Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Клименко, Конечность числа классов марковских разбиений для псевдоаносовских диффеоморфизмов поверхностей, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 2, 314–317

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8478>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 12:03:49

Конечность числа классов марковских разбиений для псевдоаносовских диффеоморфизмов поверхностей

А. В. Клименко

Одним из средств для изучения динамики псевдоаносовских диффеоморфизмов (определение см. [1; гл. 6]) является построение сопряжения такого диффеоморфизма и марковской цепи. (С метрической точки зрения это “настоящее” сопряжение, с топологической – нет: точкам из некоторого нигде не плотного множества соответствует более одной последовательности в марковской цепи.) Такое построение для случая аносовского диффеоморфизма двумерного тора сделано впервые Адлером и Вейссом в работе [2] и изложено, например, в книге [3]. В общем случае псевдоаносовского диффеоморфизма это описано в книге [4]. Далее мы предполагаем фиксированным псевдоаносовский диффеоморфизм T поверхности M .

Существуют различные определения марковского разбиения $\Xi = (X_1, \dots, X_m)$. Во-первых, можно было бы просто требовать, чтобы индуцированная разбиением мера на $\{1, \dots, m\}^{\mathbb{Z}}$ являлась марковской. Такое определение слишком широко. В частности, согласно Орнштейну [5] индуцированная мера может быть сделана бернуллиевской. Кроме того, из этого определения не видно, как можно было бы строить марковские разбиения.

Более узкое определение принадлежит Боуэну (см. [6], [7; § 3C], [3; § 18.7]). Говоря неформально, каждое из множеств X_i является “прямоугольником” – прямым произведением в смысле теоремы о локальном прямом произведении, при этом каждый устойчивый слой прямоугольника под действием отображения вкладывается в некоторый устойчивый слой (возможно, другого) прямоугольника; для неустойчивых слоев верно то же для обратного отображения. Можно показать, что уже для аносовского диффеоморфизма тора существует бесконечно много различных (несводимых друг к другу применением отображения) марковских разбиений в смысле Боуэна.

Изначальное определение Адлера и Вейсса для диффеоморфизма тора отличается тем, что X_i являются не просто прямыми произведениями, а “геометрическими” прямоугольниками (точнее, параллелограммами). При этом, как и в более общем боуэновском случае, если параллелограммы достаточно мелки, кодирование является взаимно однозначным почти всюду. Такое измельчение всегда можно получить (см. [4; 10]), беря в качестве элементов разбиения связные компоненты множеств $\text{clos}(\text{int } X_{i_0} \cap \text{int } T^{-1}(X_{i_1}) \cap \dots \cap \text{int } T^{-k}(X_{i_k}))$, где k фиксировано и достаточно велико, а X_j образуют *предмарковское разбиение* (см. ниже). Мы используем этот термин, следуя [4], в других источниках (например, в [1]) такие разбиения называются марковскими; в отличие от этого, в [4] так называют лишь предмарковские разбиения, порождающие почти однозначное кодирование.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Предмарковским разбиением* называется разбиение

$$\Xi = (X_1, \dots, X_m),$$

которое удовлетворяет следующим свойствам:

- 1) каждое X_j является параллелограммом, т.е. существует непрерывное отображение $h_j: [0, 1]^2 \rightarrow X_j$ такое, что его ограничение на $(0, 1)^2$ является гомеоморфизмом, $h_j([0, 1] \times \{y\})$ при всех $y \in (0, 1)$ является отрезком слоя устойчивого слоения $\mathcal{F}^s$ для T , а $h_j(\{y\} \times [0, 1])$ при $x \in (0, 1)$ – отрезком слоя неустойчивого слоения $\mathcal{F}^u$;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00342-а) и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3038.2008.1).

множество $h_j(\{0, 1\} \times [0, 1])$ будем называть *неустойчивой границей* X_j и обозначать через $\partial^u X_j$; аналогично, $h_j([0, 1] \times \{0, 1\})$ будем называть его *устойчивой границей* $\partial^s X_j$; также положим $\partial^{u,s} \Xi = \bigcup_j \partial^{u,s} X_j$, $\partial \Xi = \partial^s \Xi \cup \partial^u \Xi$;

2) $T(\partial^u \Xi) \supset \partial^u \Xi$, $T(\partial^s \Xi) \subset \partial^s \Xi$.

Встает вопрос о количестве различных предмарковских разбиений. Очевидно, что имея одно предмарковское разбиение Ξ , можно получить бесконечную серию таких разбиений $T^n(\Xi)$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому естественно дать следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Разбиения $\Xi^{(1)}$ и $\Xi^{(2)}$ называются *эквивалентными*, если $\Xi^{(2)} = T^k(\Xi^{(1)})$ при некотором целом k .

ТЕОРЕМА. Число классов эквивалентности предмарковских разбиений с фиксированным количеством элементов разбиения конечно.

Отметим, что можно рассматривать и более широкую эквивалентность: $\Xi^{(1)} \sim \Xi^{(2)}$, если $\Xi^{(2)} = S(\Xi^{(1)})$ для некоторого гомеоморфизма S , сохраняющего устойчивое и неустойчивое слоения и коммутирующего с T . Ясно, что число классов эквивалентности для такого определения будет не больше, чем для приведенного выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. 1. Пусть Ξ – произвольное разбиение из m элементов, $A^{s,u}$ – множества слоев устойчивого и неустойчивого слоений, дуги которых входят в $\partial \Xi$. Докажем, что все слои A^s являются периодическими с периодом не более $4m$. Для этого, так как $T(A^s) = A^s$, достаточно доказать, что A^s содержит не более $4m$ слоев. Если это не так, некоторое множество $h_j([0, 1] \times \{i\})$, $j = 1, \dots, m$, $i = 0, 1$, содержит отрезки по меньшей мере трех слоев, т.е. кривая $\gamma_{i,j}(t) = h_j(t, i)$ как минимум дважды проходит через множество $\text{Sing}(T)$ особых точек слоений. Выбрав $s_{1,2}$ так, что

$$\gamma_{i,j}(s_{1,2}) \in \text{Sing}(T), \quad \gamma_{i,j}((s_1, s_2)) \cap \text{Sing}(T) = \emptyset,$$

получим, что $\gamma_{i,j}([s_1, s_2])$ является слоем, соединяющим две особые точки, а таких слоев для псевдоаносовского диффеоморфизма не может быть. Итак, A^s является подмножеством множества P_{4m}^s всех устойчивых слоев периода не более $4m$. Аналогично, $A^u \subset P_{4m}^u$.

2. Заметим, что T^q переводит слой $\beta \in A^s$ периода q в себя, сжимая его. Более того, T^q переводит отрезок $\beta \cap \partial^s \Xi$ внутрь себя, поэтому на нем есть периодическая точка периода q .

Введем на слое $\beta \in P_{4m}^{s,u}$ параметризацию, которую обозначим $\beta(t)$, так, что $\beta(0)$ – это периодическая точка, а $\mu_{s,u}(\beta([a, b])) = |b - a|$. Такая параметризация единственна с точностью до замены знака, причем $t \in (-\infty, \infty)$, если $\beta(0)$ неособая, и $t \in [0, +\infty)$ или $t \in (-\infty, 0]$, если она особая; в последнем случае для удобства доопределим $\beta(t)$ по правилу $\beta(t) = \beta(-t)$.

Число пересечений (не примыканий) в неособых точках отрезков границы разбиения, не превосходит m . Действительно, каждой такой точке соответствует 4 угла параллелограммов разбиения, а общее число углов равно $4m$. В силу леммы 1 (см. ниже) существует такая константа L , что либо

$$\partial^s \Xi \subset D_{4m}^s(1) := \bigcup_{\beta \in P_{4m}^s} \beta([-1, 1]),$$

либо

$$\partial^u \Xi \subset D_{4m}^u(L) := \bigcup_{\gamma \in P_{4m}^u} \gamma([-L, L]).$$

(Надо взять L таким, что каждый из отрезков $\gamma([0, \pm L])$ пересекает каждый $\beta([0, \pm 1])$ не менее $m + 1$ раза.)

3. Для данного Ξ выберем k так, что $\partial^s(T^k\Xi) \subset D_{4m}^s(1/\lambda)$, но $\partial^s(T^k\Xi) \not\subset D_{4m}^s(1)$, где $\lambda < 1$ – коэффициент сжатия на слоях. Тогда $\partial^u(T^k\Xi) \subset D_{4m}^u(L)$. Итак, в каждом классе эквивалентности $[\Xi]$ можно выбрать такого представителя Ξ^* , что

$$\partial^u\Xi^* \subset D_{4m}^u(L), \quad \partial^s\Xi^* \subset D_{4m}^s\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Число разбиений, удовлетворяющих этим условиям, конечно. Действительно, для каждого $\beta \in P_{4m}^s$ множество $D_{4m}^u(L) \cap \beta([-1/\lambda, 1/\lambda])$ конечно. Но концы отрезка слоя, входящего в границу разбиения, обязаны принадлежать этому множеству. Следовательно, число способов выбрать каждый отрезок границы разбиения конечно, а тогда и общее число таких разбиений конечно. Теорема доказана.

ЛЕММА 1. *Любой полуслой периодического слоя $\mathcal{F}^{u,s}$ с началом в периодической точке всюду плотен.*¹

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Для определенности будем рассматривать полуслой $\beta^+ = \beta((0, +\infty))$ на неустойчивом слое β . Если β имеет период q под действием T , то $\hat{T} = T^{2q}$ оставляет полуслой β^+ неподвижным.

Положим $M_0 = M \setminus (\{\beta(0)\} \cup \text{Sing}(T))$. Множество M_0 является связным $\hat{T}$ -инвариантным множеством. Мы покажем, что $\text{clos}_{M_0} \beta^+ = M_0$, тогда, очевидно, $\text{clos}_M \beta^+ = M$. Учитывая связность M_0 , для этого достаточно доказать, что $\text{clos}_{M_0} \beta^+$ открыто в нем.

2. Пусть $x \in \text{clos}_{M_0} \beta^+$. Выберем окрестность $U \subset M_0$ и выпрямляющие координаты (ξ, η) в ней так, что $U = \{|\xi| < \xi_0, |\eta| < \eta_0\}$, x имеет координаты $(0, 0)$, отрезки слоев $\mathcal{F}^u$ (соответственно $\mathcal{F}^s$) в U являются горизонтальными отрезками $\{\eta = \eta^*\}$ (соответственно вертикальными $\{\xi = \xi^*\}$), причем трансверсальные меры на этих слоях таковы, что

$$\mu_u([\xi_1, \xi_2] \times \{\eta^*\}) = |\xi_2 - \xi_1|, \quad \mu_s(\{\xi^*\} \times [\eta_1, \eta_2]) = |\eta_2 - \eta_1|.$$

Поскольку $\beta(0)$ не содержится в U , $\text{clos}_{M_0} \beta^+$ пересекает U по семейству интервалов $(-\xi_0, \xi_0) \times A$, где A – подмножество интервала $(-\eta_0, \eta_0)$, замкнутое в нем.

3. Докажем, что $U \subset \text{clos}_{M_0} \beta^+$. Пусть $y = (\xi_y, \eta_y) \in U$. Положим $\varepsilon = \text{dist}(\eta_y, A)$. Если $\varepsilon = 0$, то в силу замкнутости A $y \in \text{clos}_{M_0} \beta^+$, в противном случае существует $\eta' \in A$, $|\eta_y - \eta'| = \varepsilon$. Положим

$$\mu = \min\left(\varepsilon \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda}, \eta_0 - \eta_y, \eta_y + \eta_0\right).$$

Поскольку y неблуждающая, существует $z = (\xi_z, \eta_z) \in U$ и $r \geq 1$, что $z, w = \hat{T}^r(z) \in (\xi_y - \mu, \xi_y + \mu) \times (\eta_y - \mu, \eta_y + \mu)$. Точки z и $z' = (\xi_z, \eta'_z) \in \text{clos}_{M_0} \beta^+$ лежат на одном и том же устойчивом слое и мера отрезка между ними не превосходит $|\eta_z - \eta_y| + |\eta_y - \eta'_z| \leq \varepsilon + \mu$. Тогда точка $\hat{T}^r z = w = (\xi_w, \eta_w)$ и $\hat{T}^r z' = w'$ также лежат на одном устойчивом слое и мера отрезка между ними не больше $\lambda(\varepsilon + \mu)$. Поскольку $w' \in \text{clos}_{M_0} \beta^+$, $\text{dist}(\eta_w, A) \leq \lambda(\varepsilon + \mu)$. Тогда

$$\text{dist}(\eta_y, A) \leq |\eta_y, \eta_w| + \text{dist}(\eta_w, A) < \lambda\varepsilon + (\lambda + 1)\mu \leq \varepsilon,$$

что противоречит тому, что $\text{dist}(\eta_y, A) = \varepsilon$.

¹ Данное утверждение, несомненно, известно (и даже в более общем виде – для любого полуслоя на любом слое, за исключением “полуслоя”, ограниченного с одной стороны некоторой точкой a , а с другой стороны особой точкой). Однако мы не смогли дать соответствующую ссылку и потому приводим доказательство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э. Кэссон, С. Блейлер, *Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Тёрстону*, Библиотека студента-математика, **5**, ФАЗИС, М., 1998. [2] R. L. Adler, B. Weiss, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **57**:6 (1967), 1573–1576. [3] А. Б. Каток, Б. Хас-селблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999. [4] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces. Séminaire Orsay, Astérisque*, **66–67**, Soc. Math. France, Paris, 1979. [5] D. Ornstein, *Adv. in Math.*, **4**:3 (1970), 337–352. [6] R. Bowen, *Amer. J. Math.*, **92**:3 (1970), 725–747. [7] Р. Боуэн, *Методы символической динамики*, Сб. статей, Математика. Новое в зарубежной науке, **13**, Мир, М., 1979, 9–92.

А. В. Клименко

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: klimenko05@mail.ru

Поступило

11.01.2009