Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Кириченко, С. В. Харитоновна, О геометрии нормальных локально конформно почти косимплектических многообразий, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 1, 40–53

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8483>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 17:59:13

О геометрии нормальных локально конформно почти косимплектических многообразий

В. Ф. Кириченко, С. В. Харитонов

В данной статье рассмотрены нормальные локально конформно почти косимплектические (далее $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -) структуры. Получена полная группа структурных уравнений, вычислены компоненты тензора римановой кривизны и тензора Риччи. Найдены необходимые и достаточные условия постоянства кривизны таких многообразий. В частности, показано, что нормальное $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразие, являющееся пространственной формой, имеет неположительную кривизну. Исследовано постоянство ΦHS -кривизны. Получены выражения компонент тензора Вейля на пространстве присоединенной G -структуры. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых нормальное $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразие является конформно плоским. В заключение рассмотрены локально симметрические нормальные $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия.

Библиография: 20 названий.

Введение. В последнее время внимание исследователей привлекает изучение конформных отображений и (локального) строения многообразий, допускающих конформные преобразования в различные классы почти эрмитовых или почти контактных структур. Объектом исследования данной работы являются нормальные локально конформно почти косимплектические (далее $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -) многообразия. Изучением свойств этого класса многообразий занимались Олчек [1], Роска [2], Чинеа, Мареро [3] и другие.

В нашей работе получена полная группа структурных уравнений нормальной $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -структуры, вычислены компоненты тензора римановой кривизны и тензора Риччи на пространстве присоединенной G -структуры. Найдены необходимые и достаточные условия постоянства кривизны таких многообразий. В частности, показано, что нормальное $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразие, являющееся пространственной формой, имеет неположительную кривизну. Рассмотрен вопрос постоянства ΦHS -кривизны. Получены выражения компонент тензора Вейля на пространстве присоединенной G -структуры. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых нормальное $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразие является конформно плоским. В заключение рассмотрены локально симметрические нормальные $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия.

1. Предварительные сведения. Пусть M^{2n+1} – гладкое нечетномерное многообразие размерности выше трех; $C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций многообразия M^{2n+1} ; $X(M) = C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на M^{2n+1} , d – оператор внешнего дифференцирования.

Почти контактной метрической (короче, $\mathcal{AC}$ -) структурой на многообразии M называется совокупность (η, ξ, Φ, g) тензорных полей на этом многообразии, где η – дифференциальная 1-форма, называемая *контактной формой структуры*; ξ – векторное поле, называемое *характеристическим*; Φ – поле тензора типа $(1; 1)$, называемое *структурным эндоморфизмом модуля* $X(M)$, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика. При этом

$$\begin{aligned} 1) \quad \eta(\xi) = 1; \quad 2) \quad \eta \circ \Phi = 0; \quad 3) \quad \Phi(\xi) = 0; \quad 4) \quad \Phi^2 = -\text{id} + \eta \otimes \xi; \\ \langle \Phi X, \Phi Y \rangle = \langle X, Y \rangle - \eta(X)\eta(Y), \quad X, Y \in X(M). \end{aligned}$$

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим* ($\mathcal{AC}$ -) *многообразием*.

Напомним [4], [5], что почти контактная метрическая структура $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ называется *почти косимплектической* ($\mathcal{AC}_S$ -) *структурой*, если

- 1) $d\eta = 0$;
- 2) $d\Omega = 0$, где тензор $\Omega(X, Y) = g(X, \Phi Y)$ кососимметричен и называется *фундаментальной формой* $\mathcal{AC}$ -структуры.

В $C^\infty(M)$ -модуле $X(M)$ гладких векторных полей на $\mathcal{AC}$ -многообразии внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора

$$l = \text{id} - \eta \otimes \xi = -\Phi^2, \quad m = \eta \otimes \xi = \text{id} + \Phi^2$$

на распределениях $\mathcal{L} = \text{Im } \Phi = \ker \eta$ и $\mathcal{M} = \ker \Phi = L(\xi)$ размерностей $2n$ и 1 , соответственно, причем $X(M) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$. Более того, комплексификация модуля $X(M)$, именно $X^C(M) = \mathbf{C} \otimes X(M)$, распадается в прямую сумму собственных подмодулей эндоморфизма Φ^C : $X^C(M) = D_\Phi^{\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^{-\sqrt{-1}} \oplus D_\Phi^0$, где $D_\Phi^0 = \mathcal{M}^C$. Проекторами на слагаемые этой прямой суммы будут, соответственно, эндоморфизмы

$$\pi = -\frac{\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi}{2}, \quad \bar{\pi} = \frac{-\Phi^2 + \sqrt{-1}\Phi}{2}, \quad m = \text{id} + \Phi^2.$$

Доказано [6], что к $(2n+1)$ -мерному $\mathcal{AC}$ -многообразию, как метрическому f -многообразию дефекта 1, внутренним образом присоединяется G -структура, структурной группой которой является группа Ли $U(n) \times \{e\}$. Тотальное пространство этой G -структуры состоит из модифицированных A -реперов, т.е. комплексных реперов вида $(p, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \varepsilon_{\hat{1}}, \dots, \varepsilon_{\hat{n}})$, где $\varepsilon_0 = \xi_p$, $\varepsilon_a = \sqrt{2}\pi(e_a)$, $\varepsilon_{\hat{a}} = \sqrt{2}\bar{\pi}(e_a)$, $(e_1, \dots, e_n)$ – комплексный ортонормированный базис пространства $\mathcal{L}_p$, как C -модуля, $p \in M$. Эти реперы характеризуются тем, что матрицы тензоров Φ и g в этих реперах принимают вид

$$(\Phi_i^j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{-1}I_n & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{-1}I_n \end{pmatrix}, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где I_n – единичная матрица порядка n . Здесь и далее индексы i, j, k пробегает значения от 0 до $2n$, индексы a, b, c, d – значения от 1 до n , $\hat{a} = a + n$. Обозначим компоненты формы смещения через $\{\omega^i\}$ и введем обозначения $\omega_a = \omega^{\hat{a}}$, $\omega = \omega^0$.

Известно [6], что для $\mathcal{AC}$ -многообразия верно

$$\pi^*(\eta) = \omega, \quad (2)$$

$$\pi^*(\Omega) = -\sqrt{-1}\omega^a \wedge \omega_a = -\sqrt{-1}\delta_a^b \omega^a \wedge \omega_b, \quad (3)$$

где π – естественная проекция пространства присоединенной G -структуры.

$\mathcal{AC}$ -структура называется *нормальной* [7], если тензор Нейенхайса N_Φ ее структурного эндоморфизма Φ удовлетворяет тождеству $2N_\Phi + d\eta \otimes \xi = 0$, где

$$N_\Phi(X, Y) = \frac{1}{4}([\Phi X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]).$$

Нормальная почти косимплектическая структура называется *косимплектической* [8].

2. Локально конформно почти косимплектические многообразия. Конформным преобразованием $\mathcal{AC}$ -структуры $S = (\eta, \xi, \Phi, g)$ на многообразии M [9] называется переход от S к $\mathcal{AC}$ -структуре $\tilde{S} = (\tilde{\eta}, \tilde{\xi}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$, при этом $\tilde{\eta} = e^{-\sigma}\eta$, $\tilde{\xi} = e^\sigma\xi$, $\tilde{\Phi} = \Phi$, $\tilde{g} = e^{-2\sigma}g$, где σ – определяющая функция соответствующего конформного преобразования. Если $\sigma = \text{const}$, конформное преобразование называется *тривиальным*, или *гомотетией*.

$\mathcal{AC}$ -структура S на многообразии M называется *локально конформно почти косимплектической*, короче *lcAC-структурой*, если сужение этой структуры на некоторую окрестность U произвольной точки $p \in M$ допускает конформное преобразование в почти косимплектическую структуру. Назовем это преобразование локально конформным. Многообразие, на котором фиксирована *lcAC-структура*, называется *lcAC-многообразием*.

Заметим, что при $\sigma = \text{const}$ получаем $\mathcal{AC}$ -многообразие.

Из определения почти косимплектической структуры получаем (см. [1]), что для *lcAC-многообразий* определяющими являются соотношения

$$1) \quad d\eta = d\sigma \wedge \eta; \quad 2) \quad d\Omega = 2d\sigma \wedge \Omega.$$

Так же как в случае *lcCS-многообразий* [9], можно показать, что априори определенная локально 1-форма $d\sigma$ с компонентами $\{\sigma_i\}$ определена на M глобально.

Форма α с компонентами $\{\sigma_i\}$ называется *контактной формой Ли*.

С учетом вышесказанного, на пространстве присоединенной G -структуры найдем первую группу структурных уравнений *lcAC-многообразий*:

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^a &= -\omega_b^a \wedge \omega^b + B_c^{ab}\omega^c \wedge \omega_b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B_b^a\omega \wedge \omega^b + B^{ab}\omega \wedge \omega_b; \\ 2) \quad d\omega_a &= \omega_a^b \wedge \omega_b + B_{ab}^c\omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_a^b\omega \wedge \omega_b + B_{ab}\omega \wedge \omega^b; \\ 3) \quad d\omega &= C_b\omega \wedge \omega^b + C^b\omega \wedge \omega_b. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом

$$\begin{aligned} 1) \quad B^{[abc]} &= B_{[abc]} = 0; & 2) \quad B^{[ab]} &= B_{[ab]} = 0; \\ 3) \quad B_a^b &= B^b_a = \sigma_0\delta_a^b; & 4) \quad B^{ab}_c &= 2\sigma^{[a}\delta_c^{b]}; \\ 5) \quad B_{ab}^c &= 2\sigma_{[a}\delta_b^{c]}; & 6) \quad C^b &= -\sigma^b; \\ 7) \quad C_b &= -\sigma_b; \end{aligned} \quad (5)$$

где $\{\omega_i^j\}$ – компоненты римановой связности, а $B^{ab}_c, B_{ab}^c, B^{abc}, B_{abc}, B^{ab}, B_{ab}, B^a_b, B_b^a, C^b, C_b$ – гладкие функции на пространстве присоединенной G -структуры, служащие компонентами первого, второго, третьего, четвертого и пятого структурных тензоров (тензоров Кириченко) [6].

С учетом (5) получим соотношения для $\{\Phi_{j,k}^i\}$ – компонент ковариантного дифференциала оператора Φ в римановой связности [6] для $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразий:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \Phi_{0,b}^a &= -\Phi_{a,b}^0 = -\sqrt{-1} \delta_b^a \sigma_0; & 2) \quad \Phi_{0,\hat{b}}^{\hat{a}} &= -\Phi_{a,\hat{b}}^0 = \sqrt{-1} \delta_a^b \sigma_0; \\
 3) \quad \Phi_{0,0}^a &= -\Phi_{a,0}^0 = \sqrt{-1} \sigma^a; & 4) \quad \Phi_{0,0}^{\hat{a}} &= -\Phi_{a,0}^0 = -\sqrt{-1} \sigma_a; \\
 5) \quad \Phi_{\hat{b},c}^a &= 4\sqrt{-1} \sigma^{[a} \delta_c^{b]}; & 6) \quad \Phi_{\hat{b},\hat{c}}^{\hat{a}} &= -4\sqrt{-1} \sigma_{[a} \delta_b^c]; \\
 7) \quad \Phi_{\hat{b},\hat{c}}^a &= 4\sqrt{-1} B^{cab}; & 8) \quad \Phi_{\hat{b},c}^{\hat{a}} &= -4\sqrt{-1} B_{cab}; \\
 9) \quad \Phi_{a,b}^0 &= -\Phi_{0,b}^{\hat{a}} = -\sqrt{-1} B_{ab}; & 10) \quad \Phi_{a,\hat{b}}^0 &= -\Phi_{0,\hat{b}}^a = \sqrt{-1} B^{ab}; \\
 11) \quad \Phi_{b,0}^a &= \Phi_{b,0}^{\hat{a}} = 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

3. Нормальные локально конформно почти косимплектические многообразия. Известно [6], [10], что $\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -структура нормальна тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры

$$\Phi_{b,c}^{\hat{a}} = \Phi_{b,\hat{c}}^a = \Phi_{b,0}^{\hat{a}} = \Phi_{b,0}^a = \Phi_{a,b}^0 = \Phi_{a,\hat{b}}^0 = \Phi_{a,0}^0 = \Phi_{a,0}^{\hat{a}} = 0.$$

В силу соотношений (6) $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразие является нормальным тогда и только тогда, когда

$$B^{abc} = B_{abc} = B^{ab} = B_{ab} = \sigma^a = \sigma_a = 0. \tag{7}$$

С учетом (4), (5) и (7) первая группа структурных уравнений нормального $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 1) \quad d\omega^a &= -\omega_b^a \wedge \omega^b + \delta_b^a \sigma_0 \omega \wedge \omega^b; \\
 2) \quad d\omega_a &= \omega_a^b \wedge \omega_b + \delta_a^b \sigma_0 \omega \wedge \omega_b; \\
 3) \quad d\omega &= 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

В данном случае при $\sigma = \text{const}$, что равносильно $\sigma_0 = 0$, получим нормальное $\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразие, т.е. косимплектическое многообразие.

Используя процедуру дифференциального продолжения, с учетом (8) нами получена вторая группа структурных уравнений нормального $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия

$$\begin{aligned}
 d\omega_b^a &= -\omega_c^a \wedge \omega_b^c + A_{bd}^{ac} \omega^d \wedge \omega_c, \\
 d\sigma_0 &= \sigma_{00} \omega,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где A_{bd}^{ac} , σ_{00} – гладкие функции. При этом

$$A_{bd}^{[ac]} = A_{[bd]}^{ac} = 0. \tag{10}$$

Проделив процедуру дифференциального продолжения второй группы структурных уравнений, получим

$$dA_{bd}^{ac} = A_{ed}^{ac} \omega_b^e + A_{be}^{ac} \omega_d^e - A_{bd}^{ec} \omega_e^a - A_{bd}^{ae} \omega_e^c + A_{bde}^{ac} \omega^e + A_{bd}^{ace} \omega_e - 2A_{be}^{ac} \sigma_0 \omega, \tag{11}$$

где A_{bdf}^{ac} , A_{bd}^{ace} – подходящие гладкие функции. При этом

$$A_{b[df]}^{ac} = A_{bd}^{[ce]} = 0. \tag{12}$$

С учетом (6) и (7) компоненты формы римановой связности [6] нормальных $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразий примут вид

$$\begin{aligned} 1) \quad \omega_b^a &= 0; & 2) \quad \omega_0^a &= \delta_b^a \sigma_0 \omega^b; & 3) \quad \omega_a^0 &= -\delta_a^b \sigma_0 \omega_b; \\ 4) \quad \omega_{\hat{b}}^a &= 0; & 5) \quad \omega_0^{\hat{a}} &= \delta_b^a \sigma_0 \omega_b; & 6) \quad \omega_a^0 &= -\delta_a^b \sigma_0 \omega_b. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим вторую группу уравнений связности в главном расслоении реперов [6]:

$$d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k + \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \quad (14)$$

где $\{R_{jkl}^i\}$ – компоненты тензора римановой кривизны. Хорошо известно [11], что компоненты тензора римановой кривизны обладают свойствами:

$$\begin{aligned} 1) \quad R_{ijkl} &= -R_{jikl}; & 2) \quad R_{ijkl} &= -R_{ijlk}; & 3) \quad R_{ijkl} &= R_{klij}; \\ 4) \quad R_{jkl}^i + R_{klj}^i + R_{ljk}^i &= 0 - \text{тождество Риччи.} \end{aligned}$$

Расписывая соотношение (14) на пространстве присоединенной G-структуры нормального $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия, с учетом свойств компонент тензора римановой кривизны, (8) и (13), получим следующие выражения для ненулевых компонент тензора римановой кривизны нормального $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия:

$$R_{bcd}^a = -4\delta_{[c}^a \delta_{d]}^b \sigma_0^2; \quad R_{bcd}^a = A_{bc}^{ad} - \delta_c^a \delta_b^d \sigma_0^2; \quad R_{0b0}^a = -\sigma_{00} \delta_b^a - \sigma_0^2 \delta_b^a. \quad (15)$$

Как известно [12], компоненты тензора Риччи вычисляются по формуле $r_{ij} = -R_{ijk}^k$. Зная выражения для компонент тензора римановой кривизны на пространстве присоединенной G-структуры, получим выражения для компонент тензора Риччи нормального $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия на пространстве присоединенной G-структуры:

$$\begin{aligned} 1) \quad r_{ab} &= 0; & 2) \quad r_{\hat{a}\hat{b}} &= 0; \\ 3) \quad r_{00} &= -2n(\sigma_{00} + \sigma_0^2); & 4) \quad r_{\hat{a}\hat{b}} &= r_{b\hat{a}} = A_{bc}^{ac} - 2n\sigma_0^2 \delta_b^a - \delta_b^a \sigma_{00}; \\ 5) \quad r_{\hat{a}0} &= r_{0\hat{a}} = 0; & 6) \quad r_{a0} &= r_{0a} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Вычислим скалярную кривизну κ на пространстве присоединенной G-структуры по формуле $\kappa = g^{ij} r_{ij}$, где g^{ij} – компоненты контравариантного метрического тензора. Используя соотношения (16) и матрицу (1) тензора g , получим

$$\kappa = g^{00} r_{00} + g^{\hat{a}\hat{b}} r_{\hat{a}\hat{b}} + g^{b\hat{a}} r_{b\hat{a}} = 2A_{ab}^{ab} - 4n\sigma_{00} - 2n\sigma_0^2 - 4n^2 \sigma_0^2. \quad (17)$$

4. Нормальные $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия постоянной кривизны. Пусть M – $\mathcal{AC}$ -многообразие постоянной кривизны k . Тогда компоненты тензора римановой кривизны на пространстве расслоения реперов удовлетворяют соотношениям

$$R_{ijkl} = k(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}).$$

Расписав их на пространстве присоединенной G-структуры, получим, что ненулевые компоненты тензора римановой кривизны многообразия постоянной кривизны имеют вид

$$R_{\hat{a}\hat{b}cd} = k\delta_{cd}^{ab}, \quad R_{\hat{a}bcd} = k\delta_c^a \delta_b^d, \quad R_{\hat{a}0c0} = k\delta_c^a. \quad (18)$$

ТЕОРЕМА 1. *Нормальное $l\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразие является многообразием постоянной кривизны k тогда и только тогда, когда $A_{bc}^{ad} = \sigma_{00} = 0$. При этом $k = -\sigma_0^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сравнивая соотношения (15) и (18) получим

$$\begin{aligned} R_{bcd}^a &= R_{\widehat{abcd}} = -2\delta_{[c}^a \delta_{d]}^b \sigma_0^2 = k\delta_{cd}^{ab} &\implies k &= -\sigma_0^2, \\ R_{bcd}^a &= R_{\widehat{abcd}} = A_{bc}^{ad} - \delta_c^a \delta_b^d \sigma_0^2 = k\delta_c^a \delta_b^d &\implies A_{bc}^{ad} &= 0, \\ R_{0c0}^a &= R_{\widehat{a0c0}} = -\sigma_{00}\delta_c^a - \sigma_0^2\delta_c^a = k\delta_c^a &\implies \sigma_{00} &= 0. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Многообразие постоянной кривизны называют *пространственной формой*. Многообразие нулевой постоянной кривизны называют *плоским*.

СЛЕДСТВИЕ. *Нормальное $l\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразие M , являющееся пространственной формой, имеет неположительную кривизну. Причем,*

- 1) $k = -1$ тогда и только тогда, когда M – конформно плоское многообразие Кенмоцу;
- 2) $k = 0$ тогда и только тогда, когда M – плоское косимплектическое многообразие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть M – конформно плоское многообразие Кенмоцу. Заметим, что [13] конформно плоское многообразие Кенмоцу является пространством постоянной кривизны $k = -1$. Согласно [13] первая группа структурных уравнений многообразий Кенмоцу имеет вид

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^a &= -\omega_b^a \wedge \omega^b + \omega \wedge \omega^a; \\ 2) \quad d\omega_a &= \omega_a^b \wedge \omega_b + \omega \wedge \omega_a; \\ 3) \quad d\omega &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Сравнивая эти уравнения со структурными уравнениями нормальных $l\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразий (8), заключаем, что M – это нормальное $l\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразие при $\sigma_0 = 1$. Для многообразий Кенмоцу, являющихся пространствами постоянной кривизны, $k = -1$, $A_{cd}^{ab} = 0$ [14]. Следовательно, в силу теоремы 1 M – нормальное $l\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразие постоянной кривизны $k = -1$.

Обратно, пусть M – нормальное $l\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразие постоянной кривизны $k = -1$. Следовательно, $\sigma_0 = \pm 1$ и $A_{cd}^{ab} = 0$. При $\sigma_0 = 1$ структурные уравнения M примут вид (19). То есть M – многообразие Кенмоцу, а значит, в силу выше сказанного M – конформно плоское многообразие Кенмоцу. При $\sigma_0 = -1$ структурные уравнения M примут вид

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^a &= -\omega_b^a \wedge \omega^b - \omega \wedge \omega^a; \\ 2) \quad d\omega_a &= \omega_a^b \wedge \omega_b - \omega \wedge \omega_a; \\ 3) \quad d\omega &= 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Обозначим $\tilde{\omega} = -\omega$. Данные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} 1) \quad d\omega^a &= -\omega_b^a \wedge \omega^b + \tilde{\omega} \wedge \omega^a; \\ 2) \quad d\omega_a &= \omega_a^b \wedge \omega_b + \tilde{\omega} \wedge \omega_a; \\ 3) \quad d\tilde{\omega} &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

То есть и в этом случае M – конформно плоское многообразие Кенмоцу.

2) Пусть M – нормальное $l\mathcal{AC}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразие постоянной кривизны $k = 0$. Следовательно, $\sigma_0 = 0$. Получаем, что M – косимплектическое многообразие нулевой постоянной кривизны, т.е. плоское косимплектическое многообразие.

Пусть M – плоское косимплектическое многообразие. В силу определения локально конформного преобразования оно гомотетично нормальному $l\mathcal{AC}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразию с $\sigma_0 = 0$. Следовательно, M – плоское нормальное $l\mathcal{AC}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразие.

Псевдориманово многообразие M называется η -эйнштейновым многообразием типа (α, β) , если его тензор Риччи удовлетворяет уравнению

$$r = \alpha g + \beta \eta \otimes \eta,$$

где α, β – подходящие гладкие функции [15].

Если $\beta = 0$, то M – эйнштейново многообразие. Примером эйнштейнова многообразия является пространство постоянной кривизны.

Итак, компоненты тензора Риччи η -эйнштейнова многообразия типа (α, β) удовлетворяют соотношениям

$$r_{ij} = \alpha g_{ij} + \beta(\eta \otimes \eta)_{ij}.$$

Расписав его компоненты на пространстве присоединенной G-структуры $\mathcal{AC}$ -многообразия, с учетом (1), будем иметь

$$\begin{aligned} r_{ab} &= 0, & r_{\widehat{a}\widehat{b}} &= 0, \\ r_{\widehat{a}0} &= r_{0\widehat{a}} = 0, & r_{a0} &= r_{0a} = 0, \\ r_{ab} &= r_{b\widehat{a}} = \alpha g_{ab} + \beta(\eta \otimes \eta)_{ab} = \alpha \delta_b^a, \\ r_{00} &= \alpha g_{00} + \beta(\eta \otimes \eta)_{00} = \alpha + \beta. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Тензор Риччи η -эйнштейнова $\mathcal{AC}$ -многообразия типа (α, β) имеет следующие выражения для компонент на пространстве расслоения:

$$r_{\widehat{a}b} = r_{b\widehat{a}} = \alpha \delta_b^a, \quad r_{00} = \alpha + \beta,$$

где α, β – гладкие функции.

Значит, для нормального $l\mathcal{AC}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразия, с учетом (16) получим следующие выражения:

$$\begin{cases} \alpha \delta_b^a = A_{bc}^{ac} - 2n\sigma_0^2 \delta_b^a - \sigma_{00} \delta_b^a, \\ \alpha + \beta = -2n(\sigma_0^2 + \sigma_{00}). \end{cases}$$

Решая данную систему относительно α, β получим

$$\alpha = \frac{1}{n} A_{ab}^{ab} - 2n\sigma_0^2 - \sigma_{00}, \quad \beta = -\frac{1}{n} A_{ab}^{ab} - 2n\sigma_{00} + \sigma_{00}. \quad (23)$$

Если M – нормальное $l\mathcal{AC}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразие постоянной кривизны, то с учетом теоремы 1 получим $\alpha = -2n\sigma_0^2$.

Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Если нормальное $l\mathcal{AC}\mathcal{C}\mathcal{S}$ -многообразие M является η -эйнштейновым многообразием типа (α, β) , то справедливо (23). Если к тому же M – многообразие постоянной кривизны, то оно является эйнштейновым многообразием с космологической константой $\alpha = -2n\sigma_0^2$.

5. Нормальные $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия постоянной Φ -голоморфной секционной кривизны. Φ -голоморфной секционной (короче, ΦHS -) кривизной $H(X)$ [16] на многообразии M в направлении X , $X \neq 0$, $X \in \mathcal{L}$, называется кривизна в двумерном направлении $X \wedge \Phi X$

$$H(X) = \langle R(X, \Phi X)X, \Phi X \rangle \|X\|^{-4}.$$

$\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразие называется *многообразием точечно постоянной ΦHS -кривизны*, если для всех $X \in \mathcal{L}$ выполняется тождество

$$\langle R(X, \Phi X)X, \Phi X \rangle = c\|X\|^4,$$

где $c \in C^\infty(M)$ [17].

ТЕОРЕМА 3 [6]. $\mathcal{AC}$ -многообразие является многообразием точечно постоянной ΦHS -кривизны *с тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры*

$$R^{(a}{}_{(bc)}{}^d) = \frac{c}{2} \delta_{bc}^{ad},$$

где $\delta_{bc}^{ad} = \delta_b^a \delta_c^d + \delta_c^a \delta_b^d$ – симметричная кронекеровская дельта второго порядка.

Из соотношений для компоненты тензора римановой кривизны (15) нормального $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия найдем

$$R^a{}_{bc}{}^d = A_{bc}^{ad} - \delta_c^a \delta_b^d \sigma_0^2.$$

Произведем симметризацию по паре верхних и паре нижних индексов тензора $R^a{}_{bc}{}^d$

$$\begin{aligned} R^{(a}{}_{(bc)}{}^d) &= \frac{1}{4} (A_{(bc)}^{(ad)} - \delta_{(c}^{(a} \delta_{b)}^d \sigma_0^2) = A_{bc}^{ad} - \frac{1}{4} (\delta_c^a \delta_b^d + \delta_c^d \delta_b^a + \delta_b^a \delta_c^d + \delta_b^d \delta_c^a) \sigma_0^2 \\ &= A_{bc}^{ad} - \frac{1}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{ad} \sigma_0^2. \end{aligned}$$

Принимая во внимание теорему 3, условие постоянства ΦHS -кривизны c для нормального $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия примет вид

$$A_{bc}^{ad} = \frac{1}{2} \tilde{\delta}_{bc}^{ad} (\sigma_0^2 + c). \quad (24)$$

Таким образом, доказана следующая

ТЕОРЕМА 4. *Нормальное $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразие является многообразием точечно постоянной ΦHS -кривизны c тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G -структуры выполняется соотношение (24).*

Многообразие M называется *многообразием глобально постоянной ΦHS -кривизны c* , если оно имеет точечно постоянную ΦHS -кривизну $c = \text{const}$.

Найдем аналитический критерий глобального постоянства ΦHS -кривизны c нормальных $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразий.

Продифференцируем внешним образом соотношение (24):

$$dA_{bc}^{ad} = \frac{1}{2} \delta_{bc}^{ad} (2\sigma_0 d\sigma_0 + dc).$$

С учетом (9) и (11) это соотношение примет вид

$$A_{ed}^{ac}\omega_b^e + A_{be}^{ac}\omega_d^e - A_{bd}^{ec}\omega_e^a - A_{bd}^{ae}\omega_e^c + A_{bde}^{ac}\omega^e + A_{bd}^{ace}\omega_e - 2A_{be}^{ac}\sigma_0\omega - \delta_{bd}^{ac}\sigma_0\sigma_{00}\omega = \frac{1}{2}\delta_{bd}^{ac}dc.$$

После необходимых сокращений с учетом (24) получим

$$A_{bde}^{ac}\omega^e + A_{bd}^{ace}\omega_e - \sigma_0(c\delta_{bd}^{ac} + \sigma_0^2\delta_{bd}^{ac} + \sigma_{00}\delta_{bd}^{ac})\omega = \frac{1}{2}\delta_{bd}^{ac}dc.$$

Поскольку $c \in C^\infty(M)$, dc (а точнее $d(\pi^*c) = \pi^*(dc)$) является горизонтальной формой, а значит $dc = c^e\omega_e + c_e\omega^e + c_0\omega$. С учетом этого, а также ввиду линейной независимости базисных форм, получаем, что

$$1) \quad A_{bde}^{ac} = \frac{1}{2}\delta_{bd}^{ac}c_e; \quad 2) \quad A_{bd}^{ace} = \frac{1}{2}\delta_{bd}^{ac}c^e; \quad 3) \quad c_0 = -2\sigma_0(c + \sigma_0^2 + \sigma_{00}). \quad (25)$$

Свернем (25)₁ и (25)₂ по индексам d и c :

$$1) \quad 2A_{bde}^{ad} = (n+1)\delta_b^a c_e; \quad 2) \quad 2A_{bd}^{ade} = (n+1)\delta_b^a c^e. \quad (26)$$

Альтернируя, например, (26)₁ по индексам b и e , с учетом (10) и (12) получим

$$c_e\delta_b^a - c_b\delta_e^a = 0.$$

Свернем по индексам a и b :

$$c_e(n-1) = 0.$$

Отсюда вытекает, что так как $n \neq 1$, $c_e = 0$. Проводя аналогичные операции с (26)₂, получим $c^e = 0$.

Рассматривая (25)₃, получим, что $c_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $\sigma_0 = 0$ или $c = -\sigma_0^2 - \sigma_{00}$.

Напомним, что условие $\sigma_0 = 0$ равносильно тому, что нормальное $lc\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F}$ -многообразие является косимплектическим, при этом $\sigma_{00} = 0$. Тем самым доказана

ТЕОРЕМА 5. Если нормальное $lc\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F}$ -многообразие является многообразием глобально постоянной ФHS-кривизны c , то оно или является косимплектическим (в этом случае $c = 0$), или имеет ФHS-кривизну $c = -\sigma_0^2 - \sigma_{00} = \text{const}$.

6. Тензор Вейля нормального $lc\mathcal{A}\mathcal{C}\mathcal{F}$ -многообразия. Рассмотрим тензор типа $(3, 1)$, инвариантный относительно конформных преобразований метрики. Это тензор Вейля $\mathcal{W}$ конформной кривизны [18]. Тензор конформной кривизны существует в любом римановом пространстве, причем его обращение в нуль в данном пространстве $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $\dim M > 3$, есть необходимый и достаточный признак того, что это пространство конформно плоское [18], [19].

Напомним, что псевдориманово многообразие $(M, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ называется конформно плоским, если метрика g в некоторой окрестности каждой точки $m \in M$ допускает конформное преобразование в плоскую метрику. Например, хорошо известно [18], что всякое двумерное риманово многообразие конформно плоское.

Тензор Вейля конформной кривизны $\mathcal{A}\mathcal{C}$ -структуры вычисляется по формуле [6], [18]:

$$\mathcal{W}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + \frac{1}{2n-1}(\langle X, Z \rangle \text{ric } Y - \langle Y, Z \rangle \text{ric } X + r(X, Z)Y - r(Y, Z)X)$$

$$+ \frac{\kappa}{2n(2n-1)}(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y),$$

где $\text{ric } X$ – эндоморфизм Риччи [6] модуля $X(M)$.

В терминах ковариантных компонент данная формула примет вид

$$\mathcal{W}_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{2n-1}(r_{il}g_{jk} + r_{jk}g_{il} - r_{ik}g_{jl} - r_{jl}g_{ik}) + \frac{\kappa}{2n(2n-1)}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad (27)$$

где R_{ijkl} – соответствующие компоненты тензора римановой кривизны; r_{ij} – компоненты тензора Риччи; g_{ij} – компоненты метрического тензора; κ – скалярная кривизна.

Как видно из (27), тензор Вейля обладает всеми классическими свойствами симметрии тензора римановой кривизны.

Расписывая (27) на пространстве присоединенной G -структуры с учетом (15)–(17) и (1), получим выражения компонент тензора Вейля нормального $lc\mathcal{AC}_{\mathcal{G}}$ -многообразия:

$$\begin{aligned} 1) \quad \mathcal{W}_{\widehat{abcd}} &= \frac{1}{n(2n-1)}(\delta_c^b A_{de}^{ae} n + \delta_d^a A_{ce}^{be} n - \delta_d^b A_{ce}^{ae} n - \delta_c^a A_{de}^{be} n + A_{eh}^{eh} \delta_{cd}^{ab}); \\ 2) \quad \mathcal{W}_{\widehat{abcd}} &= \frac{1}{n(2n-1)}(2n^2 A_{bc}^{ad} - A_{bc}^{ad} n - \delta_b^d A_{ce}^{ae} n - \delta_c^a A_{be}^{de} n + A_{eh}^{eh} \delta_c^a \delta_b^d); \\ 3) \quad \mathcal{W}_{\widehat{aob0}} &= \frac{1}{n(2n-1)}(A_{eh}^{eh} \delta_b^a - A_{bc}^{ac} n). \end{aligned} \quad (28)$$

Выясним условия обращения в нуль следующих объектов.

1) $\mathcal{W}_{\widehat{abcd}} = 0$ равносильно

$$\delta_c^b A_{de}^{ae} n + \delta_d^a A_{ce}^{be} n - \delta_d^b A_{ce}^{ae} n - \delta_c^a A_{de}^{be} n + A_{eh}^{eh} \delta_{cd}^{ab} = 0.$$

Свернем это соотношение по a и c ; получим

$$\begin{aligned} &\delta_a^b A_{de}^{ae} n + \delta_d^a A_{ae}^{be} n - \delta_d^b A_{ae}^{ae} n - \delta_a^a A_{de}^{be} n + A_{eh}^{eh} \delta_{ad}^{ab} \\ &= A_{de}^{be} n + A_{de}^{be} n - \delta_d^b A_{ae}^{ae} n - n^2 A_{de}^{be} + A_{eh}^{eh} \delta_d^b (n-1) \\ &= 2n A_{de}^{be} - n^2 A_{de}^{be} - A_{eh}^{eh} \delta_d^b = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Еще раз свернем по b и d :

$$2n A_{be}^{be} - n^2 A_{be}^{be} - A_{eh}^{eh} \delta_b^b = 2n A_{be}^{be} - n^2 A_{be}^{be} - n A_{be}^{be} = n A_{be}^{be} (1-n) = 0. \quad (30)$$

Значит, $A_{ab}^{ab} = 0$. С учетом этого из (29) получим $n A_{de}^{be} (n-2) = 0$, т.е. для многообразия размерности больше пяти получаем $A_{cb}^{ab} = 0$.

Обратно, если $A_{cb}^{ab} = 0$, то с учетом (28)₁ получим $\mathcal{W}_{\widehat{abcd}} = 0$.

Итак, для многообразия размерности больше пяти равенство $\mathcal{W}_{\widehat{abcd}} = 0$ эквивалентно $A_{cb}^{ab} = 0$.

2) $\mathcal{W}_{\widehat{abcd}} = 0$ равносильно

$$2n^2 A_{bc}^{ad} - A_{bc}^{ad} n - \delta_b^d A_{ce}^{ae} n - \delta_c^a A_{be}^{de} n + A_{eh}^{eh} \delta_c^a \delta_b^d = 0. \quad (31)$$

Свернув это соотношение по a и b , получим

$$2n^2 A_{ac}^{ad} - A_{ac}^{ad} n - \delta_a^d A_{ce}^{ae} n - \delta_c^a A_{ae}^{de} n + A_{eh}^{eh} \delta_c^a \delta_a^d = A_{ac}^{ad} n(2n - 3) + A_{eh}^{eh} \delta_c^d = 0. \quad (32)$$

Затем, выполнив свертку (32) по c и d будем иметь

$$A_{ac}^{ac} n(2n - 3) + A_{eh}^{eh} n = 2n A_{ac}^{ac} (n - 1) = 0.$$

То есть $A_{ab}^{ab} = 0$. С учетом этого из (32) получим $A_{cb}^{ab} = 0$. А с учетом этого, в свою очередь из (31) получим $A_{cd}^{ab} = 0$.

Обратно, если $A_{cd}^{ab} = 0$, то с учетом (28)₂ получим $\mathcal{W}_{\widehat{abcd}} = 0$.

Таким образом, $\mathcal{W}_{\widehat{abcd}} = 0$ равносильно $A_{bc}^{ad} = 0$.

3) $\mathcal{W}_{\widehat{aob0}} = 0$ эквивалентно

$$A_{eh}^{eh} \delta_b^a - A_{bc}^{ac} n = 0. \quad (33)$$

То есть в этом случае

$$A_{bc}^{ac} = \frac{1}{n} A_{eh}^{eh} \delta_b^a = \lambda \delta_b^a,$$

где λ – некоторая функция.

В силу (28) условие $A_{bc}^{ad} = 0$ влечет обращение в нуль тензора Вейля. Таким образом, справедлива

ТЕОРЕМА 6. *Обращение в нуль тензора Вейля на пространстве присоединенной G -структуры нормального $l\mathcal{AC}\mathcal{E}$ -многообразия равносильно тому, что $A_{cd}^{ab} = 0$.*

Выясним, когда конформно плоское нормальное $l\mathcal{AC}\mathcal{E}$ -многообразие M будет эйнштейновым (и значит, пространством постоянной кривизны [18]). Согласно (16), с учетом теоремы 6, это будет тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} -2n(\sigma_{00} + \sigma_0^2) = \alpha, \\ -2n\sigma_0^2 \delta_b^a - \sigma_{00} \delta_b^a = \alpha \delta_b^a, \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} -2n\sigma_{00} - 2n\sigma_0^2 = \alpha, \\ 2n\sigma_0^2 + \sigma_{00} = -\alpha, \end{cases}$$

откуда $\sigma_{00} = 0$, т.е. $\sigma_0 = \text{const}$, $\alpha = -2n\sigma_0^2$ и, значит, $k = \sigma_0^2$. Доказана

ТЕОРЕМА 7. *Конформно плоское нормальное $l\mathcal{AC}\mathcal{E}$ -многообразие M является пространством постоянной кривизны k тогда и только тогда, когда $\sigma_0 = \text{const}$. При этом его кривизна $k = -\sigma_0^2$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Конформно плоское нормальное $l\mathcal{AC}\mathcal{E}$ -многообразие M является эйнштейновым многообразием тогда и только тогда, когда M пространство постоянной неположительной кривизны $k = -\sigma_0^2$. При этом*

- 1) $k = -1$ тогда и только тогда, когда M – конформно плоское многообразие Кенмоцу;
- 2) $k = 0$ тогда и только тогда, когда M – плоское косимплектическое многообразие.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение, эквивалентное данному следствию, из других соображений было получено в следствии к теореме 1.

7. Локально симметрические нормальные $l\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразия. Риманово многообразие M называется *локально симметрическим*, если в некоторой окрестности каждой его точки геодезическая симметрия с центром в этой точке является изометрией.

Необходимым и достаточным условием локальной симметричности риманова многообразия является $\nabla R = 0$.

Поскольку R – тензор типа $(3, 1)$, его ковариантные компоненты на пространстве расслоения реперов удовлетворяют соотношениям

$$dR_{ijkl} - R_{sjkl}\omega_i^s - R_{iskl}\omega_j^s - R_{ijsl}\omega_k^s - R_{ijks}\omega_l^s = R_{ijkl,t}\omega^t, \quad (34)$$

где $R_{ijkl,t} = \langle \nabla_{e_t}(R)(e_k, e_l)e_j, e_i \rangle$.

Расписывая соотношения (34) на пространстве присоединенной G -структуры с учетом (13), (15) и свойств тензора римановой кривизны, получим

- 1) $dR_{0a0\widehat{b}} - R_{ia0\widehat{b}}\omega_0^i - R_{0i0\widehat{b}}\omega_a^i - R_{0a0\widehat{b}}\omega_0^i - R_{0a0i}\omega_{\widehat{b}}^i$
 $= dR_{\widehat{b}0a0} - R_{\widehat{b}0a0}\omega_0^0 - R_{\widehat{b}0c0}\omega_a^c - R_{\widehat{b}0a0}\omega_0^0 - R_{\widehat{c}0a0}\omega_{\widehat{b}}^{\widehat{c}}$
 $= d(-\sigma_{00}\delta_a^b - \sigma_0^2\delta_a^b) + \sigma_{00}\delta_c^b\omega_a^c + \sigma_0^2\delta_c^b\omega_a^c - \sigma_{00}\delta_a^c\omega_b^c - \sigma_0^2\delta_a^c\omega_b^c = -2\sigma_0\sigma_{00}\delta_a^b\omega = 0;$
- 2) $dR_{0ab\widehat{c}} - R_{iab\widehat{c}}\omega_0^i - R_{0ib\widehat{c}}\omega_a^i - R_{0a0\widehat{c}}\omega_b^i - R_{0abi}\omega_{\widehat{c}}^i$
 $= -R_{\widehat{d}ab\widehat{c}}\omega_0^{\widehat{d}} - R_{0a0\widehat{c}}\omega_b^0 = -A_{ab}^{dc}\sigma_0\omega_d + \delta_a^c\sigma_0^3\omega_b - \sigma_{00}\delta_a^c\sigma_0\omega_b - \delta_a^c\sigma_0^3\omega_b$
 $= -\sigma_0(A_{ab}^{dc} + \sigma_{00}\delta_a^c\delta_b^d)\omega_d = 0;$
- 3) $dR_{0a\widehat{b}\widehat{c}} - R_{ia\widehat{b}\widehat{c}}\omega_0^i - R_{0i\widehat{b}\widehat{c}}\omega_a^i - R_{0a0\widehat{c}}\omega_b^i - R_{0a0i}\omega_{\widehat{c}}^i$
 $= -R_{\widehat{d}a\widehat{b}\widehat{c}}\omega_0^{\widehat{d}} - R_{0a0\widehat{c}}\omega_b^0 - R_{0a0\widehat{b}}\omega_c^0 = \delta_{da}^{bc}\sigma_0^3\omega^d - \sigma_{00}\sigma_0\delta_a^c\omega_b^c - \sigma_0^3\delta_a^c\omega_b^c$
 $+ \sigma_{00}\sigma_0\delta_b^a\omega^c + \sigma_0^3\delta_b^a\omega^c = -\delta_{da}^{bc}\sigma_0\sigma_{00}\omega^d = 0;$
- 4) $dR_{0\widehat{a}b\widehat{c}} - R_{i\widehat{a}b\widehat{c}}\omega_0^i - R_{0ib\widehat{c}}\omega_a^i - R_{0\widehat{a}i\widehat{c}}\omega_b^i - R_{0\widehat{a}bi}\omega_{\widehat{c}}^i$
 $= -R_{\widehat{d}\widehat{a}b\widehat{c}}\omega_0^{\widehat{d}} - R_{0\widehat{a}0\widehat{c}}\omega_b^0 - R_{0\widehat{a}b0}\omega_c^0 = \delta_{bc}^{da}\sigma_0^3\omega_d - \sigma_{00}\sigma_0\delta_c^a\delta_b^d\omega_d$
 $- \sigma_0^3\delta_a^c\delta_b^d\omega_d + \sigma_{00}\sigma_0\delta_b^a\delta_c^d\omega_d + \sigma_0^3\delta_b^a\delta_c^d\omega_d = \sigma_{00}\sigma_0\delta_{bc}^{ad}\omega_d = 0;$
- 5) $dR_{0\widehat{a}b\widehat{c}} - R_{i\widehat{a}b\widehat{c}}\omega_0^i - R_{0ib\widehat{c}}\omega_a^i - R_{0\widehat{a}i\widehat{c}}\omega_b^i - R_{0\widehat{a}bi}\omega_{\widehat{c}}^i$
 $= -R_{\widehat{d}\widehat{a}b\widehat{c}}\omega_0^{\widehat{d}} - R_{0\widehat{a}b0}\omega_c^0 = A_{db}^{ac}\sigma_0\omega^d - \delta_b^a\delta_d^c\sigma_0^3\omega^d + \sigma_{00}\sigma_0\delta_b^a\omega^c + \sigma_0^3\delta_b^a\omega^c$
 $= (A_{db}^{ac} + \sigma_{00}\delta_b^a\delta_d^c)\sigma_0\omega^d = 0;$
- 6) $dR_{ab\widehat{c}\widehat{d}} - R_{ib\widehat{c}\widehat{d}}\omega_a^i - R_{a0\widehat{c}\widehat{d}}\omega_b^i - R_{ab0\widehat{d}}\omega_c^i - R_{ab0i}\omega_{\widehat{d}}^i$
 $= d(-\delta_{ab}^{cd}\sigma_0^2) - R_{eb\widehat{c}\widehat{d}}\omega_a^e - R_{ae\widehat{c}\widehat{d}}\omega_b^e - R_{ab\widehat{e}\widehat{d}}\omega_{\widehat{c}}^{\widehat{e}} - R_{ab\widehat{c}\widehat{e}}\omega_{\widehat{d}}^{\widehat{e}}$
 $= -2\delta_{ab}^{cd}\sigma_0\sigma_{00}\omega + \delta_{eb}^{cd}\sigma_0^2\omega_a^e + \delta_{ae}^{cd}\sigma_0^2\omega_b^e - \delta_{ab}^{ed}\sigma_0^2\omega_e^c - \delta_{ab}^{ce}\sigma_0^2\omega_e^d$
 $= -2\delta_{ab}^{cd}\sigma_0\sigma_{00}\omega = 0;$
- 7) $dR_{\widehat{a}b\widehat{c}\widehat{d}} - R_{i\widehat{b}\widehat{c}\widehat{d}}\omega_a^i - R_{a0\widehat{c}\widehat{d}}\omega_b^i - R_{a0\widehat{b}\widehat{d}}\omega_c^i - R_{a0\widehat{b}i}\omega_{\widehat{d}}^i$
 $= d(-A_{ac}^{bd} + \delta_c^b\delta_a^d\sigma_0^2) - R_{e\widehat{b}\widehat{c}\widehat{d}}\omega_a^e - R_{a\widehat{e}\widehat{c}\widehat{d}}\omega_b^{\widehat{e}} - R_{a\widehat{b}\widehat{e}\widehat{d}}\omega_c^e - R_{a\widehat{b}\widehat{c}\widehat{e}}\omega_{\widehat{d}}^{\widehat{e}}$
 $= A_{ac}^{ed}\omega_e^b + A_{ac}^{be}\omega_e^d - A_{ec}^{bd}\omega_a^e - A_{ae}^{bd}\omega_c^e - A_{ac}^{bde}\omega_e - A_{ace}^{bd}\omega_e + 2A_{ac}^{be}\sigma_0\omega$
 $+ 2\delta_c^b\delta_a^d\sigma_0\sigma_{00}\omega + A_{ec}^{bd}\omega_a^e - \delta_c^b\delta_e^d\sigma_0^2\omega_a^e - A_{ac}^{ed}\omega_e^b + \delta_c^e\delta_a^d\sigma_0^2\omega_e^b$

$$\begin{aligned}
& + A_{ae}^{bd} \omega_c^e - \delta_e^b \delta_a^d \sigma_0^2 \omega_c^e - A_{ac}^{be} \omega_e^d + \delta_c^b \delta_a^e \sigma_0^2 \omega_e^d = -A_{ac}^{bde} \omega_e - A_{ace}^{bd} \omega^e \\
& + 2A_{ac}^{be} \sigma_0 \omega + 2\delta_c^b \delta_a^d \sigma_0 \sigma_{00} \omega = -A_{ac}^{bde} \omega_e - A_{ace}^{bd} \omega^e + 2\sigma_0 (A_{ac}^{be} + \delta_c^b \delta_a^d \sigma_{00}) \omega = 0.
\end{aligned}$$

Объединив результаты, получим

1) $2\sigma_0 \sigma_{00} \delta_a^b \omega = 0;$	2) $\sigma_0 (A_{ab}^{dc} + \sigma_{00} \delta_a^c \delta_b^d) \omega_d = 0;$
3) $\delta_{da}^{bc} \sigma_0 \sigma_{00} \omega^d = 0;$	4) $\sigma_{00} \sigma_0 \delta_{bc}^{ad} \omega_d = 0;$
5) $(A_{db}^{ac} + \sigma_{00} \delta_b^a \delta_d^c) \sigma_0 \omega^d = 0;$	6) $2\delta_{ab}^{cd} \sigma_0 \sigma_{00} \omega = 0;$
7) $-A_{ac}^{bde} \omega_e - A_{ace}^{bd} \omega^e + 2\sigma_0 (A_{ac}^{be} + \delta_c^b \delta_a^d \sigma_{00}) \omega = 0.$	

Отсюда в силу линейной независимости базисных форм будем иметь два случая.

1) $\sigma_0 = A_{ac}^{bde} = A_{ace}^{bd} = 0$. Тогда нормальное $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразие является локально симметрическим косимплектическим многообразием, т.е. [20] косимплектическим многообразием с локально симметрической келеровой составляющей.

2) $A_{cd}^{ab} = \sigma_{00} = 0$. Значит, нормальное $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразие является многообразием постоянной неположительной кривизны.

Объединяя данные результаты получим

ТЕОРЕМА 8. *Локально симметрическое нормальное $lc\mathcal{AC}\mathcal{S}$ -многообразие является либо косимплектическим многообразием с локально симметрической келеровой составляющей, либо многообразием постоянной неположительной кривизны.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Z. Olszak, "Locally conformal almost cosymplectic manifolds", *Colloq. math.*, **57**:1 (1989), 73–87.
- [2] Z. Olszak, R. Roşca, "Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds", *Publ. Math. Debrecen*, **39**:3-4 (1991), 315–323.
- [3] D. Chinea, J. C. Marrero, "Conformal changes of almost cosymplectic manifolds", *Demonstratio Math.*, **25**:3 (1992), 641–656.
- [4] S. I. Goldberg, "Totally geodesic hypersurfaces of Kaehler manifolds", *Pacific J. Math.*, **27**:2 (1968), 275–281.
- [5] S. I. Goldberg, K. Yano, "Integrability of almost cosymplectic structures", *Pacific J. Math.*, **31**:2 (1969), 373–382.
- [6] В. Ф. Кириченко, *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*, МПГУ, М., 2003.
- [7] S. Sasaki, Y. Hatakeyama, "On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. II", *Tôhoku Math. J.* (2), **13** (1961), 281–294.
- [8] D. E. Blair, "The theory of quasi-Sasakian structures", *J. Differential Geometry*, **1** (1967), 331–345.
- [9] В. Ф. Кириченко, Н. С. Баклашова, "Геометрия контактной формы Ли и контактный аналог теоремы Икуты", *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 347–360.
- [10] В. Ф. Кириченко, А. Р. Рустанов, "Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий", *Матем. сб.*, **193**:8 (2002), 71–100.
- [11] Р. Бишоп, Р. Дж. Криттенден, *Геометрия многообразий*, Мир, М., 1967.
- [12] Э. Картан, *Риманова геометрия в ортогональном репере*, Изд-во МГУ, М., 1960.
- [13] В. Ф. Кириченко, "О геометрии многообразий Кенмоцу", *Докл. РАН*, **380**:5 (2001), 585–587.

- [14] С. В. Умнова, *О точечном постоянстве Φ -голоморфной секционной кривизны многообразий Кенмоцу*, МПГУ, М., 2002; Деп. в ВИНТИ 21.03.02, № 514-B2002.
- [15] D. E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Progr. Math., **203**, Birkhäuser, Boston, MA, 2002.
- [16] V. F. Kirichenko, "Generalized quasi-Kaehlerian manifolds and axioms of CR-submanifolds in generalized Hermitian geometry. I", *Geom. Dedicata*, **51**:1 (1994), 75–104.
- [17] I. Ishihara, "Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form", *Kodai Math. J.*, **2**:2 (1976), 171–186.
- [18] А. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, т. 1, 2, Мир, М., 1990.
- [19] П. К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ*, Наука, М., 1976.
- [20] В. Ф. Кириченко, "Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных структур", *Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом.*, **18**, ВИНТИ, М., 1986, 25–71.

В. Ф. Кириченко

Московский педагогический государственный университет

E-mail: highgeom@yandex.ru

Поступило

10.04.2009

С. В. Харитонова

Московский педагогический государственный университет

E-mail: hcb@yandex.ru