Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Краснов, Группа Брауэра неполной вещественной алгебраической поверхности, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 3, 355–359

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm848>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 12:21:21

УДК 512.7

ГРУППА БРАУЭРА НЕПОЛНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. А. Краснов

Вычисляется группа Брауэра неполной вещественной алгебраической поверхности. Вычисления проводятся с помощью эквивариантных когомологий. В результате получается формула, аналогичная формуле для полной поверхности, но доказательство ее имеет существенные отличия.

Библиография: 7 названий.

Введение. Далее X – неособая вещественная квазипроективная алгебраическая поверхность; $\text{Br } X$ – ее группа Брауэра. Если X проективная поверхность, то в работе [1] доказано существование изоморфизма

$$\text{Br } X = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\rho_0(X)} \oplus H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_\text{tors}, \quad (1)$$

где $\rho_0(X)$ – число Лефшеца, оно равно рангу трансцендентной группы когомологий

$$H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) / H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-).$$

Заметим, что $G = G(\mathbb{C}/\mathbb{R})$ – группа Галуа; $\mathbb{Z}_-$ – G -модуль целых чисел, на котором инволюция комплексного сопряжения $g \in G$ действует умножением на -1 ; $H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ – группа эквивариантных когомологий, $H^q(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_\text{tors}$ – ее подгруппа кручения; $H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ – алгебраическая группа когомологий, она равна образу отображения цикла

$$\text{cl}: \text{Div } X \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-).$$

В этой заметке мы показываем, что равенство (1) имеет место и для неполной поверхности. Нужно отметить, что доказательство в [1] для неполной поверхности не проходит, так как применяемые там трансцендентные методы годятся только для проективной поверхности. Здесь мы применяем методы и результаты из работы [2].

1. Доказательство основного результата. Рассмотрим этальную топологию X_{et} на X и пучок $\mathbb{G}_m$ на X_{et} , определенный равенством $\mathbb{G}_m(U) = \Gamma(U, \mathcal{O})^*$. Тогда существует канонический изоморфизм (см. [3])

$$\text{Br } X = H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{G}_m). \quad (2)$$

Пусть $\mu_\infty(U)$ – группа всех корней из 1 в $\Gamma(U, \mathcal{O})$; тогда получим предпучок μ_∞ на X_{et} ; он является пучком, что вытекает из квазикомпактности X . Так как μ_∞ – подпучок $\mathbb{G}_m$,

определен фактор-пучок $\mathbb{G}_m / \mu_\infty$, который обозначим через φ . В работе [2] показано, что гомоморфизм возведения в степень

$$(\)^n: \varphi \rightarrow \varphi$$

является изоморфизмом при каждом $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что пучок абелевых групп φ является пучком векторных пространств над $\mathbb{Q}$ (если групповую операцию в φ записывать аддитивно). Из короткой точной последовательности пучков на X_{et}

$$1 \rightarrow \mu_\infty \rightarrow \mathbb{G}_m \rightarrow \varphi \rightarrow 1$$

получаем длинную точную последовательность когомологий

$$\cdots \rightarrow H_{\text{et}}^1(X, \varphi) \xrightarrow{\delta} H_{\text{et}}^2(X, \mu_\infty) \rightarrow H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{\text{et}}^2(X, \varphi) \xrightarrow{\delta} \cdots. \quad (3)$$

Так как $H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{G}_m)$ – группа кручения (см. [3]), а $H_{\text{et}}^2(X, \varphi)$ – векторное пространство над $\mathbb{Q}$, гомоморфизм

$$H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{\text{et}}^2(X, \varphi)$$

нулевой. Следовательно, из точной последовательности (3) вытекает равенство

$$H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{G}_m) = H_{\text{et}}^2(X, \mu_\infty) / \delta(H_{\text{et}}^1(X, \varphi)). \quad (4)$$

В работе [2] показано, что существует (неканонический) изоморфизм

$$H_{\text{et}}^2(X, \mu_\infty) = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\alpha \oplus H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}}, \quad (5)$$

где α равно размерности пространства $H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}_-)^G$, а $\mathbb{Q}_-$ – G -модуль, равный $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}_-$. Отметим, что в [2] рассматриваются полные многообразия, но доказательство равенства (5), предложенное там, проходит и для неполных многообразий. Так как $H_{\text{et}}^1(X, \varphi)$ – векторное пространство над $\mathbb{Q}$, из равенства (5) вытекает, что группа $\delta(H_{\text{et}}^1(X, \varphi))$ содержится в делимой подгруппе $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\alpha$, а также, что фактор-группа $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\alpha / \delta(H_{\text{et}}^1(X, \varphi))$ равна группе вида $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\beta$. Таким образом, из равенств (2), (4), (5) вытекает равенство

$$\text{Br } X = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\beta \oplus H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)_{\text{tors}}, \quad (6)$$

и нам остается доказать, что $\beta = \rho_0(X)$.

Пусть p – простое число такое, что p -периодическая подгруппа ${}_p H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ группы $H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ равна нулю. Тогда из равенства (6) следует, что достаточно установить для одного из таких p равенство

$$\dim_p \text{Br } X = \rho_0(X), \quad (7)$$

где ${}_p \text{Br } X$ – p -периодическая подгруппа $\text{Br } X$.

Для этого рассмотрим точную последовательность Куммера на X_{et} (см. [4])

$$1 \rightarrow \mu_p \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{(\)^p} \mathbb{G}_m \rightarrow 1.$$

Из соответствующей длинной точной последовательности когомологий получаем равенства

$$\dim_p \operatorname{Br} X = \dim_p H_{\text{et}}^2(X, \mathbb{G}_m) = \dim H_{\text{et}}^2(X, \mu_p) / \delta_p(H_{\text{et}}^1(X, \mathbb{G}_m)),$$

где $\delta_p: H_{\text{et}}^1(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow H_{\text{et}}^2(X, \mu_p)$ – кограничный гомоморфизм. Группа $H_{\text{et}}^2(X, \mu_p)$ равна группе $H^2(X, (\mathbb{C}); G, \mu_p)$, где μ_p – G -модуль комплексных корней p -й степени из 1 (см. [1], [5]). Далее мы покажем, что гомоморфизм

$$\begin{array}{ccc} \delta_p: H_{\text{et}}^1(X, \mathbb{G}_m) & \longrightarrow & H_{\text{et}}^2(X, \mu_p) \\ \parallel & & \parallel \\ \operatorname{Pic} X & & H^2(X, (\mathbb{C}); G, \mu_p) \end{array} \quad (8)$$

равен композиции гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Pic} X & \xrightarrow{\text{cl}} & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{R_p} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-/p) \\ & & \parallel \\ & & H^2(X, (\mathbb{C}); G, \mu_p), \end{array} \quad (9)$$

где R_p – гомоморфизм редукции. Прежде чем доказывать это общее утверждение, покажем, что из него следует равенство (7) при условии, что группы ${}_p H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$, ${}_p H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ нулевые.

Действительно, из равенства нулю группы ${}_p H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ следует, что гомоморфизм редукции

$$R_p: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-/p)$$

эпиморфен. Следовательно, он индуцирует эпиморфизм

$$\begin{aligned} H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) &= H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) / H_{\text{alg}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \\ &\rightarrow H_{\text{et}}^2(X, \mu_p) / \delta_p(\operatorname{Pic} X). \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что этот эпиморфизм определен в силу утверждения о совпадении гомоморфизма (8) с композицией (9). Так как гомоморфизм

$$H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) / p \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-/p)$$

мономорфен, то гомоморфизм

$$H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) / p \rightarrow H_{\text{et}}^2(X, \mu_\infty) / \delta_p(\operatorname{Pic} X),$$

индуцированный гомоморфизмом (10), является изоморфизмом. Таким образом, имеем равенство

$$\dim_p \operatorname{Br} X = \dim H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) / p = \rho_0(X),$$

т.е. выполняется равенство (7). Перейдем к доказательству того, что гомоморфизм (8) равен композиции гомоморфизмов (9).

Пусть $\mathcal{A}$ – пучок ростков непрерывных комплекснозначных функций на $X(\mathbb{C})$, $\mathcal{A}^*$ – пучок обратимых функций. Рассмотрим точную последовательность Куммера G -пучков на $X(\mathbb{C})$

$$1 \rightarrow \mu_p \rightarrow \mathcal{A}^* \xrightarrow{(\cdot)^p} \mathcal{A}^* \rightarrow 1.$$

Из нее получаем кограничный гомоморфизм

$$\delta_p: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}^*) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mu_p). \quad (11)$$

Рассмотрим также экспоненциальную точную последовательность G -пучков на $X(\mathbb{C})$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_- \xrightarrow{2\pi i} \mathcal{A} \xrightarrow{\exp} \mathcal{A}^* \rightarrow 1.$$

Из нее получаем кограничный гомоморфизм

$$\delta: H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}^*) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-). \quad (12)$$

Определен канонический гомоморфизм

$$\text{Pic } X \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}^*),$$

композиция которого с гомоморфизмом (12) равна отображению цикла (см. [6]):

$$\text{cl}: \text{Pic } X \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-).$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму из G -пучков на $X(\mathbb{C})$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_- & \xrightarrow{2\pi i} & \mathcal{A} & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{A}^* \longrightarrow 1 \\ & & \downarrow e_p & & \downarrow \exp_p & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & \mu_p & \longrightarrow & \mathcal{A}^* & \xrightarrow{(\cdot)^p} & \mathcal{A}^* \longrightarrow 1 \end{array}, \quad (13)$$

где $e_p(n) = e^{2\pi n i/p}$, $\exp_p(f) = \exp(f/p)$. Из левого столбца диаграммы (13) получаем гомоморфизм редукции по mod p :

$$R_p: H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \rightarrow H^2(X(\mathbb{C}); G, \mu_p).$$

Поэтому из диаграммы (13) следует, что композиция гомоморфизма (12) с гомоморфизмом редукции дает кограничный гомоморфизм (11). Рассмотрим теперь следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic } X = H_{\text{et}}^1(X, \mathbb{G}_m) & \xrightarrow{\delta_p} & H_{\text{et}}^2(X, \mu_\infty) \\ \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}^*) & \xrightarrow{\delta_p} & H^2(X(\mathbb{C}); G, \mu_p). \end{array}$$

Из нее мы получаем, что гомоморфизм (8) совпадает с композицией гомоморфизмов

$$\text{Pic } X \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}^*) \xrightarrow{\delta_p} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mu_p).$$

Выше установлено, что гомоморфизм δ_p в ней равен композиции гомоморфизмов

$$H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) \xrightarrow{R_p} H^2(X(\mathbb{C}); G, \mu_p).$$

Если дополнить эту строку слева гомоморфизмом

$$\text{Pic } X \rightarrow H^1(X(\mathbb{C}); G, \mathcal{A}^*),$$

то получим композицию $R_p \circ \text{cl}$, т.е. гомоморфизм (9), а с другой стороны получаем разложение гомоморфизма (8). Итак, гомоморфизм (8) совпадает с композицией (9).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. На самом деле группа $H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-)$ свободная, т.е. равна $\mathbb{Z}^{\rho_0(X)}$. Действительно, из выше приведенного доказательства вытекает, что для любого простого числа p выполняется равенство

$$\dim_p \text{Br } X = \rho_0(X) + \dim_p H_{\text{tr}}^2(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) + \dim_p H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-).$$

С другой стороны, из разложения (1) имеем равенство

$$\dim_p \text{Br } X = \rho_0(X) + \dim_p H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $p \neq 2$, то (см. [1])

$${}_p H^3(X(\mathbb{C}); G, \mathbb{Z}_-) = {}_p H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G,$$

а поэтому при $p \neq 2$ выполняется равенство

$$\dim_p \text{Br } X = \rho_0(X) + \dim_p H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}_-)^G.$$

В заметке [7] приведена формула для вычисления размерности $_2 \text{Br } X$ для полной поверхности, не использующая эквивариантных когомологий. Рассуждения, проведенные в [7], можно применить и для неполной поверхности. Тогда получается равенство

$$\dim_2 \text{Br } X = \rho_0(X) - b_-^3(X) + k^1(Y) + s + s_c,$$

где $b_-^3(X) = \dim H^3(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}_-)^G$, $Y = X(\mathbb{C})/G$, $k^1(Y)$ – размерность ядра гомоморфизма ограничения

$$H^1(Y, \mathbb{F}_2) \rightarrow H^1(X(\mathbb{R}), \mathbb{F}_2),$$

s – число компонент связности множества $X(\mathbb{R})$, s_c – число компактных компонент связности множества $X(\mathbb{R})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Краснов В. А. Когомологическая группа Брауэра вещественного алгебраического многообразия // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 5. С. 57–88.
- [2] Краснов В. А. Аналоги неравенства Гарнака–Тома для вещественной алгебраической поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. (в печати).
- [3] Grothendick A. Le groupe de Brauer // Dix exposés sur la cohomologie des schemas. Amsterdam: North-Holland, 1968. P. 46–188.
- [4] Милн Дж. Этальные когомологии. М.: Мир, 1983.
- [5] Nikulin V. V. On the Brauer group of real algebraic surfaces // Algebraic Geometry and Its Applications. Yaroslavl', 1992. С. 114–136.
- [6] Краснов В. А. Характеристические классы векторных расслоений на вещественном алгебраическом многообразии // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. № 4. С. 716–746.
- [7] Краснов В. А. О группе Брауэра вещественной алгебраической поверхности // Матем. заметки. 1996. Т. 60. № 6. С. 935–938.