Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Кавиччоли, Ю. В. Муранов, Ф. Спаггиари, Ф. Хеген-
барт, Об итерированных инвариантах Браудера–Ливси,
Матем. заметки, 2009, том 86, выпуск 2, 213–236

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8475>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:35:40

Об итерированных инвариантах Браудера–Ливси

А. Кавиччоли, Ю. В. Муранов, Ф. Спаггиари, Ф. Хегенбарт

Инварианты Браудера–Ливси дают препятствия к реализации элементов групп Уолла нормальными отображениями замкнутых многообразий. В данной работе мы обобщаем определение итерированных инвариантов Браудера–Ливси и описываем свойства полученных инвариантов. Наше определение дает возможность исследовать соотношения между нормальным отображением и его ограничением на подмногообразии и проясняет связь инвариантов Браудера–Ливси с группами Браудера–Квинна препятствий к перестройкам многообразий с фильтрацией. Мы доказываем несколько теорем, дающих связи между нормальным отображением и его ограничением на подмногообразии.

Библиография: 36 названий.

1. Введение. Пусть X^n – замкнутое связное CAT ($CAT = TOP, PL$ или $DIFF$) n -мерное многообразие с фундаментальной группой $\pi = \pi_1(X)$, снабженной гомоморфизмом $w: \pi_1(X) \rightarrow \{\pm 1\}$ (*характер ориентации*). Структурное множество $\mathcal{S}^s(X)$ (соответственно $\mathcal{S}^h(X)$) является множеством классов s -кобордизма (соответственно h -кобордизма) CAT -многообразий, которые просто гомотопически (соответственно гомотопически) эквивалентны X (см. [1]–[4]). Элементы $\mathcal{S}^s(X)$ (соответственно $\mathcal{S}^h(X)$) называются s -триангуляциями (соответственно h -триангуляциями) многообразия X . Фундаментальная проблема геометрической топологии состоит в вычислении множеств $\mathcal{S}^s(X)$ и $\mathcal{S}^h(X)$. Для $n \geq 5$ точная последовательность Уолла (см. [1]–[4])

$$\cdots \rightarrow L_{n+1}^d(\pi) \rightarrow \mathcal{S}^d(X) \rightarrow [X, G/CAT] \xrightarrow{\sigma} L_n^d(\pi) \rightarrow \cdots \quad (1.1)$$

является основным инструментом вычисления структурных множеств $\mathcal{S}^d(X)$ для CAT -многообразий. Здесь L_*^d , $d = s, h$, обозначают соответствующие группы препятствий к перестройкам, и G является моноидом стабильных гомотопических эквивалентностей сферы. Элемент $x \in L_n^d(\pi)$ реализуется нормальным отображением замкнутых многообразий, если он лежит в образе отображения σ для некоторого замкнутого CAT -многообразия X . Обозначим через $C_n^d(\pi)$ подгруппу $L_n^d(\pi)$, порожденную такими элементами. Эта подгруппа обычно достаточно мала даже тогда,

Работа выполнена при поддержке GNSAGA Национального исследовательского совета Италии, Министерства образования, университетов и исследований Италии (MIUR) в проекте “Геометрические свойства действительных и комплексных многообразий” и исследовательского гранта Университета Модены и Регио Эмилии. Второй автор благодарит Институт математики Макса Планка (Бонн, Германия) и факультет математики Университета Модены и Регио Эмилии за прекрасные условия для работы и финансовую поддержку.

когда группа $L_n^d(\pi)$ велика. В данной работе мы будем рассматривать *ТОР*-многообразия и декорацию $d = s$. В дальнейшем мы не будем упоминать декорацию s в обозначениях. Перенос полученных результатов на случай других декораций не представляет трудности.

Для любого топологического пространства X с $\pi = \pi_1(X)$ определено сигнатурное отображение (см. [1]–[3])

$$H_n(K(\pi, 1); \mathbf{L}_\bullet) \xrightarrow{A} L_n(\pi) \quad (1.2)$$

так, что $\text{Image}(A) = C_n(\pi) \subset L_n(\pi)$ является подгруппой, состоящей из элементов, которые реализуются нормальными отображениями замкнутых многообразий (см. [1; с. 194]). Методы вычисления группы $C_n(\pi)$ сильно различаются в зависимости от того, конечна фундаментальная группа π или нет. Случай бесконечной фундаментальной группы без кручения тесно связан с гипотезой Новикова и гипотезой Бореля (см., например, [5]). В случае конечных групп глубокие результаты об отображении σ в (1.1) получены в теореме А [6].

Методы, которые используют инварианты Браудера–Ливси (см. [6]–[9]), применимы к случаю произвольных групп и произвольных декораций и иногда дают возможность вычислить группу $C_n(\pi)$ (см., например, [9] для случая элементарных 2-групп). Используя эти методы, Хэмблтон для случая конечных 2-групп вычислил образ подгруппы $C_n(\pi)$ в проективной группе Новикова $L_*^p(\pi)$ (см. [7]).

Необходимо также отметить, что случай конечных 2-групп имеет очень важное значение. Согласно [10] общий случай конечных групп сводится к случаю конечных 2-групп. Методы Хэмблтона и Харшиладзе являются в основном алгебраическими, и базируются на алгебраической теории расщепления гомотопической эквивалентности вдоль односторонних подмногообразий (см. [1], [2] и [6]).

В данной работе мы обобщаем определение итерированных инвариантов Браудера–Ливси из [8] и [9], следуя определению инвариантов A и B из [7] (см., также [11] и [12]). Инварианты Браудера–Ливси определяются для любой фильтрации Браудера–Ливси (см. определение в п. 3) и тесно связаны со свойствами групп Браудера–Квинна, являющихся группами препятствий к перестройкам нормальных отображений в соответствующую фильтрацию (см. [12]–[14]). Используя наше определение, мы получаем интересные соотношения между нормальным отображением (простой гомотопической эквивалентностью) и его ограничением на подмногообразие данной фильтрации. Наш подход дает также новые соотношения между инвариантами Браудера–Ливси и группами Браудера–Квинна.

2. Предварительные сведения. Сначала мы напомним ситуацию, в которой появляются группы Браудера–Ливси. Пусть $Y^{n-1} \subset X^n$ – одностороннее подмногообразие коразмерности один замкнутого связного топологического n -мерного многообразия X , $n \geq 5$. Простая гомотопическая эквивалентность $f: M \rightarrow X$ *расщепляется вдоль подмногообразия* Y , если гомотопический класс отображения f содержит отображение $g: M \rightarrow X$, которое трансверсально к Y с $N = g^{-1}(Y) \subset M$ и ограничения которого

$$g|_N: N \rightarrow Y \quad \text{и} \quad g|_{(M \setminus N)}: M \setminus N \rightarrow X \setminus Y$$

являются простыми гомотопическими эквивалентностями (см. [1] и [2]). Простая гомотопическая эквивалентность g , удовлетворяющая этим условиям, называется *s-триангуляцией пары многообразий* (X, Y) .

Предположим, что вложение $Y \rightarrow X$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. В этом случае группы препятствий к расщеплению обозначаются через $LN_{n-1}(\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X))$ и называются *группами Браудера–Ливси* (см. [7], [15]–[17]). Отметим, что отображение $\pi = \pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X) = G$ является вложением индекса 2 ориентированных групп. Изменяя ориентацию группы G вне образа этого отображения, мы получаем другую ориентированную группу, которую мы будем обозначать G^- . Для любого вложения $i: \pi \rightarrow G$ индекса 2 ориентированных групп группы Браудера–Ливси могут быть определены алгебраически (см., например, [7] и [18]). Более того, имеет место изоморфизм (см. [1]) $LN_n(\pi \rightarrow G) \cong LN_{n+2}(\pi \rightarrow G^-)$. Группы LN_* входят в коммутативную косу точных последовательностей (см. [1], [2], [7], [18] и [19])

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & L_{n+1}(\pi) & \longrightarrow & L_{n+1}(G^+) & \xrightarrow{\partial} & LN_{n-1}(\pi \rightarrow G^+) & \longrightarrow \\
 & \nearrow & & \nearrow s & & \nearrow & \\
 & & L_{n+1}(i_-^*) & \downarrow \Gamma & & L_{n+1}^{\text{rel}} & \\
 & \nwarrow & \nwarrow q & \nwarrow & & \nwarrow & \\
 \longrightarrow & LN_n(\pi \rightarrow G^+) & \longrightarrow & L_n(G^-) & \longrightarrow & L_n(\pi) & \longrightarrow
 \end{array} \quad (2.1)$$

В диаграмму (2.1) также входят относительные L -группы $L_*^{\text{rel}} = L_*(\pi \rightarrow G^+)$ индуцированного отображения $i_*: L_*(\pi) \rightarrow L_*(G)$ и относительные группы $L_*(i_-^*)$ отображения трансфера $i_-^*: L_*(G^-) \rightarrow L_*(\pi)$. Для пары Браудера–Ливси многообразий $Y \subset X$ имеет место изоморфизм $L_{n+1}(i_-^*) \cong LP_n(F)$, где LP_* – группы препятствий к перестройкам пары многообразий $Y \subset X$ (см. [1] и [2]), а F – квадрат фундаментальных групп:

$$F = \left(\begin{array}{ccc} \pi_1(\partial U) & \longrightarrow & \pi_1(X \setminus Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(Y) & \longrightarrow & \pi_1(X) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} \pi & \xrightarrow{\cong} & \pi \\ \downarrow i_- & & \downarrow i_+ \\ G^- & \xrightarrow{\cong} & G^+ \end{array} \right) \quad (2.2)$$

Здесь U обозначает трубчатую окрестность подмногообразия Y в X с границей ∂U . Заметим, что отображения s и q в диаграмме (2.1) являются естественными забывающими отображениями, которые соответствуют забыванию подмногообразия Y или объемлющего многообразия X соответственно [1]. Отображение Γ в (2.1) задают изоморфизм между группами гомологий цепных комплексов верхней и нижней строк диаграммы (см. [8], [9], [18] и [19]). Отображение ∂ задает первое препятствие к реализации элементов группы $L_n(G)$ нормальными отображениями замкнутых многообразий и называется *инвариантом Браудера–Ливси* (см. [6], [9] и [10]). Более точно, если $\partial(x) \neq 0$, то элемент $x \in L_{n+1}(G)$ не может быть реализован как препятствие к перестройке нормального отображения замкнутых многообразий.

Центральный квадрат диаграммы (2.1) реализуется следующим универсально отталкивающим квадратом спектров (см. [20], [21] и [22]):

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{L}(G) & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 \mathbb{L}(i_-^*) & & \mathbb{L}(\pi \rightarrow G) \\
 \searrow & & \nearrow \\
 & \Sigma \mathbb{L}(G^-) &
 \end{array} \quad (2.3)$$

Здесь $\mathbb{L}(G)$ обозначает Ω -спектр (см. [1], [2], [20], [22] и [23]) с гомотопическими группами $\pi_n(\mathbb{L}(G)) = L_n(G)$ и $\mathbb{L}(i_-^*) = \Sigma \mathbb{L}P(F)$, где $\mathbb{L}P(F)$ – Ω -спектр для групп $LP_n(F)$. Аналогичные обозначения используются и для других спектров. Гомотопические длинные точные последовательности отображений из (2.3) дают косу точных последовательностей в (2.1).

3. Итерированные инварианты Браудера–Ливси. В этом пункте мы даем определение итерированных инвариантов Браудера–Ливси, которое обобщает определение Харшиладзе (см. [8] и [9]). Затем мы описываем связи построенных инвариантов с группами Браудера–Квинна и проблемой реализации замкнутыми многообразиями. Пусть $\mathcal{X}$

$$X_k \subset X_{-1} \subset \cdots \subset X_2 \subset X_1 \subset X_0 = X \quad (3.1)$$

– фильтрация замкнутого топологического n -мерного многообразия X локально-плоскими подмногообразиями, для которых каждая пара многообразий является топологической парой многообразий в смысле Раницкого (см. [2; §7.2]). Далее мы будем рассматривать только фильтрацию, в которой все пары многообразий $X_j \subset X_{j-1}$, $k \geq j \geq 1$, являются парами Браудера–Ливси. Тогда размерность подмногообразия X_j в фильтрации (3.1) равна $n - j$. Более того, мы предполагаем, что размерность многообразия X_k равна $n - k \geq 5$. Мы будем называть такую фильтрацию *фильтрацией Браудера–Ливси* (см. [12]). Введем следующие обозначения:

$$G = G_0 = \pi_1(X_0) = \pi_1(X), \quad G_1 = \pi_1(X_1), \quad \dots, \quad G_k = \pi_1(X_k). \quad (3.2)$$

Без учета ориентации все группы в (3.2) естественно изоморфны группе G посредством изоморфизмов, которые индуцированы вложением подмногообразий из фильтрации (3.1). Полагая $\rho_{j-1} = \pi_1(X_{j-1} \setminus X_j)$ для $1 \leq j \leq k$, мы получим естественные вложения двух групп $\rho_{j-1} \rightarrow G_{j-1}$ и $\rho_{j-1} \rightarrow G_j$ индекса 2. Эти вложения входят в коммутативный квадрат

$$F_{j-1} = \begin{pmatrix} \rho_{j-1} \xrightarrow{\cong} \rho_{j-1} \\ \downarrow i_j^- \quad \quad \downarrow i_j^+ \\ G_j \xrightarrow{\cong} G_{j-1} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

фундаментальных групп в задаче расщепления для пары $X_j \subset X_{j-1}$, который аналогичен (2.2).

Ориентации групп G_j и G_{j-1} совпадают на образах группы ρ_{j-1} и различаются вне этих образов.

Каждый квадрат F_j , $0 \leq j \leq k-1$, порождает диаграмму (2.1) вместе со следующей центральной частью:

$$\begin{array}{ccccc} & & L_{n-j}(G_j) & \xrightarrow{\partial_j} & LN_{n-j-2}(\rho_j \rightarrow G_j) \\ & \nearrow s_j & \downarrow \Gamma_j & \searrow & \downarrow \\ LP_{n-j-1}(F_j) & & & & L_{n-j}(\rho_j \rightarrow G_j) \\ & \searrow q_j & \downarrow & \nearrow & \\ & & L_{n-j-1}(G_{j+1}) & & \end{array} \quad (3.4)$$

Коммутативный квадрат в (3.4) реализуется на уровне спектров квадратом, аналогичным квадрату (2.3). Используя последовательность квадратов F_j , $0 \leq j \leq k-1$, и диаграмму (3.4), мы получаем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & L_n(G_0) & \xrightarrow{\partial_0} & LN_{n-2}(\rho_0 \rightarrow G_0) \\
 & \nearrow s_0 & \downarrow \Gamma_0 & \searrow & \downarrow \\
 LP_{n-1}(F_0) & & & & L_n(\rho_0 \rightarrow G_0) \\
 & \searrow q_0 & \downarrow \Gamma_1 & \nearrow & \downarrow \\
 & & L_{n-1}(G_1) & \xrightarrow{\partial_1} & LN_{n-3}(\rho_1 \rightarrow G_1) \\
 & \nearrow s_1 & \downarrow \Gamma_2 & \searrow & \downarrow \\
 LP_{n-2}(F_1) & & & & L_{n-1}(\rho_1 \rightarrow G_1) \\
 & \searrow q_1 & \downarrow \Gamma_3 & \nearrow & \downarrow \\
 & & L_{n-2}(G_2) & \xrightarrow{\partial_2} & LN_{n-4}(\rho_2 \rightarrow G_2) \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 & \nearrow s_l & \downarrow \Gamma_l & \searrow & \downarrow \\
 LP_m(F_l) & & L_{m+1}(G_l) & \xrightarrow{\partial_l} & LN_{m-1}(\rho_l \rightarrow G_l) \\
 & \searrow q_l & \downarrow \Gamma_{l+1} & \nearrow & \downarrow \\
 & & L_m(G_k) & \xrightarrow{\partial_{l+1}} & LN_{m-3}(\rho_{l+1} \rightarrow G_{l+1})
 \end{array} \tag{3.5}$$

где $n-k=m$, $k-1=l$.

Рассмотрим некоторый элемент $x \in L_n(G_0)$. Элемент $\partial_0(x) \in LN_{n-2}(\rho_0 \rightarrow G_0)$ называется *инвариантом Браудера–Ливси элемента x относительно фильтрации $\mathcal{X}$* (см. [8]–[10] и [16]). По определению инвариант Браудера–Ливси элемента x тривиален тогда и только тогда, когда $\partial_0(x) = 0$.

Обозначим $\mathcal{B}_0 = \{x\}$, и пусть $\partial_0 x = 0$. Тогда мы можем определить множество

$$\mathcal{B}_1 = \Gamma_0(x) \subset L_{n-1}(G_1),$$

которое состоит из элементов $q_0(y)$, где $y \in LP_{n-1}(F_0)$ и $s_0(y) = x$.

Имеет место точная последовательность

$$\cdots \rightarrow LN_{n-1}(\rho_0 \rightarrow G_0) \xrightarrow{f_1} LP_{n-1}(F_0) \xrightarrow{s_0} L_n(G_0) \xrightarrow{\partial_0} LN_{n-2}(\rho_0 \rightarrow G_0) \rightarrow \cdots \tag{3.6}$$

из диаграммы (2.1). Обозначим через c_1 композицию

$$LN_{n-1}(\rho_0 \rightarrow G_0) \xrightarrow{f_1} LP_{n-1}(F_0) \xrightarrow{q_0} L_{n-1}(G_1)$$

отображений f_1 из (3.6) и q_0 из (3.5).

Отображение

$$c_1: LN_{n-1}(\rho_0 \rightarrow G_0) \rightarrow L_{n-1}(G_1)$$

входит в диаграмму (2.1) для группы G_0 , и мы обозначим через $\mathcal{C}_1$ образ этого отображения.

Будем называть множество $\mathcal{B}_1$ *тривиальным*, если $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{C}_1$, и *нетривиальным* в противном случае.

Обозначим через d_1 композицию

$$LN_{n-1}(\rho_0 \rightarrow G_0) \xrightarrow{c_1} L_{n-1}(G_1) \xrightarrow{\partial_1} LN_{n-3}(\rho_1 \rightarrow G_1),$$

а через p_1 – естественную проекцию

$$LN_{n-3}(\rho_1 \rightarrow G_1) \rightarrow LN_{n-3}(\rho_1 \rightarrow G_1)/\{\text{Im } d_1\}.$$

Если множество $\mathcal{B}_1$ нетривиально, то мы можем определить *второй инвариант Браудера–Ливси элемента x относительно фильтрации $\mathcal{X}$* как подмножество

$$p_1 \partial_1(\mathcal{B}_1) \subset LN_{n-3}(\rho_1 \rightarrow G_1)/\{\text{Im } d_1\}.$$

Второй инвариант Браудера–Ливси называется *тривиальным*, если $p_1 \partial_1(\mathcal{B}_1) = \{0\}$ в факторгруппе $LN_{n-3}(\rho_1 \rightarrow G_1)/\{\text{Im } d_1\}$, и называется *нетривиальным* в противном случае. Это определение второго инварианта Браудера–Ливси совпадает с определением инварианта B , данного в [7] (см. также [11]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $x \in L_n(G_0)$ и $\partial_0(x) = 0$. Тогда множество $\mathcal{B}_1$ определено. Оно тривиально тогда и только тогда, когда

$$x \in \text{Image}\{L_n(\rho_0) \rightarrow L_n(G_0)\},$$

где отображение $L_n(\rho_0) \rightarrow L_n(G_0)$ индуцировано естественным вложением и лежит в диаграмме (2.1) для группы G_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{C}_1$. Из точной последовательности (3.6) следует, что $x = s_0(t)$, так как $\partial_0(x) = 0$. Тогда $y = q_0(t) \in \mathcal{B}_1$ по определению $\mathcal{B}_1$. Существует элемент $z \in LN_{n-1}(\rho_0 \rightarrow G_0)$ такой, что $c_1(z) = y$, так как $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{C}_1$. Пусть $t_1 = f_1(z) \in LP_{n-1}(F_0)$. Тогда $s_0(t_1) = 0$ в силу точности последовательности (3.6). Мы имеем

$$q_0(t_1) = q_0 \circ f_1(z) = c_1(z) = y$$

и, следовательно, $q_0(t_1 - t) = y - y = 0$ в $L_n(G_1)$. Из точной последовательности

$$\cdots \rightarrow L_n(\rho_0) \xrightarrow{h_1} LP_{n-1}(F_0) \xrightarrow{q_0} L_{n-1}(G_1) \rightarrow \cdots, \quad (3.7)$$

входящей в (2.1) для G_0 , следует, что $t - t_1 = h_1(m)$, где $m \in L_n(\rho_0)$.

Затем мы получаем

$$s_0 \circ h_1(m) = s_0(t - t_1) = s_0(t) - s_0(t_1) = x - 0 = x$$

и, следовательно,

$$x \in \text{Image}\{L_n(\rho_0) \rightarrow L_n(G_0)\}.$$

Теперь мы докажем обратное утверждение. Пусть $x = s_0 \circ h_1(m)$, где $m \in L_n(\rho_0)$. Рассмотрим произвольный элемент $y \in \mathcal{B}_1$. Тогда по определению $\mathcal{B}_1$ существует такой элемент $t \in LP_{n-1}(F_0)$, что $x = s_0(t)$ и $y = q_0(t)$. Отсюда мы получаем

$$s_0(t - h_1(m)) = s_0(t) - s_0 \circ h_1(m) = x - x = 0.$$

Точная последовательность (3.6) дает $t - h_1(m) = f_1(z)$, где $z \in LN_{n-1}(\rho_0 \rightarrow G_0)$.

Теперь мы получаем

$$c_1(z) = q_0 \circ f_1(z) = q_0(t - h_1(m)) = q_0(t) - q_0 \circ h_1(m) = q_0(t) = y,$$

так как $q_0 \circ h_1(m) = 0$ по (3.7). Следовательно, $y \in \mathcal{C}_1$ и предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $x \in L_n(G_0)$.

i) Элемент x лежит в образе отображения s_0 тогда и только тогда, когда $\partial_0(x) = 0$, как следует из точной последовательности (3.6).

ii) Пусть $\partial_0(x) = 0$. Тогда множество $\mathcal{B}_1$ является смежным классом по подгруппе $\mathcal{C}_1$, как следует из диаграммы (2.1) для группы G_0 . Если $\beta \in \mathcal{B}_1$ – фиксированный элемент, то каждый элемент b множества $\mathcal{B}_1$ имеет вид $b = \beta + c$ для некоторого элемента $c \in \mathcal{C}_1$.

Пусть второй инвариант Браудера–Ливси элемента x относительно фильтрации $\mathcal{K}$ определен и тривиален. Тогда по определению

$$\partial_1 \mathcal{B}_1 \subset \partial_1 \mathcal{C}_1 \subset LN_{n-3}(\rho_1 \rightarrow G_1). \quad (3.8)$$

Мы определим множество $\mathcal{B}'_1 \subset \mathcal{B}_1$, состоящее из элементов $b \in \mathcal{B}_1$, для которых $\partial_1(b) = 0$ в $LN_{n-3}(\rho_1 \rightarrow G_1)$. Заметим, что в рассматриваемом случае (тривиальность второго инварианта Браудера–Ливси) для каждого элемента $b \in \mathcal{B}_1$ существует такой элемент $c \in \mathcal{C}_1$, что $\partial_1(b + c) = 0$ в $LN_{n-3}(\rho_1 \rightarrow G_1)$, где $b + c \in \mathcal{B}_1$, как следует из замечания 1 и последовательности (3.8).

Определим множество

$$\mathcal{B}_2 = q_1(s_1^{-1}(\mathcal{B}'_1)) \subset L_{n-2}(G_2),$$

которое состоит из элементов $q_1(y)$ для $y \in LP_{n-2}(F_2)$ с $s_1(y) \in \mathcal{B}'_1$.

Диаграмма (3.5) реализуется на уровне спектров, как следует из реализации центрального квадрата диаграммы (2.1). Таким образом мы получаем следующий столбец универсально-отталкивающих квадратов спектров:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{L}(G_0) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \Sigma \mathbb{L}P(F_0) & & & & \mathbb{L}(\rho_0 \rightarrow G_0) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \Sigma \mathbb{L}(G_1) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \Sigma^2 \mathbb{L}P(F_1) & & & & \Sigma \mathbb{L}(\rho_1 \rightarrow G_1) \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \Sigma^2 \mathbb{L}(G_2) & & \\
 & & \vdots & & \\
 & & \Sigma^{k-1} \mathbb{L}(G_{k-1}) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \Sigma^k \mathbb{L}P(F_{k-1}) & & & & \Sigma^{k-1} \mathbb{L}(\rho_{k-1} \rightarrow G_{k-1}). \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & \Sigma^k \mathbb{L}(G_k) & &
 \end{array} \quad (3.9)$$

Мы можем применить конструкции из [21] к диаграмме (3.9). Пусть

$$\mathbb{X}_{i,i} = \Sigma^i \mathbb{L}(G_i), \quad k \geq i \geq 0, \quad (3.10)$$

обозначает спектр, который входит в центральный столбец диаграммы (3.9). Спектры, входящие в левый столбец диаграммы (3.9), и спектры, входящие в правый

столбец диаграммы (3.9), обозначаются через

$$\mathbb{X}_{i+1,i} = \Sigma^{i+1} \mathbb{L}P(F_i), \quad k-1 \geq i \geq 0, \quad (3.11)$$

$$\mathbb{X}_{i,i+1} = \Sigma^i \mathbb{L}(\rho_i \rightarrow G_i), \quad k-1 \geq i \geq 0, \quad (3.12)$$

соответственно. Для $k-1 \geq i \geq 1$ имеют место следующие отображения спектров:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{X}_{i,i-1} & \\ & \downarrow & \\ \mathbb{X}_{i+1,i} & \longrightarrow & \mathbb{X}_{i,i} \end{array} \quad (3.13)$$

входящие в диаграмму (3.9). Используя (3.13) для $k-1 \geq i \geq 1$, мы можем определить спектры $\mathbb{X}_{i+1,i-1}$, входящие в универсально-отталкивающие квадраты спектров

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}_{i+1,i-1} & \longrightarrow & \mathbb{X}_{i,i-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{X}_{i+1,i} & \longrightarrow & \mathbb{X}_{i,i} \end{array} \quad (3.14)$$

Итерируя эту конструкцию (для $r \geq 3$ и $r-s \geq 3$), мы определяем спектры $\mathbb{X}_{r,s}$, входящие в универсально-отталкивающие квадраты спектров

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}_{r,s} & \longrightarrow & \mathbb{X}_{r-1,s} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{X}_{r,s+1} & \longrightarrow & \mathbb{X}_{r-1,s+1} \end{array} \quad (3.15)$$

Таким образом мы получим гомотопически-коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & \mathbb{X}_{0,0} & \\ & & & & & \nearrow & \\ & & & & \mathbb{X}_{1,0} & \searrow & \\ & & & & \nearrow & & \mathbb{X}_{1,1} \\ & & \mathbb{X}_{2,0} & \searrow & \mathbb{X}_{2,1} & \nearrow & \\ & \dots & & & \nearrow & & \mathbb{X}_{2,2} \\ & \dots & & \dots & \searrow & & \dots \\ & & \dots & & \nearrow & & \mathbb{X}_{k,k} \end{array} \quad (3.16)$$

Композиции отображений из диаграммы (3.16) дают отображения спектров $\varphi^i: \mathbb{X}_{i,0} \rightarrow \mathbb{X}_{0,0}$ для $k \geq i \geq 0$. Обозначим через $\mathbb{F}_i$ гомотопический слой отображения φ^i . Таким образом, мы получаем корасслоения

$$\mathbb{F}_i \rightarrow \mathbb{X}_{i,0} \rightarrow \mathbb{X}_{0,0} \quad (3.17)$$

для $k \geq i \geq 0$.

Заметим, что из (2.1) и (2.3) следует, что $\mathbb{F}_1 = \Sigma \mathbb{L}N(\rho_0 \rightarrow G_0)$.

Корасслоение (3.17) задает гомотопическую длинную точную последовательность

$$\cdots \rightarrow \pi_n(\mathbb{F}_i) \xrightarrow{f_i} \pi_n(\mathbb{X}_{i,0}) \xrightarrow{\varphi_*^i} \pi_n(\mathbb{X}_{0,0}) \rightarrow \cdots, \quad (3.18)$$

где отображение φ_*^i индуцировано φ^i . Для $i = 1$ мы имеем $\varphi_*^i = s_0$, и точная последовательность (3.18) совпадает с точной последовательностью (3.6).

Для $k \geq i \geq 0$ обозначим через ψ^i отображение $\mathbb{X}_{i,0} \rightarrow \mathbb{X}_{i,i}$, которое является композицией отображений из диаграммы (3.16). Композиция первого отображения из (3.17) и отображения ψ^i дает отображение спектров

$$\mathbb{F}_i \rightarrow \mathbb{X}_{i,i}, \quad k \geq i \geq 0, \quad (3.19)$$

которое индуцирует отображение

$$c_i = \psi_*^i \circ f_i: \pi_n(\mathbb{F}_i) \rightarrow \pi_n(\mathbb{X}_{i,i}) = L_{n-i}(G_i). \quad (3.20)$$

Пусть $\mathcal{C}_i \subset L_{n-i}(G_i)$ обозначает образ отображения c_i .

Обозначим через d_i композицию

$$\pi_n(\mathbb{F}_i) \xrightarrow{c_i} L_{n-i}(G_i) \xrightarrow{\partial_i} L_{n-i-2}(\rho_i \rightarrow G_i)$$

(которая определена для $k - 1 \geq i \geq 0$), и через p_i – естественную проекцию

$$L_{n-i-2}(\rho_i \rightarrow G_i) \rightarrow L_{n-i-2}(\rho_i \rightarrow G_i)/\{\text{Im } d_i\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для $i = 1$ эти определения отображений c_i , d_i и p_i совпадают с определениями, которые были даны в работе раньше. Достаточно сравнить точные последовательности (3.6) и (3.18) и использовать определения спектров $\mathbb{X}_{1,0}$, $\mathbb{F}_1$ и $\mathbb{X}_{0,0}$.

Пусть второй инвариант Браудера–Ливси элемента $x \in L_n(G_0)$ относительно фильтрации $\mathcal{X}$ тривиален и $k \geq 3$. Тогда множество $\mathcal{B}_2$ определено. Будем называть множество $\mathcal{B}_2$ *тривиальным*, если $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{C}_2$. Если второй инвариант Браудера–Ливси элемента $x \in L_n(G_0)$ относительно фильтрации $\mathcal{X}$ тривиален и множество $\mathcal{B}_2$ нетривиально, то мы определим *третий инвариант Браудера–Ливси элемента x относительно фильтрации $\mathcal{X}$* . Третий инвариант Браудера–Ливси равен подмножеству

$$p_2 \partial_2(\mathcal{B}_2) \subset L_{n-4}(\rho_2 \rightarrow G_2)/\{\text{Im } d_2\}.$$

Третий инвариант Браудера–Ливси называется *тривиальным*, если $p_2 \partial_2(\mathcal{B}_2) = \{0\}$ в факторгруппе $L_{n-4}(\rho_2 \rightarrow G_2)/\{\text{Im } d_2\}$, и называется *нетривиальным* в противном случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Для $2 \leq i \leq k$ мы определим индуктивно множества $\mathcal{B}_i$ и i -е инварианты Браудера–Ливси элемента $x \in L_n(G_0)$ относительно фильтрации $\mathcal{X}$.

Когда множество $\mathcal{B}_{i-1}$ определено, оно называется *тривиальным*, если $\mathcal{B}_{i-1} \subset \mathcal{C}_{i-1}$, и называется *нетривиальным* в противном случае. Если множество $\mathcal{B}_{i-1}$ определено и нетривиально, то i -й инвариант Браудера–Ливси является подмножеством

$$p_{i-1} \partial_{i-1}(\mathcal{B}_{i-1}) \subset L_{n-i-1}(\rho_{i-1} \rightarrow G_{i-1})/\{\text{Im } d_{i-1}\}.$$

Он тривиален тогда и только тогда, когда он равен $\{0\}$ в $LN_{n-i-1}(\rho_{i-1} \rightarrow G_{i-1})/\{\text{Im } d_{i-1}\}$.

Если i -й инвариант Браудера–Ливси определен и тривиален, то определим подмножество

$$\mathcal{B}'_{i-1} \subset \mathcal{B}_{i-1} \subset L_{n-i+1}(G_{i-1}),$$

полагая

$$\mathcal{B}'_{i-1} = \{x \in \mathcal{B}_{i-1} \mid \partial_{i-1}(x) = 0\}. \quad (3.21)$$

Если множество $\mathcal{B}'_{i-1}$ определено и не пусто, то определим множество $\mathcal{B}_i$ как

$$\mathcal{B}_i = q_{i-1}(s_{i-1}^{-1}(\mathcal{B}'_{i-1})). \quad (3.22)$$

Как следует из определения 1, i -й инвариант Браудера–Ливси элемента x тривиален тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{B}_{i-1}$ нетривиально и

$$\partial_{i-1}(\mathcal{B}_{i-1}) \subset \partial_{i-1}(\mathcal{C}_{i-1}) \subset LN_{n-i-1}(\rho_{i-1} \rightarrow G_{i-1}). \quad (3.23)$$

В соответствии с нашим подходом множество $\mathcal{B}_i$ определено, когда множество $\mathcal{B}_{i-1}$ определено и нетривиально, i -й инвариант Браудера–Ливси элемента x тривиален и множество $\mathcal{B}'_{i-1}$ не пусто.

Теперь докажем несколько технических результатов, которые показывают, что определение 1 корректно. Рассмотрим гомотопический универсально-отталкивающий квадрат спектров

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{S} & \longrightarrow & \mathbb{Q}. \end{array} \quad (3.24)$$

Обозначим через $\mathbb{F}$ гомотопический кослой горизонтальных отображений в (3.24) и через $\mathbb{G}$ – гомотопический кослой вертикальных отображений в (3.24). Диаграмма (3.24) задает коммутативную косу точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} & \longrightarrow & \pi_{n+1}(\mathbb{G}) & \xrightarrow{\quad} & \pi_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\quad f \quad} & \pi_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \\ & \nearrow & \searrow & & \searrow & \nearrow & \searrow \\ & & & \pi_n(\mathbb{P}) & \xrightarrow{\quad p \quad} & \pi_n(\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\quad t \quad} \\ & \nwarrow & \nearrow & & \nearrow & \nwarrow & \nearrow \\ & \longrightarrow & \pi_{n+1}(\mathbb{F}) & \xrightarrow{\quad g \quad} & \pi_n(\mathbb{S}) & \xrightarrow{\quad q \quad} & \pi_n(\mathbb{G}) \longrightarrow \end{array} \quad (3.25)$$

ЛЕММА 1. Пусть $C \subset \pi_n(\mathbb{R})$, $r(C) = B \subset \pi_n(\mathbb{Q})$ и $D = q^{-1}(B)$ в диаграмме (3.25). Тогда мы имеем

$$s(p^{-1}(C)) = D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $s(p^{-1}(C)) \subset D$ следует из коммутативности центрального квадрата в диаграмме (3.25). Теперь пусть $x \in D$ – такой элемент, что $q(x) = y \in B$. Так как $r(C) = B$, то существует такой элемент $z \in C$, что $r(z) = y$. Композиция $t \circ q$ является тривиальным отображением, следовательно, $t(y) = 0$. Теперь коммутативность диаграммы (3.25) влечет $f(z) = 0$. Из точной последовательности

$$\cdots \rightarrow \pi_n(\mathbb{P}) \xrightarrow{p} \pi_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{f} \pi_n(\mathbb{F}) \rightarrow \cdots$$

которая следует из диаграмм (3.16) и (3.5). Пусть $x \in \pi_n(\mathbb{X}_{0,0}) = L_n(G_0)$. Для $1 \leq i \leq k$ определим $\mathcal{A}_i$, полагая

$$\mathcal{A}_i = (\varphi_*^i)^{-1}(x) \subset \pi_n(\mathbb{X}_{i,0}). \quad (3.28)$$

Отметим, что если множество $\mathcal{A}_j$ является пустым для $1 \leq j \leq k$, то все множества $\mathcal{A}_i$, $k \geq l \geq j$, также будут пустыми.

ТЕОРЕМА 1. i) Пусть для некоторого элемента $x \in L_n(G_0)$ определен i -й инвариант Браудера–Ливси, $1 \leq i \leq k$, относительно фильтрации $\mathcal{X}$. Тогда он тривиален тогда и только тогда, когда

$$x \in \text{Im } \varphi_*^i \subset L_n(G_0). \quad (3.29)$$

ii) Пусть i -й инвариант Браудера–Ливси, $1 \leq i \leq k$, элемента $x \in L_n(G_0)$ относительно фильтрации $\mathcal{X}$ тривиален. Тогда множество $\mathcal{B}'_{i-1}$ не пусто и

$$\mathcal{B}_i \stackrel{\text{def}}{=} q_{i-1}(s_{i-1}^{-1}(\mathcal{B}'_{i-1})) = \psi_*^i(\mathcal{A}_i). \quad (3.30)$$

iii) Пусть i -й инвариант Браудера–Ливси, $1 \leq i \leq k$, элемента $x \in L_n(G_0)$ относительно фильтрации $\mathcal{X}$ тривиален. Множество

$$\mathcal{B}_i \stackrel{\text{def}}{=} q_{i-1}(s_{i-1}^{-1}(\mathcal{B}'_{i-1})) \subset L_{n-i}(G_i)$$

будет тривиально тогда и только тогда, когда

$$x \in \text{Im}(\varphi_*^i \circ h_i). \quad (3.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по $i \geq 1$. Для $i = 1$ результат следует из предложения 1 и замечания 1. Предположим, что утверждение теоремы выполняется для $i - 1$.

i) Пусть i -й инвариант Браудера–Ливси определен. Тогда, по определению, множество $\mathcal{B}_{i-1}$ определено и нетривиально. Так как $(i - 1)$ -й инвариант Браудера–Ливси тривиален, по предположению индукции получаем

$$\mathcal{B}_{i-1} \stackrel{\text{def}}{=} q_{i-2}(s_{i-2}^{-1}(\mathcal{B}'_{i-2})) = \psi_*^i(\mathcal{A}_{i-1}). \quad (3.32)$$

Мы можем выписать следующий гомотопически коммутативный квадрат спектров:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}_{i,0} & \longrightarrow & \mathbb{X}_{i-1,0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{X}_{i,i-1} & \longrightarrow & \mathbb{X}_{i-1,i-1} \end{array} \quad (3.33)$$

который является универсально-отталкивающим, поскольку все квадраты в (3.27) являются универсально-отталкивающими. Квадрат (3.33) задает косу точных последовательностей, которая аналогична косе (3.25), с центральным квадратом

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\mathbb{X}_{i,0}) & \xrightarrow{\nu} & \pi_n(\mathbb{X}_{i-1,0}) \\ \downarrow \mu & & \downarrow \psi_*^{i-1} \\ \pi_n(\mathbb{X}_{i,i-1}) & \xrightarrow{s_{i-1}} & \pi_n(\mathbb{X}_{i-1,i-1}) \end{array} \quad (3.34)$$

Пусть i -й инвариант Браудера–Ливси элемента x тривиален. Для произвольного элемента $b \in \mathcal{B}_{i-1}$ мы имеем $b = \psi_*^i(a)$ для некоторого элемента $a \in \mathcal{A}_{i-1} \subset \pi_n(\mathbb{X}_{i-1,0})$, как следует из (3.32). Так как i -й инвариант Браудера–Ливси тривиален, то существует такой элемент $z \in \pi_n(\mathbb{F}_{i-1})$, что

$$\partial_{i-1}(b) = \partial_{i-1} \circ c_{i-1}(z), \quad (3.35)$$

как следует из условия $\partial_{i-1}\mathcal{B}_{i-1} \subset \partial_{i-1}\mathcal{C}_{i-1}$ в (3.23). Из точной последовательности (3.18) следует, что $\varphi_*^{i-1}(t) = 0$ и $f_{i-1}(z) = t \in \pi_n(\mathbb{X}_{i-1,0})$, следовательно,

$$\varphi_*^{i-1}(a - t) = \varphi_*^{i-1}(a) = x \in L_n(G_0).$$

По определению $\mathcal{A}_{i-1}$ в (3.28) мы получаем, что $a - t \in \mathcal{A}_{i-1}$. По предположению индукции мы имеем

$$\psi_*^{i-1}(a - t) \in \mathcal{B}_{i-1}, \quad (3.36)$$

как следует из (3.30). Теперь мы получаем

$$\partial_{i-1} \circ \psi_*^{i-1}(a - t) = \partial_{i-1} \circ \psi_*^{i-1}(a) - \partial_{i-1} \circ \psi_*^{i-1} \circ f_{i-1}(z) = \partial_{i-1}(b) - \partial_{i-1} \circ c_{i-1}(z) = 0, \quad (3.37)$$

используя (3.35) и определение c_{i-1} в (3.20). Из условий (3.36) и (3.37) мы получаем, что множество $\mathcal{B}'_{i-1}$, определяемое условием (3.21), не пусто. Теперь мы можем выписать коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n(\mathbb{X}_{i,0}) & \xrightarrow{\nu} & \pi_n(\mathbb{X}_{i-1,0}) & & \\ \downarrow \mu & & \downarrow \psi_*^{i-1,0} & & \\ \pi_n(\mathbb{X}_{i,i-1}) & \xrightarrow{s_{i-1}} & \pi_n(\mathbb{X}_{i-1,i-1}) & \xrightarrow{\partial_{i-1}} & LN_{n-i-1}(\rho_{i-1} \rightarrow G_{i-1}) \\ \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow = \\ LP_{n-i}(F_{i-1}) & \xrightarrow{s_{i-1}} & L_{n-i+1}(G_{i-1}) & \xrightarrow{\partial_{i-1}} & LN_{n-i-1}(\rho_{i-1} \rightarrow G_{i-1}) \end{array} \quad (3.38)$$

в которой нижняя строка является точной последовательностью из диаграммы (3.5). Поскольку $\partial_{i-1}(\mathcal{B}'_{i-1}) = 0$ и множество $\mathcal{B}'_{i-1}$ не пусто, множество

$$\mathcal{D}_{i-1} = (s_{i-1})^{-1}(\mathcal{B}'_{i-1}) \subset \pi_n(\mathbb{X}_{i,i-1})$$

определено и не пусто. Обозначим через $\mathcal{A}'_{i-1}$ подмножество множества $\mathcal{A}_{i-1}$, которое равно

$$((\psi_*^{i-1})^{-1}(\mathcal{B}'_{i-1})) \cap \mathcal{A}_{i-1} \subset \pi_n(\mathbb{X}_{i-1,0}). \quad (3.39)$$

Из (3.32) следует, что это множество не пусто. Таким образом, для квадрата (3.34) мы имеем

$$\begin{array}{ll} \mathcal{A}'_{i-1} \subset \pi_n(\mathbb{X}_{i-1,0}), & \mathcal{B}'_{i-1} \subset \pi_n(\mathbb{X}_{i-1,i-1}), \\ \psi_*^{i-1}(\mathcal{A}'_{i-1}) = \mathcal{B}'_{i-1}, & \mathcal{D}_{i-1} = (s_{i-1})^{-1}(\mathcal{B}'_{i-1}). \end{array} \quad (3.40)$$

Теперь из леммы 1 следует, что множество $\nu^{-1}(\mathcal{A}'_{i-1}) \subset \pi_n(\mathbb{X}_{i,0})$ определено и нетривиально. Поскольку $\emptyset \neq \mathcal{A}'_{i-1} \subset \mathcal{A}_{i-1} = (\varphi_*^{i-1})^{-1}(x)$, мы получаем, что

$$x \in \text{Im}(\varphi_*^{i-1} \circ \nu) = \text{Im } \varphi_*^i.$$

Теперь мы докажем обратное включение. Пусть $x \in \text{Im } \varphi_*^i$. Тогда мы имеем

$$\varphi_*^i(z) = \varphi_*^{i-1} \circ \nu(z) = \varphi_*^{i-1}(t) = x, \quad t = \nu(z), \quad (3.41)$$

следовательно, $x \in \text{Im } \varphi_*^{i-1}$. По предположению индукции $(i-1)$ -й инвариант Браудера–Ливси тривиален, и согласно (3.30) мы имеем

$$\mathcal{B}_{i-1} = \psi_*^{i-1}(\mathcal{A}_{i-1}). \quad (3.42)$$

Рассмотрим произвольный элемент $b \in \mathcal{B}_{i-1}$. Тогда согласно (3.42) и (3.28) мы имеем

$$b = \psi_*^{i-1}(a), \quad \varphi_*^{i-1}(a) = x. \quad (3.43)$$

Следовательно, согласно (3.41) и (3.43) мы получаем

$$\varphi_*^{i-1}(a - t) = \varphi_*^{i-1}(a) - \varphi_*^{i-1}(t) = x - x = 0. \quad (3.44)$$

Из точной последовательности (3.18) и условия (3.44) следует, что существует такой элемент $m \in \pi_n(\mathbb{F}_{i-1})$, что

$$f_{i-1}(m) = a - t \in \pi_n(\mathbb{X}_{i-1,0}). \quad (3.45)$$

Тогда согласно (3.38), (3.45) и определению c_{i-1} мы имеем

$$\partial_{i-1} \circ c_{i-1}(m) = \psi_*^{i-1} \circ f_{i-1}(m) = \partial_{i-1} \circ \psi_*^{i-1}(a - t) = \partial_{i-1}(b) - \partial_{i-1} \circ \psi_*^{i-1}(t). \quad (3.46)$$

Но (3.38) и (3.41) дают

$$\partial_{i-1} \circ \psi_*^{i-1}(t) = \partial_{i-1} \circ \psi_*^{i-1}(\nu(z)) = \partial_{i-1} \circ s_{i-1} \circ \mu(z) = 0, \quad (3.47)$$

так как $\partial_{i-1} \circ s_{i-1} = 0$. Теперь (3.46) и (3.47) дают $\partial_{i-1} \circ c_{i-1}(m) = \partial_{i-1}(b)$. Следовательно, $\mathcal{B}_{i-1} \subset \mathcal{C}_{i-1}$ и i -й инвариант Браудера–Ливси тривиален. Таким образом, утверждение i) теоремы доказано.

ii) Пусть для элемента $x \in L_n(G_0)$ i -й инвариант Браудера–Ливси тривиален. Используя предположение индукции, мы уже доказали в i), что множество $\mathcal{B}'_{i-1}$ не пусто. Напомним, что множества

$$\mathcal{A}_{i-1} = (\varphi_*^{i-1})^{-1}(x) \quad \text{и} \quad \mathcal{A}'_{i-1} \subset \mathcal{A}_{i-1} = ((\psi_*^{i-1})^{-1}(\mathcal{B}'_{i-1})) \cap \mathcal{A}_{i-1}$$

удовлетворяют условиям (3.39) и (3.40). Лемма 1 дает

$$\mu(\nu^{-1}(\mathcal{A}'_{i-1})) = s_{i-1}^{-1}(\mathcal{B}'_{i-1}).$$

Следовательно, мы получаем

$$\mathcal{B}_i \stackrel{\text{def}}{=} q_{i-1}(s_{i-1}^{-1}(\mathcal{B}'_{i-1})) = q_{i-1} \circ \mu(\nu^{-1}(\mathcal{A}'_{i-1})) = \psi_*^i(\nu^{-1}(\mathcal{A}'_{i-1})), \quad (3.48)$$

так как $q_{i-1} \circ \mu = \psi_*^i$. Из определения $\mathcal{A}_i$ в (3.28) и диаграммы (3.27) следует, что

$$\nu^{-1}(\mathcal{A}_{i-1}) = (\varphi_*^i)^{-1}(x) = \mathcal{A}_i. \quad (3.49)$$

В соответствии с (3.48) и (3.49) достаточно доказать, что

$$\nu^{-1}(\mathcal{A}_{i-1}) = \nu^{-1}(\mathcal{A}'_{i-1}).$$

Включение $\nu^{-1}(\mathcal{A}'_{i-1}) \subset \nu^{-1}(\mathcal{A}_{i-1})$ очевидно. Пусть теперь $x \in \nu^{-1}(\mathcal{A}_{i-1})$. Тогда мы имеем $s_{i-1} \circ \mu(x) \in \mathcal{B}_{i-1}$, следовательно, $s_{i-1} \circ \mu(x) \in \mathcal{B}'_{i-1}$, так как композиция $\partial_{i-1} \circ s_{i-1}$ тривиальна. Коммутативность квадрата (3.34) и определение $\mathcal{A}'_{i-1}$ влекут, что $x \in \nu^{-1}(\mathcal{A}'_{i-1})$. Таким образом, утверждение ii) теоремы доказано.

iii) Пусть для элемента $x \in L_n(G_0)$ i -й инвариант Браудера–Ливси тривиален. Тогда доказательство ii) влечет, что $\mathcal{B}_i$ определено и удовлетворяет условиям в (3.30). Пусть $\mathcal{B}_i$ тривиально. По определению это значит, что $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{C}_i$. Любой элемент $y \in \mathcal{B}_i$ может быть записан как

$$y = \psi_*^i(t), \quad \text{где } t \in \mathcal{A}_i = (\varphi_*^i)^{-1}(x). \quad (3.50)$$

Более того, существует такой элемент $z \in \pi_n(\mathbb{F}_i)$, что $c_i(z) = y$. Пусть $t_1 = f_i(z) \in \pi_n(\mathbb{X}_{i,0})$. Тогда мы имеем

$$\varphi_*^i(t_1) = \varphi_*^i \circ f_i(z) = 0, \quad (3.51)$$

как следует из точной последовательности (3.18). По определению отображения c_i мы получаем

$$\psi_*^i(t_1) = \psi_*^i \circ f_i(z) = c_i(z) = y. \quad (3.52)$$

Следовательно, (3.50) и (3.52) дают $\psi_*^i(t - t_1) = y - y = 0$ в $\pi_n(\mathbb{X}_{i,i}) = L_{n-i}(G_i)$. Из точной последовательности (3.26) следует, что существует элемент $m \in \pi_n(\mathbb{H}_i)$ с $t - t_1 = h_i(m) \in \pi_n(\mathbb{X}_{i,0})$. Теперь из (3.50) и (3.51) мы получаем

$$\varphi_*^i \circ h_i(m) = \varphi_*^i(t - t_1) = \varphi_*^i(t) - \varphi_*^i(t_1) = x - 0 = x,$$

следовательно, $x \in \text{Im}(\varphi_*^i \circ h_i)$.

Теперь мы докажем обратное утверждение. Пусть $x = \varphi_*^i \circ h_i(m)$, где $m \in \pi_n(\mathbb{H}_i)$. Рассмотрим произвольный элемент $y \in \mathcal{B}_i$. Тогда согласно (3.30) существует элемент $t \in \mathcal{A}_i$ со свойствами (3.50). Тогда

$$\varphi_*^i(t - h_i(m)) = \varphi_*^i(t) - \varphi_*^i \circ h_i(m) = x - x = 0.$$

Из точной последовательности (3.18) мы получаем, что

$$t - h_i(m) = f_i(z), \quad \text{где } z \in \pi_n(\mathbb{F}_i). \quad (3.53)$$

Теперь из (3.53), (3.50) и определения c_i следует, что

$$c_i(z) = \psi_*^i \circ f_i(z) = \psi_*^i(t - h_i(m)) = \psi_*^i(t) - \psi_*^i \circ h_i(m) = \psi_*^i(t) = y,$$

так как $\psi_*^i \circ h_i = 0$ согласно (3.26). Следовательно, $y \in \mathcal{C}_i$ и утверждение iii) теоремы доказано.

Наше определение итерированных инвариантов Браудера–Ливси является естественным обобщением определения, данного в [7]–[9]. Фактически, определение из [8] и [9] соответствует специальному случаю фильтрации (3.1). В этом случае все квадраты F_{2i} совпадают с квадратом F_0 , а все квадраты F_{2i+1} совпадают с квадратом $F_1 = F_0^-$, где F_0^- обозначает квадрат F_0 с противоположной ориентацией на группах G_0 и G_1 вне образа вертикальных отображений. В частности, мы получаем изоморфизмы $G_0 \cong G_{2i}$ и $G_1 \cong G_{2i+1}$ ориентированных групп. Инварианты A и B из [7] совпадают с первыми двумя инвариантами Браудера–Ливси нашего определения. Заметим также, что в [7] достаточно рассматривать инварианты Браудера–Ливси фильтрации, состоящей из тройки многообразий.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элемент $x \in L_n(G_0)$ называется *элементом первого типа относительно фильтрации $\mathcal{X}$* , если некоторый инвариант Браудера–Ливси этого элемента относительно фильтрации $\mathcal{X}$ нетривиален (см. также [8] и [9]).

Рассмотрим бесконечную последовательность квадратов F_j , $j \geq 0$, аналогичных (3.3). Как и выше, будем предполагать, что левая нижняя группа квадрата F_{i-1} совпадает с правой нижней группой квадрата F_i (как группы с ориентацией). Напомним, что во всех квадратах вертикальные отображения являются вложениями индекса 2, верхние горизонтальные отображения – изоморфизмы, сохраняющие ориентацию, а нижние горизонтальные отображения изменяют ориентацию вне образов вертикальных отображений. Теперь мы можем выписать бесконечную диаграмму ориентированных групп

$$\begin{array}{ccccc} & & \rho_1 & & \rho_0 \\ & \swarrow & & \searrow & \swarrow & \searrow \\ \dots & & G_2 & \xrightarrow{\cong} & G_1 & \xrightarrow{\cong} & G_0 \end{array} \quad (3.54)$$

Диаграмма (3.54) является коммутативной как диаграмма групп. Все отображения $\rho_i \rightarrow G_i$ и $\rho_i \rightarrow G_{i+1}$ в (3.54) являются вложениями индекса 2 ориентированных групп, а горизонтальные отображения сохраняют ориентацию на образе вертикальных отображений и обращают ее вне этих образов.

Алгебраическая версия диаграммы (2.1) построена в [18]. Следовательно, каждый треугольник

$$\begin{array}{ccc} & \rho_i & \\ \swarrow & & \searrow \\ G_{i+1} & \xrightarrow{\cong} & G_i \end{array} \quad (3.55)$$

из диаграммы (3.54) задает диаграмму для вложения $\rho_i \rightarrow G_i$, аналогичную (2.1).

Теперь, используя диаграмму (3.54), мы можем записать бесконечную в нижнем направлении диаграмму $\mathcal{D}$, которая аналогична диаграмме (3.5). Как и раньше, используя реализацию диаграммы (2.1) на уровне спектров и конструкцию диаграммы (3.16), мы по диаграмме $\mathcal{D}$ строим следующую бесконечную гомотопически коммутативную диаграмму универсально-отталкивающих квадратов:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathbb{X}_{0,0} & & \\ & & & & \nearrow & & \\ & & & \mathbb{X}_{1,0} & \searrow & & \\ & & \nearrow & & \mathbb{X}_{1,1} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \nearrow & & \\ \dots & \mathbb{X}_{2,0} & & \mathbb{X}_{2,1} & & \mathbb{X}_{2,2} & \\ & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & & \\ & \dots & & \dots & & \dots & \end{array} \quad (3.56)$$

где

$$\mathbb{X}_{k,k} = \Sigma^k \mathbb{L}(G_k), \quad \mathbb{X}_{k+1,k} = \Sigma^{k+1} \mathbb{L}P(F_k), \quad \mathbb{X}_{k,k+1} = \Sigma^k \mathbb{L}(\rho_k \rightarrow G_k) \quad \text{для } k \geq 0.$$

Для $r \geq 3$ и $r - s \geq 3$ спектры $\mathbb{X}_{r,s}$ из (3.56) входят в универсально-отталкивающие квадраты

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}_{r,s} & \longrightarrow & \mathbb{X}_{r-1,s} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{X}_{r,s+1} & \longrightarrow & \mathbb{X}_{r-1,s+1} \end{array}$$

Диаграмма (3.56) дает возможность, аналогично фильтрации $\mathcal{X}$, определить *итерированные инварианты Браудера–Ливси элемента* $x \in L_n(G_0)$ *относительно бесконечной диаграммы* (3.54).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для любого натурального числа i мы можем индуктивно определить i -й инвариант Браудера–Ливси элемента $x \in L_n(G_0)$ относительно диаграммы (3.54) и множества $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}'_i$ точно так же, как в определении 1 для фильтрации $\mathcal{X}$. Утверждение теоремы 1 также корректно в этом случае, но уже без ограничения размерности $i \leq k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Элемент $x \in L_n(G_0)$ называется *элементом первого типа относительно диаграммы* (3.54), если некоторый инвариант Браудера–Ливси этого элемента относительно диаграммы (3.54) нетривиален.

Рассмотрим бесконечную фильтрацию спектров (см. [12] и [21])

$$\cdots \rightarrow \mathbb{X}_{3,0} \rightarrow \mathbb{X}_{2,0} \rightarrow \mathbb{X}_{1,0} \rightarrow \mathbb{X}_{0,0}, \quad (3.57)$$

входящую в диаграмму (3.56).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть фильтрация (3.57) построена по бесконечной диаграмме групп в (3.54). Элемент $x \in L_n(G_0)$ является элементом первого типа относительно диаграммы (3.54) тогда и только тогда, когда найдется такое число $k \geq 1$, что $x \notin \text{Im } \varphi_*^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат следует из теоремы 1 для рассматриваемого случая.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $x \in L_n(G_0)$ является элементом первого типа относительно некоторой диаграммы, аналогичной (3.54). Тогда x не может быть реализован нормальным отображением замкнутых многообразий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из предложения 2 и теоремы 4.4 из [12] (см. также [8] и [9]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $x \in L_n(G_0)$ и все инварианты Браудера–Ливси элемента x относительно диаграммы (3.54) тривиальны. Тогда элемент $x \in L_n(\pi)$ является элементом второго типа относительно диаграммы (3.54) тогда и только тогда, когда множества $\mathcal{B}_j$ определены и нетривиальны для всех $j \geq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть элемент $x \in L_n(G_0)$ является элементом второго типа относительно диаграммы (3.54). Тогда x не может быть реализован нормальным отображением замкнутых многообразий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [8] и [9].

Отметим, что все спектры, входящие в диаграмму (3.16), и спектры $\mathbb{F}_i$ в (3.17) имеют очень ясный геометрический смысл (см. [12], [24]–[26]). Фильтрация $\mathcal{X}$ в (3.1) является стратифицированным многообразием в смысле Браудера–Квинна, и в [13] определены группы Браудера–Квинна $L_n^{BQ}(\mathcal{X})$ препятствий к перестройкам (см. также [12], [14], [25] и [26]). Сделав нормальное отображение $(f, b): M \rightarrow X$ трансверсальным всем подмногообразиям фильтрации $\mathcal{X}$ и взяв трансверсальные прообразы $M_i = f^{-1}(X_i)$, мы получим фильтрацию $\mathcal{M}$ многообразия M и t -триангуляцию фильтрации $\mathcal{X}$. По определению t -триангуляция $(f, b): M \rightarrow X$ является s -триангуляцией фильтрации $\mathcal{X}$, если все нормальные отображения пар

$$f|_{(M_j, M_l)}: (M_j, M_l) \rightarrow (X_j, X_l), \quad 0 \leq j < l \leq k,$$

являются s -триангуляциями. Группа Браудера–Квинна $L_{n_k}^{BQ}(\mathcal{X})$, $n_k = \dim X_k$, является группой препятствий к существованию s -триангуляции фильтрации $\mathcal{X}$ в классе нормального бордизма t -триангуляции (f, b) многообразия X (см. [12]–[14], [25] и [26]). Эти группы реализуются спектром $\mathbb{L}^{BQ}(\mathcal{X})$ [14]. Для $0 \leq i \leq j \leq k$ определена подфильтрация $X_j \subset X_{j-1} \subset \dots \subset X_{i+1} \subset X_i$, которую мы обозначим через $\mathcal{X}_j^i$. Для этой фильтрации мы также имеем спектры $\mathbb{L}^{BQ}(\mathcal{X}_j^i)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [26]. Простая гомотопическая эквивалентность $f: M \rightarrow X$ *расщепляется вдоль подфильтрации* $\mathcal{X}_k^1$, если отображение f гомотопно отображению g , трансверсальному всем подмногообразиям фильтрации и такому, что его ограничения на все пары подмногообразий фильтрации $\mathcal{M}$ являются s -триангуляциями.

Группа $LSF_{n_k}(\mathcal{X})$ препятствий к расщеплению простой гомотопической эквивалентности $f: M \rightarrow X$ вдоль подфильтрации $\mathcal{X}^1$ определена в [26]. Группа $LSF_*(\mathcal{X})$ реализуется спектром $\mathbb{L}SF(\mathcal{X})$, входящим в корасслоение [26]

$$\Sigma^k \mathbb{L}SF(\mathcal{X}) \rightarrow \Sigma^k \mathbb{L}^{BQ}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathbb{L}(\pi_1(X_0)), \quad (3.58)$$

где Σ – функтор надстройки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для спектров, входящих в диаграмму (3.16), имеют место гомотопические эквивалентности

$$\mathbb{X}_{j,i} \simeq \Sigma^j \mathbb{L}^{BQ}(\mathcal{X}_j^i), \quad 0 \leq i \leq j \leq k.$$

Корасслоение в (3.17) совпадает с корасслоением

$$\Sigma^i \mathbb{L}SF(\mathcal{X}_i^0) \rightarrow \Sigma^i \mathbb{L}^{BQ}(\mathcal{X}_i^0) \rightarrow \mathbb{L}(\pi_1(X_0)), \quad 0 < i \leq k,$$

которое аналогично корасслоению в (3.58).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [12] и [26].

4. Ограничение нормального отображения на подмногообразии. Методы, которые используют инварианты Браудера–Ливси, имеют много геометрических и алгебраических применений (см. [1], [5], [9], [10], [12], [27]–[33]). В этом пункте мы используем результаты п. 3 для исследования ограничений нормальных отображений (простых гомотопических эквивалентностей) на подмногообразия.

Сначала мы напомним некоторые необходимые результаты из работы [34]. Пусть (X^n, Y^{n-q}) – топологическая пара многообразий [2] и $\mathcal{S}_{n+1}(X, Y, \xi)$ – множество

классов конкордантности s -триангуляций этой пары, где ξ – топологическое нормальное расслоение Y в X [2]. Как и прежде, мы предполагаем, что $n - q \geq 5$. Пусть $(f, b): M \rightarrow X$ – нормальное отображение, которое трансверсально к подмногообразию Y с $N = f^{-1}(Y)$ и для которого $f|_N: N \rightarrow Y$ является простой гомотопической эквивалентностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [34]. Два таких отображения $f_i: M_i \rightarrow X$, $i = 1, 2$, с $N_i = f_i^{-1}(Y)$ эквивалентны, если существует нормальный бордизм $F: W \rightarrow X$ со следующими свойствами:

- i) $\partial W = M_1 \cup M_2$ и $F|_{M_i} = f_i$, $i = 1, 2$;
- ii) F трансверсально Y с $F^{-1}(Y) = V$ и $\partial V = N_1 \cup N_2$;
- iii) ограничение $F|_V$ является s -кобордизмом между $F|_{N_i} = f_i$, $i = 1, 2$.

Множество классов эквивалентности таких отображений будем обозначать через $\mathcal{NS}_n^s(X, Y)$.

Имеются естественные отображения [34]

$$\begin{aligned} \mathcal{NS}_n^s(X, Y) &\rightarrow [X, G/TOP], & \mathcal{NS}_n^s(X, Y) &\rightarrow \mathcal{S}_{n-q}^s(Y), \\ \mathcal{S}_{n+1}^s(X, Y, \xi) &\rightarrow \mathcal{NS}_n^s(X, Y), & L_{n-q+1}(\pi_1(Y)) &\xrightarrow{\lambda} \mathcal{NS}_n^s(X, Y), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где отображение λ является действием [34]. Структурное множество $\mathcal{NS}_*^s(X, Y)$ тесно связано со структурами смешанного типа на многообразии с границей (см. [1; с. 116], [35] и [36]). Все отображения в (4.1) реализуются отображениями спектров [34]

$$\begin{aligned} \mathbb{NS}(X, Y) &\rightarrow X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet, & \Omega^q \mathbb{NS}(X, Y) &\rightarrow \mathbb{S}(Y), \\ \Omega \mathbb{S}(X, Y, \xi) &\rightarrow \mathbb{NS}(X, Y), & \mathbb{L}(\pi_1(Y)) &\rightarrow \Omega^{n+q-1} \mathbb{NS}(X, Y) \end{aligned} \quad (4.2)$$

с

$$\begin{aligned} \pi_m(X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) &= H_m(Y; \mathbf{L}_\bullet), & \pi_m(\mathbb{NS}(X, Y)) &= NS_m(X, Y), \\ \pi_m(\mathbb{S}(Y)) &= S_m(Y), & \pi_m(\mathbb{S}(X, Y, \xi)) &= S_m(X, Y, \xi). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Кроме того, имеют место изоморфизмы (см. [1], [2] и [34])

$$\begin{aligned} H_n(Y; \mathbf{L}_\bullet) &\cong [X, G/TOP], & \mathcal{NS}_n^s(X, Y) &\cong NS_n(X, Y), \\ \mathcal{S}_{n-q}^s(Y) &\cong S_{n-q}(Y), & \mathcal{S}_{n+1}^s(X, Y, \xi) &\cong S_{n+1}(X, Y, \xi). \end{aligned} \quad (4.4)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть коразмерность $q \geq 3$. Тогда имеет место следующая коса точных последовательностей:

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & L_{n-q+1}(\pi_1(Y)) & \xrightarrow{\quad} & NS_n(X, Y) & \xrightarrow{\quad} & L_n(\pi_1(X)) & \rightarrow \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ & & S_{n+1}(X, Y, \xi) & & & H_n(X, \mathbf{L}_\bullet) & \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ \rightarrow & L_{n+1}(\pi_1(X)) & \xrightarrow{\quad} & S_{n+1}(X) & \xrightarrow{\quad} & L_{n-q}(\pi_1(Y)) & \rightarrow \end{array} \quad (4.5)$$

которая реализуется на уровне спектров.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индуцированное вложением отображение $\pi_1(X \setminus Y) \rightarrow \pi_1(X)$ – изоморфизм, так как коразмерность $q \geq 3$. Следовательно, индуцированное отображение спектров $\mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y)) \rightarrow \mathbb{L}(\pi_1(X))$ является простой гомотопической эквивалентностью. Отсюда и из гомотопически коммутативной диаграммы (22) из [34]

мы получаем универсально-отталкивающий квадрат спектров

$$\begin{array}{ccc} \Omega\mathbb{S}(X, Y, \xi) & \longrightarrow & \mathbb{N}\mathbb{S}(X, Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega\mathbb{S}(X) & \longrightarrow & (X_+ \wedge \mathbf{L}_\bullet) \end{array} \quad (4.6)$$

в котором кослои горизонтальных отображений естественно гомотопически эквивалентны $\mathbb{L}(\pi_1(X))$, а кослои вертикальных отображений естественно гомотопически эквивалентны $\mathbb{L}(\pi_1(Y))$. Гомотопические длинные точные последовательности отображений из (4.6) дают косу точных последовательностей (4.5).

Пусть

$$(f, b): M \rightarrow X \quad (4.7)$$

– нормальное отображение замкнутых многообразий с препятствием к перестройке $\sigma_n(f, b) = x \in L_n(\pi_1(X))$. Обозначим через $f|_N$ ограничение f на трансверсальный прообраз $N = f^{-1}(Y)$, и пусть $\sigma_{n-q}(f|_N) = y \in L_{n-q}(\pi_1(Y))$ – соответствующее препятствие к перестройке.

СЛЕДСТВИЕ 2. *В предположениях, сформулированных выше, элемент x реализуется нормальным отображением $g: M_0 \rightarrow X$, ограничение которого на трансверсальный прообраз Y является простой гомотопической эквивалентностью, тогда и только тогда, когда элемент y реализуется как препятствие к перестройкам $\sigma_{n-q}(h|_N)$, где $h|_N$ – ограничение простой гомотопической эквивалентности $h: M_1 \rightarrow X$ на трансверсальный прообраз Y .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нормальное отображение f задает элемент z в $H_n(X, \mathbf{L}_\bullet)$, который отображается в x и y отображениями из диаграммы (4.5). Теперь диаграммный поиск в (4.5), геометрическое описание отображений в (4.1) [34] и изоморфизмы в (4.4) завершают доказательство.

Рассмотрим фильтрацию Браудера–Ливси $\mathcal{X}$ в (3.1) и нормальное отображение (4.7) с препятствием к перестройке x , как выше. Мы можем предполагать, что отображение f является t -триангуляцией фильтрации $\mathcal{X}$, и обозначим через f_k ограничение $f|_{M_k}$, где $M_k = f^{-1}(X_k)$. Пусть множество $\mathcal{B}_{k-1}$ определено и нетривиально. Сейчас мы опишем геометрическое условие на отображение f , которое обеспечивает тривиальность множества $\mathcal{B}_k$ из определения 1.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть препятствие $y = \sigma_{n-k}(f_k) \in L_{n-k}(\pi_1(X_k))$ реализуется как препятствие $\sigma_{n-q}(h_k)$, где h_k – ограничение простой гомотопической эквивалентности $h: N \rightarrow X$ на трансверсальный прообраз X_k . Тогда множество $\mathcal{B}_k$ тривиально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} S_{n+1}(X) & \longrightarrow & H_n(X, \mathbf{L}_\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ LSF_{n-k}(\mathcal{X}) & \longrightarrow & L_{n-k}^{BQ}(\mathcal{X}) \end{array} \quad (4.8)$$

которая следует из теоремы 2 работы [26]. Нормальное отображение f задает элемент в $H_n(X, \mathbf{L}_\bullet)$, и отображения из $H_n(X, \mathbf{L}_\bullet)$ в $L_n(\pi_1(X))$ и в $L_{n-k}(\pi_1(X_{n-k}))$ пропускаются через отображения

$$H_n(X, \mathbf{L}_\bullet) \rightarrow L_{n-k}^{BQ}(\mathcal{X})$$

из (4.8). Простая гомотопическая эквивалентность h задает элемент из $S_{n+1}(X)$, который отображается в y посредством композиции

$$S_{n+1}(X) \rightarrow LSF_{n-k}(\mathcal{X}) \rightarrow L_{n-k}^{BQ}(\mathcal{X}) \rightarrow L_{n-k}(\pi_1(X_k)).$$

Пусть $\mathbb{A}_i$ – гомотопический кослой композиции

$$\mathbb{H}_i \rightarrow \mathbb{X}_{i,0} \rightarrow \mathbb{X}_{0,0} = \mathbb{L}(\pi_1(X)).$$

Согласно [33] спектр $\mathbb{A}_i$ совпадает с кослом композиции

$$\mathbb{F}_i \rightarrow \mathbb{X}_{i,0} \rightarrow \mathbb{X}_{i,i} = \Omega^{-k}\mathbb{L}(\pi_1(X_k)),$$

и мы имеем коммутативную косу точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \pi_n(\mathbb{H}_k) & \longrightarrow & L_n(\pi_1(X)) & \longrightarrow & LSF_{n-k-1}(\mathcal{X}) & \longrightarrow \\ & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ & & L_{n-k}^{BQ}(\mathcal{X}) & & \pi_n(\mathbb{A}_k) & & \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\ \longrightarrow & LSF_{n-k}(\mathcal{X}) & \longrightarrow & L_{n-k}(\pi_1(X_k)) & \longrightarrow & \pi_{n-1}(\mathbb{H}_k) & \longrightarrow \end{array} \quad (4.9)$$

Таким образом, мы получили, что элемент y лежит в образе отображения

$$LSF_{n-k}(\mathcal{X}) \rightarrow L_{n-k}(\pi_1(X_k))$$

из (4.9). Теперь диаграммный поиск в (4.9) показывает, что x лежит в образе отображения

$$\pi_n(\mathbb{H}_k) \rightarrow L_n(\pi_1(X)),$$

и утверждение теоремы следует из теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Мы можем переформулировать эту теорему следующим образом. Пусть множество $\mathcal{B}_k$ нетривиально. Тогда препятствие $y = \sigma_{n-k}(f_k) \in L_{n-k}(\pi_1(X_k))$ не может быть реализовано как препятствие к перестройкам $\sigma_{n-q}(h_k)$, где h_k – ограничение простой гомотопической $h: N \rightarrow X$ на трансверсальный прообраз X_k .

Теперь рассмотрим элемент $x \in L_{n+1}(G_0)$ второго типа относительно бесконечной диаграммы (3.54). Для любого натурального числа k существует замкнутое многообразие X^n и фильтрация Браудера–Ливси $\mathcal{X}$ в (3.1), которая порождает конечную часть

$$\begin{array}{ccc} & \rho_{k-1} & \\ \swarrow & & \searrow \\ G_k & \xrightarrow{\cong} & G_{k-1} \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{ccc} & \rho_0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ G_1 & \xrightarrow{\cong} & G_0 \end{array} \quad (4.10)$$

диаграммы (3.54) (см. [12]). Мы можем представить элемент $x \in L_{n+1}(G_0)$ в смысле Уолла [1] посредством степени 1 нормального отображения

$$(F, B): (W^{n+1}, \partial_0 W, \partial_1 W) \rightarrow (X \times I, X \times \{0\}, X \times \{1\}),$$

где $\partial_0 W = X$, $F|_{\partial_0 W} = \text{Id}$, $f = F|_{\partial_1 W}: \partial_1 W \rightarrow X$ является простой гомотопической эквивалентностью и $\sigma(F, B) = x \in L_{n+1}(G_0)$. Построение и тривиальность всех инвариантов Браудера–Ливси элемента x обеспечивают, что отображение f гомотопно некоторой s -триангуляции фильтрации $\mathcal{X}$ на верхней границе $X \times I$. Следовательно, мы можем считать, что f является s -триангуляцией фильтрации $\mathcal{X} \times \{1\}$ с трансверсальными прообразами $M_i = f^{-1}(X_i \times \{1\})$. Пусть $W_i = F^{-1}(X_i \times I)$ – трансверсальный прообраз $X_i \times I$. Ограничение $F|_{W_i}: W_i \rightarrow (X_i \times I)$ является тождественным на нижнем основании и простой гомотопической эквивалентностью на верхнем. Следовательно, определено препятствие $y_i \in \sigma_{n+1-i}(F|_{W_i}) \in L_{n+1-i}(\pi_1(X_i))$. Это препятствие лежит в множестве $\mathcal{B}_i$, которое нетривиально.

ТЕОРЕМА 4. *В сделанных выше предположениях, для любого $0 \leq i \leq k$ элемент $y_i \in L_{n+1-i}(\pi_1(X_i))$ действует нетривиально на множество $\mathcal{S}_i^s(X_i)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что y_i действует тривиально на $\mathcal{S}_i^s(X_i)$. Тогда согласно [16] элемент y_i реализуется нормальным отображением замкнутых многообразий. Следовательно, для элемента y_i найдется множество $\mathcal{B}'_i$, которое будет тривиально. Теперь по определению 1 и теореме 1 мы получаем, что множество $\mathcal{B}_{l+i}$ элемента x будет тривиально. Мы получили противоречие, и теорема доказана.

Интересно сравнить этот результат с теоремой 1 из [19].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. T. C. Wall, *Surgery on Compact Manifolds*, Math. Surveys Monogr., **69**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [2] A. Ranicki, *Exact Sequences in the Algebraic Theory of Surgery*, Math. Notes, **26**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.
- [3] A. Ranicki, “The total surgery obstruction”, *Algebraic Topology, Aarhus 1978*, Lecture Notes in Math., **763**, Springer-Verlag, Berlin, 1979, 275–316.
- [4] A. A. Ranicki, *Algebraic L-Theory and Topological Manifolds*, Cambridge Tracts in Math., **102**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [5] *Novikov Conjectures, Index Theorems and Rigidity*, Vol. 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **226**, eds. S. C. Ferry, A. Ranicki, J. Rosenberg; Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **227**, eds. S. C. Ferry, A. Ranicki, J. Rosenberg, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [6] I. Hambleton, R. J. Milgram, L. Taylor, B. Williams, “Surgery with finite fundamental group”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **56**:2 (1988), 349–379.
- [7] I. Hambleton, “Projective surgery obstructions on closed manifolds”, *Algebraic K-Theory, Part II*, Lecture Notes in Math., **967**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1982, 101–131.
- [8] А. Ф. Харшиладзе, “Итерированные инварианты Браудера–Ливси и узинг-проблема”, *Матем. заметки*, **41**:4 (1987), 557–563.
- [9] А. Ф. Харшиладзе, “Перестройка многообразий с конечными фундаментальными группами”, *УМН*, **42**:4 (1987), 55–85.
- [10] C. T. C. Wall, “Formulae for surgery obstructions”, *Topology*, **15**:3 (1976), 189–210; “Formulae for surgery obstructions: corrigendum”, *Topology*, **16**:4 (1977), 495–496.
- [11] Ю. В. Муранов, Р. Хименез, “Отображения трансфера для троек многообразий”, *Матем. заметки*, **79**:3 (2006), 420–433.

- [12] Ю. В. Муранов, Д. Реповш, Р. Хименез, “Спектральная последовательность в теории перестроек и многообразия с фильтрацией”, Тр. ММО, **67**, УРСС, М., 2006, 294–325.
- [13] W. Browder, F. Quinn, “A surgery theory for G -manifolds and stratified sets”, *Manifolds* (Tokyo, 1973), Univ. Tokyo Press, Tokyo, 1975, 27–36.
- [14] S. Weinberger, *The Topological Classification of Stratified Spaces*, Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1994.
- [15] W. Browder, G. R. Livesay, “Fixed point free involutions on homotopy spheres”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 242–245.
- [16] S. E. Cappell, J. L. Shaneson, “Pseudo-free actions. I”, *Algebraic Topology*, Aarhus 1978, Lecture Notes in Math., **763**, Springer-Verlag, Berlin, 1979, 395–447.
- [17] Ю. В. Муранов, “Задача расщепления”, *Отображения и размерность*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Павла Сергеевича Александрова, Тр. МИАН, **212**, Наука, М., 1996, 123–146.
- [18] A. Ranicki, “The L -theory of twisted quadratic extensions”, *Canad. J. Math.*, **39**:2 (1987), 345–364.
- [19] А. Ф. Харшиладзе, “Расщепления вдоль систем подмногообразий”, *Матем. сб.*, **125**:2 (1984), 280–286.
- [20] I. Hambleton, A. Ranicki, L. Taylor, “Round L -theory”, *J. Pure Appl. Algebra*, **47**:2 (1987), 131–154.
- [21] И. Хэмблтон, А. Ф. Харшиладзе, “Спектральная последовательность в теории перестроек”, *Матем. сб.*, **183**:9 (1992), 3–14.
- [22] А. Бак, Ю. В. Муранов, “Расщепление вдоль подмногообразий и L -спектры”, *Топология, анализ и смежные вопросы*, Материалы международной конференции, посвященной шестидесятилетию профессора А. С. Мищенко (28–31 августа 2001, Москва), Современная математика и ее приложения, **1**, Ин-т кибернетики АН Грузии, Тбилиси, 2003, 3–18; англ. пер.: A. Bak, Yu. V. Muranov, “Splitting along submanifolds and L -spectra”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **123**:4 (2004), 4169–4184.
- [23] R. M. Switzer, *Algebraic Topology – Homotopy and Homology*, Grundlehren Math. Wiss., **212**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1975.
- [24] Ю. В. Муранов, Д. Реповш, Ф. Спаггиари, “Перестройка троек многообразий”, *Матем. сб.*, **194**:8 (2003), 139–160.
- [25] A. Cavicchioli, Yu. V. Muranov, F. Spaggiari, *On the elements of the second type in surgery groups*, Preprint no. 111, Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 2006.
- [26] Э. Бак, Ю. В. Муранов, “Расщепление простой гомотопической эквивалентности вдоль подмногообразия с фильтрацией”, *Матем. сб.*, **199**:6 (2008), 3–26.
- [27] S. López de Medrano, *Involutions on Manifolds*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **59**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.
- [28] Ю. В. Муранов, А. Ф. Харшиладзе, “Группы Браудера–Ливси абелевых 2-групп”, *Матем. сб.*, **181**:8 (1990), 1061–1098.
- [29] P. M. Akhmetiev, A. Cavicchioli, D. Repovš, “On realization of splitting obstructions in Browder–Livesay groups for closed manifold pairs”, *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)*, **43**:1 (2000), 15–25.
- [30] H. K. Mukerjee, “Classification of homotopy Dold manifolds”, *New York J. Math.*, **9** (2003), 271–293.
- [31] A. Cavicchioli, Yu. V. Muranov, F. Spaggiari, “Relative groups in surgery theory”, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, **12**:1 (2005), 109–135.
- [32] П. М. Ахметьев, “ K_2 для простейших целочисленных групповых колец и топологические приложения”, *Матем. сб.*, **194**:1 (2003), 23–30.
- [33] Ю. В. Муранов, “Группы препятствий к расщеплению и квадратичные расширения антиструктур”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:6 (1995), 107–132.
- [34] Э. Бак, Ю. В. Муранов, “Нормальные инварианты пар многообразий и сигнатурные отображения”, *Матем. сб.*, **197**:6 (2006), 3–24.

- [35] A. Cavicchioli, Yu. V. Muranov, F. Spaggiari, “Mixed structures on a manifold with boundary”, *Glasg. Math. J.*, **48**:1 (2006), 125–143.
- [36] M. Cencelj, Yu. V. Muranov, D. Repovš, “On the splitting problem for manifold pairs with boundaries”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **76**:1 (2006), 35–55.

А. Кавиччоли

Università di Modena e Reggio Emilia, Италия

E-mail: cavicchioli.alberto@unimo.it

Поступило

20.02.2008

Исправленный вариант

01.07.2008

Ю. В. Муранов

Universidad Tecnológica de la Mixteca, Мексика,

Институт новых технологий образования, Москва

E-mail: ymuranov@mixteco.utm.mx, ymuranov@mail.ru

Ф. Спаггиари

Università di Modena e Reggio Emilia, Италия

E-mail: spaggiari.fulvia@unimo.it

Ф. Хегенбарт

Università di Milano, Италия

E-mail: hegenbar@mat.unimi.it