Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, Ю. И. Любич, Семейство кватернионных норм с группой изометрий $\mathbb{Z}_2$ в общем положении, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 2, 310–313

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 10:15:25

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Семейство кватернионных норм с группой изометрий $\mathbb{Z}_2$ в общем положении

Р. С. Исмагилов, Ю. И. Любич

1. Введение. Рассмотрим классическое тело кватернионов $\mathbb{H}$ и обозначим через $\mathbb{H}^n$ пространство всех столбцов $x = (x_1, \dots, x_n)'$, $x_s \in \mathbb{H}$ (штрих над матрицей означает транспонирование). Введя в $\mathbb{H}^n$ умножение справа (для определенности) на элементы из $\mathbb{H}$, мы получаем (правое) $\mathbb{H}$ -линейное пространство. Введем также пространство $\mathbb{H}_N^n$ всех кватернионных матриц размера $N \times n$. Если мы снабдим пространство $\mathbb{H}^n$ стандартной l_p -нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}, \quad p \geq 1, \quad (1)$$

то группа линейных изометрий пространства $\mathbb{H}^n$ относительно нормы (1) окажется бесконечной. Действительно, эта норма сохраняется при преобразованиях

$$x_k \mapsto \alpha_k x_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}, \quad |\alpha_k| = 1.$$

(Заметим, что эти преобразования $\mathbb{H}$ -линейны, в отличие от своих правых аналогов.) Для достижения цели, указанной в названии статьи, возьмем матрицу $A \in \mathbb{H}_N^n$ такую, что отображение $x \mapsto Ax$, $x \in \mathbb{H}^n$, имеет нулевое ядро (для этого достаточно обратимости некоторой подматрицы размера $n \times n$), и введем в $\mathbb{H}^n$ норму более общего вида равенством

$$\|x\|_{A,p} = \|Ax\|_p. \quad (2)$$

В докладе Ю. И. Любича (WONRA-6, Бремен, 15–17 июля, 2006) была указана матрица A , для которой группа таких преобразований конечна при любом

$$p > 1, \quad p \notin \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Затем в работе [1] был несколько усовершенствован выбор матрицы A ; при таком выборе группа $\mathbb{H}$ -линейных изометрий относительно нормы (2) (для любого p с условием (3)) свелась к $Z_2 = \{\text{id}, -\text{id}\}$ (здесь id означает тождественное преобразование).

В предлагаемой заметке мы покажем, что это последнее свойство выполняется для “почти всех” норм вида (2). Точная формулировка содержится в нижеследующей теореме.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-91209ЯФ_а).

2. Описание результата. Для дальнейшего введем следующие понятия. Будем называть функцию $P: \mathbb{H}_N^n \rightarrow \mathbb{R}$ *полиномиальной*, если $P(A)$ выражается полиномиально через координаты (относительно базиса из стандартных кватернионных единиц) матричных элементов матрицы A . *Рациональной* функцией назовем отношение двух полиномиальных. Далее, скажем, что некоторое условие выполняется для *типичной* матрицы $A \in \mathbb{H}_N^n$, если существует такая ненулевая полиномиальная функция $P: \mathbb{H}_N^n \rightarrow \mathbb{R}$, что указанное условие выполняется при $P(A) \neq 0$.

Нам понадобится следующий простой факт из “линейной алгебры над кватернионами”. Для типичной матрицы $A \in \mathbb{H}_n^n$ существует двусторонне обратная матрица A^{-1} , причем для любого элемента матрицы A^{-1} его координаты в стандартном базисе из кватернионных единиц являются рациональными функциями от элементов матрицы A . Вычисление матрицы A^{-1} сводится к решению системы линейных уравнений $Ax = b$, $(x, b \in \mathbb{H}^n)$. Стандартный метод Гаусса решения систем линейных уравнений над полем (последовательное исключение неизвестных) переносится (с очевидными модификациями) на кватернионы.

Сформулируем теперь основной результат статьи.

ТЕОРЕМА. Пусть $n > 2$, $N > n + 1$. Тогда для типичной матрицы $A \in \mathbb{H}_N^n$ любая линейная изометрия пространства $\mathbb{H}^n$ относительно нормы (2) (при выполнении условий (3)) есть одно из преобразований $\pm \text{id}$.

Таким образом, нужное нам свойство нормы (2) имеет место на открытом по Зарискому подмножестве из $\mathbb{H}_N^n$.

Легко видеть, что при $N = n$ для любой обратимой матрицы группа линейных изометрий относительно нормы (2) бесконечна. Менее тривиально то, что это верно (для типичной матрицы) также при $T = n + 1$; мы не доказываем это утверждение.

3. Доказательство теоремы. В дальнейшем мы обозначаем через A_i^j элементы матрицы A (здесь i – это номер строки, j – номер столбца); через A_i обозначим i -ю строку этой матрицы. Если дана цепочка чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $1 \leq \alpha_i \leq N$, то через A_α обозначается матрица, составленная из строк $A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_k}$, идущих сверху вниз в указанном порядке.

Мы используем следующую лемму, доказательство которой приведено в работе [1]; см. также [2]–[4].

ЛЕММА 1. Пусть два семейства неотрицательных квадратичных форм $(f_k(x))_1^N$ и $(g_k(x))_1^N$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^N (f_k(x))^\gamma = \sum_{k=1}^N (g_k(x))^\gamma, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

для некоторого $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$, $2\gamma \notin \mathbb{Z}$. Пусть формы f_k попарно непропорциональны и таковы же формы g_k . Тогда семейство $(g_k)_1^N$ получается перестановкой семейства $(f_k)_1^N$.

Следующий элементарный факт также использован в [1].

ЛЕММА 2. Пусть строки $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $a_r \in \mathbb{H}$, $b_r \in \mathbb{H}$, удовлетворяют условию $|ax| = |bx|$ для всех $x \in \mathbb{H}^n$. Тогда $b = \theta a$ для некоторого $\theta \in \mathbb{H}$, $|\theta| = 1$.

Докажем теорему. В ходе доказательства мы будем накладывать на матрицу A (задающую норму (2)) ряд ограничений вида $P(A) \neq 0$, где P – полиномиальная функция; назовем их *полиномиальными неравенствами*. Мы не всегда выписываем эти неравенства явно. Будет показано, что для матрицы A , удовлетворяющей всем этим полиномиальным

неравенствам (т.е. для типичной матрицы), любая линейная изометрия (по отношению к норме (2)) есть одно из преобразований $\pm \text{id}$.

Любое линейное преобразование пространства $\mathbb{H}^n$ задается кватернионной матрицей $T \in \mathbb{H}_n^n$ по правилу $x \mapsto Tx$. Пусть это преобразование сохраняет норму (2), т.е. $\|x\|_{A,p} = \|Tx\|_{A,p}$, $x \in \mathbb{H}^n$. Используя строки матриц T , AT , можно переписать последнее равенство в виде

$$\sum_{k=1}^N |A_k x|^p = \sum_{k=1}^N |(AT)_k x|^p, \quad x \in \mathbb{H}^n.$$

(Здесь $|\cdot|$ означает стандартную норму (модуль) в $\mathbb{H}$.)

Применим лемму 1 (а затем лемму 2), считая, что $\gamma = p/2$, и взяв в качестве квадратичных форм из (4) формы $x \mapsto |A_k x|^2$ и $x \mapsto |(AT)_k x|^2$. В итоге получаем такую биекцию ϕ множества $\{1, \dots, N\}$ и такие элементы $d_k \in \mathbb{H}$, $k \in \{1, \dots, N\}$, $|d_k| = 1$, что

$$(AT)_k = d_k A_{\phi(k)}, \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$

Совокупность этих равенств равносильна матричному равенству

$$AT = D\Phi A, \quad (5)$$

где D – это диагональная матрица с диагональными элементами $d_1, \dots, d_N$, Φ – матрица перестановок, полученная из упомянутой биекции ϕ , т.е. ненулевые элементы матрицы Φ – это единицы, стоящие на позициях вида $(i, \phi(i))$. Возьмем из множества $\{1, \dots, N\}$ произвольную цепочку попарно различных чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и возьмем соответствующие ей матрицы A_α , D_α . Из (5) следует равенство

$$A_\alpha T = D_\alpha (\Phi A)_\alpha. \quad (6)$$

В этом месте наложим на матрицу A первое ограничение: все ее подматрицы порядка $n \times n$ обратимы; ясно, что это ограничение выражается некоторым полиномиальным неравенством. Отныне предполагается, что это неравенство выполнено. Из (6) следует, что $T = A_\alpha^{-1} D_\alpha (\Phi A)_\alpha$. Взяв, далее, еще одну цепочку чисел $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, получаем для матрицы T аналогичное выражение. Приравняв эти выражения, приходим (после легкого преобразования) к равенству

$$D_\alpha (\Phi A)_\alpha (\Phi A)_\beta^{-1} = A_\alpha A_\beta^{-1} D_\beta. \quad (7)$$

Далее для доказательства теоремы нам потребуется еще одна лемма.

ЛЕММА 3. Для типичной матрицы $A \in \mathbb{H}_N^n$ из соотношения (7) (для некоторых α , β , ϕ) следует, что $\phi = \text{id}$ (тождественная перестановка множества $\{1, \dots, N\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Допустим, что $\phi \neq \text{id}$; выведем отсюда некоторое нетривиальное полиномиальное соотношение для матрицы A .

В каждой из двух матриц, приравненных в (7), возьмем элементы, находящиеся на пересечении первой строки и первого столбца. Так как $|d_i| = 1$, то нормы этих элементов равны. Таким образом,

$$\left| \sum_{j=1}^n A_{\sigma(\alpha_1)}^j ((\Phi A)_\beta^{-1})_j^1 \right|^2 = \left| \sum_{j=1}^n A_{\alpha_1}^j (A_\beta^{-1})_j^1 \right|^2. \quad (8)$$

До сих пор наборы $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ были произвольны (и оба содержали попарно различные числа из $\{1, 2, \dots, N\}$). Сейчас мы подберем эти наборы так, что соотношение (8) будет нетривиальным, т.е. не выполняется тождественно на $\mathbb{H}_N^n$. С этой целью выберем сначала α_1 так, что $\alpha_1 \neq \phi(\alpha_1)$. Затем выберем $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$

таким образом, чтобы все они были отличны от чисел $\alpha_1, \phi^{-1}(\alpha_1)$. Такой выбор осуществим, ибо $N \geq n + 2$. Наконец, положим $\alpha_i = \beta_i, i = 2, \dots, n$. Теперь левая часть равенства (8) не зависит от строки A_{α_1} , а правая часть зависит от A_{α_1} . Таким образом, матрицу A можно выбрать так, что равенство (8) нарушится. Этим доказано, что соотношение (8) нетривиально.

Заметим, что обе части равенства (8) являются рациональными функциями от элементов матрицы A ; это следует из свойства элементов обратной матрицы, указанного перед формулировкой теоремы. Поэтому, умножив обе части этого равенства на подходящий множитель, мы можем преобразовать равенство (8) к виду $R_1(\alpha, \beta; A) = R_2(\alpha, \beta; A)$, где и слева и справа написаны полиномиальные функции от A . Теперь для доказательства леммы достаточно взять многочлен $P: \mathbb{H}_N^n \rightarrow \mathbb{R}$, равный произведению полиномиальных функций $R_1(\alpha, \beta; A) - R_2(\alpha, \beta; A)$ по всевозможным $\alpha, \beta, \phi \neq \text{id}$. Тогда при $P(A) \neq 0$ из соотношения (8) следует равенство $\phi = \text{id}$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Теперь равенство (7) сводится к

$$D_\alpha A_\alpha A_\beta^{-1} = A_\alpha A_\beta^{-1} D_\beta. \quad (9)$$

Применим это равенство к наборам $\alpha = (1, \dots, n-1, i)$ и $\beta = (1, \dots, n)$, где $n+1 \leq i \leq N$. Строка A_i выражается через $A_1, \dots, A_n$ по формуле $A_i = \sum_{s=1}^n b_{is} A_s$ (ибо матрица A_β обратима); наложим ограничение $b_{is} \neq 0$ для всех i, s (это еще одно полиномиальное неравенство для матрицы A). Легко видеть, что последняя строка матрицы $A_\alpha A_\beta^{-1}$ — это $(b_1, \dots, b_n)$. Поэтому, записав равенство последних строк левой и правой части равенства (9), приходим к равенству $d_i b_{is} = b_{is} d_s$. Запишем это равенство, заменив i на $k \in \{n+1, \dots, N\}$, и исключим d_s из двух полученных равенств. Получаем $b_{ks}^{-1} d_k b_{ks} = b_{is}^{-1} d_i b_{is}$. Далее, запишем последнее равенство, заменив s на t , и исключим d_i из двух имеющихся равенств. Приходим к следующему выводу: элементы d_k и $b_{kt} b_{it}^{-1} b_{is} b_{ks}^{-1}$ перестановочны. Наконец, заменив здесь t на r (напомним, что $n > 2$), получаем, что d_k перестановочен с элементами $b_{kt} b_{it}^{-1} b_{is} b_{ks}^{-1}$ и $b_{kr} b_{ir}^{-1} b_{is} b_{ks}^{-1}$; здесь предполагается, что $i \neq k$ и индексы s, t, r попарно различны. Наложим следующее ограничение: два последних элемента не перестановочны. (Заметим, что условие перестановочности этих элементов приводится к виду $xyz = zyx$, где $x = b_{kt} b_{it}^{-1}, y = b_{is} b_{ks}^{-1}, z = b_{kr} b_{ir}^{-1}$. Отсюда видно, что эти элементы не перестановочны для типичной матрицы A .) Из указанного ограничения вытекает, что $d_k \in \mathbb{R}$. (Здесь мы используем следующий элементарный факт: если $a, b \in \mathbb{H}, a \notin \mathbb{R}, b \notin \mathbb{R}, xa = ax, xb = bx$, то $ab = ba$.)

Итак, для типичной матрицы A из соотношений (9) следует, что $d_k \in \mathbb{R}$; отсюда немедленно выводится, что $d_1 = \dots = d_N \in \mathbb{R}$. Наконец, из равенства $|d_k| = 1$ вытекает, что $d_k = \pm 1$. Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. С. Исмагилов, Ю. И. Любич, *Функц. анализ и его прил.*, **42:3** (2008), 90–92.
 [2] Ю. И. Любич, *Сиб. матем. журн.*, **11:2** (1970), 358–369. [3] Yu. I. Lyubich, O. A. Shatalova, *Алгебра и анализ*, **16:1** (2004), 15–32. [4] Yu. I. Lyubich, L. N. Vaserstein, *Geom. Dedicata*, **47:3** (1993), 327–362.

Р. С. Исмагилов

Московский государственный технический
 университет им. Н. Э. Баумана
E-mail: ismagil@ci.net.ru

Поступило

13.01.2009

Ю. И. Любич

Israel Institute of Technology
E-mail: lyubich@technion.ac.il