(\omega_2),$$

согласно лемме 1 существует 3-шар B_{ω_2} такой, что $f(P(S_2)) \subset B_{\omega_2} \subset \text{int } P(S_2)$. Как и на предыдущем шаге, существует энергетическая функция $\varphi_{B_{\omega_2}}: B_{\omega_2} \rightarrow \mathbb{R}$ диффеоморфизма f , которая принимает значение $1/2$ на множестве ∂B_{ω_2} .

Шаг 6. Известно, что заполненный тор может быть получен из 3-шара отождествлением пары непересекающихся 2-дисков на его границе. Поэтому $P(S_2)$ получается приклеиванием к границе некоторого 3-шара элементарного кобордизма индекса 1. Так как с точностью до изотопии существует единственный 3-шар во внутренности

заполненного тора, то $(W_{\omega_2}, \partial B_{\omega_2}, S_2)$ есть элементарный кобордизм индекса 1, где $W_{\omega_2} = P(S_2) \setminus \text{int } B_{\omega_2}$. Тогда W_{ω_2} обладает функцией Морса $\varphi_{W_{\omega_2}}$ только с одной критической точкой индекса 1 и такой, что

$$\varphi_{W_{\omega_2}}(\partial B_{\omega_2}) = \frac{1}{2}, \quad \varphi_{W_{\omega_2}}(S_2) = 1 - \varepsilon.$$

Шаг 7. Определим гладкую функцию $\varphi^+ : Q^+ \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$\varphi^+(x) = \begin{cases} \varphi_K(x), & x \in K, \\ \varphi_{P(S_1)}(x), & x \in P(S_1), \\ \varphi_{B_{\omega_2}}(x), & x \in B_{\omega_2}, \\ \varphi_{W_{\omega_2}}(x), & x \in W_{\omega_2}. \end{cases}$$

Тогда φ^+ – функция Морса–Ляпунова для $f|_{Q^+}$ с одной дополнительной критической точкой.

Шаг 8. По построению Q^- – заполненный тор такой, что

$$\alpha \in f^{-1}(Q^-) \subset \text{int } Q^- \subset W^u(\alpha).$$

Поскольку α – сток для f^{-1} , как в шаге 4 существует 3-шар B_α такой, что $f^{-1}(Q^-) \subset B_\alpha \subset \text{int } Q^-$ и энергетическая функция $\varphi_{B_\alpha} : B_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ для f^{-1} , которая принимает значение $1/2$ на множестве ∂B_α .

Шаг 9. Подобно шагу 5, ∂Q^- получается из ∂B_α перестройкой индекса 1. Поэтому $(W_\alpha = Q^- \setminus \text{int } B_\alpha, \partial Q^-, \partial B_\alpha)$ есть элементарный кобордизм индекса 1, где $W_\alpha = Q^- \setminus \text{int } B_\alpha, \partial Q^-$. Следовательно, W_α обладает функцией Морса φ_{W_α} только с одной критической точкой индекса 1 и такой, что

$$\varphi_{W_\alpha}(\partial B_\alpha) = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \varphi_{W_\alpha}(\partial Q^-) = 2 - \varepsilon.$$

Шаг 10. Определим гладкую функцию $\varphi^- : Q^- \rightarrow \mathbb{R}$ формулой

$$\varphi^-(x) = \begin{cases} 3 - \varphi_{B_\alpha}(x), & x \in \varphi_{B_\alpha}, \\ 3 - \varphi_{W_\alpha}(x), & x \in \varphi_{W_\alpha}. \end{cases}$$

Тогда φ^- – функция Морса–Ляпунова для $f|_{Q^-}$ с одной дополнительной критической точкой.

Шаг 11. Функция $\varphi : S^3 \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\varphi|_{Q^+} = \varphi^+$ и $\varphi|_{Q^-} = \varphi^-$, – функция Морса–Ляпунова для диффеоморфизма f в точности с шестью неподвижными точками.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka, *Self-indexing energy function for Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds*, [arXiv: math.DS/0804.0699](https://arxiv.org/abs/math/0804.0699).
- [2] S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817.
- [3] R. H. Fox, E. Artin, “Some wild cells and spheres in three-dimensional space”, *Ann. of Math.* (2), **49** (1948), 979–990.

- [4] O. G. Harrold, H. C. Griffith, E. E. Posey, “A characterization of tame curves in three-space”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 12–34.
- [5] C. Bonatti, V. Grines, “Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 ”, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602.
- [6] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.
- [7] J. Milnor, *Lectures on the h-Cobordism Theorem*, Notes by L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1965.
- [8] J. Milnor, *Morse Theory*, Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells, Ann. of Math. Stud., **51**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1963.
- [9] J. Palis, “On Morse–Smale dynamical systems”, *Topology*, **8** (1969), 385–404.

В. З. Гринес

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: vgrines@yandex.ru

Поступило

13.11.2008

Ф. Лауденбах

Université de Nantes, France
E-mail: francois.laudenbach@univ-nantes.fr

О. В. Починка

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru