Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Рукавишникова, Закон больших чисел для суммы неполных частных рационального числа с фиксированным знаменателем, *Матем. заметки*, 2011, том 90, выпуск 3, 431–444

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8484>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 07:26:10

Закон больших чисел для суммы неполных частных рационального числа с фиксированным знаменателем

М. Г. Рукавишникова

Получена нетривиальная оценка дисперсии суммы неполных частных, ограниченных некоторой величиной, возникающих при разложении в цепную дробь рационального числа с фиксированным знаменателем. В качестве следствия получен закон больших чисел для суммы всех неполных частных.

Библиография: 7 названий.

Основные обозначения. 1. Для натурального числа $d \geq 2$ обозначим через Z_d набор из всех натуральных чисел от 1 до d ; через Z'_d – подмножество в Z_d , состоящее из чисел, взаимно простых с d ; через Z_d^* – подмножество в Z'_d , содержащее числа, не превосходящие $d/2$.

2. Для $a \in Z_d$ запись

$$\frac{a}{d} = [0; q_1, q_2, \dots, q_l]$$

с $q_l \geq 2$ при $a < d$ означает каноническое разложение числа a/d в непрерывную дробь с неполными частными $q_i = q_i(a) = q_i(a; d)$ (натуральные числа) и длиной $l = l_d(a) = l(a)$.

3. Сумма неполных частных в каноническом разложении a/d в непрерывную дробь

$$S_d(a) = \sum_{i=1}^{l_d(a)} q_i(a).$$

4. Пусть T – положительное вещественное число. Для натурального x определим функцию

$$f_T(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq T, \\ 0, & \text{если } x > T. \end{cases}$$

5. Сумма всех неполных частных, не превосходящих T , в разложении a/d

$$S_d(a; T) = \sum_{i=1}^{l_d(a)} f_T(q_i(a)).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00628-а) и Президиума ДВО РАН (проект № 09-I-П4-03).

6. Среднее значение суммы неполных частных, не превосходящих T , для конечной цепной дроби

$$E_d(T) = \frac{1}{d} \sum_{a \in Z_d} S_d(a; T).$$

7. Средний квадрат суммы неполных частных, не превосходящих T ,

$$M_d(T) = \frac{1}{d} \sum_{a \in Z_d} S_d^2(a; T).$$

8. Дисперсия суммы неполных частных, не превосходящих T ,

$$D_d(T) = \frac{1}{d} \sum_{a \in Z_d} [S_d(a; T) - E_d(T)]^2 = M_d(T) - E_d^2(T).$$

9. Конечные разности функции двух переменных:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,0}a(x, y) &= a(x+1, y) - a(x, y), & \Delta_{0,1}a(x, y) &= a(x, y+1) - a(x, y), \\ \Delta_{1,1}a(x, y) &= \Delta_{0,1}(\Delta_{1,0}a(x, y)) = \Delta_{1,0}(\Delta_{0,1}a(x, y)). \end{aligned}$$

10. Стандартные функции теории чисел:

- $\varphi(\cdot)$ – функция Эйлера;
- $\mu(\cdot)$ – функция Мебиуса;
- $\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Римана;
- $\sigma_k(n) = \sum_{q|n} q^k$ – сумма степеней делителей натурального числа n .

11. $\#M$ – количество элементов множества M .

Введение. Пусть d – натуральное число, большее 2. Величина $S_d(a)$ характеризует количество операций вычитания при выполнении алгоритма Евклида для пары (a, d) в античном варианте. Как известно, в “Началах” Евклида вместо деления с остатком применялось последовательное вычитание.

При анализе качества датчиков случайных чисел, основанных на линейном конгруэнтном методе, возникает задача оценки величины $S_d(a)$ для почти всех $a \in Z'_d$ (см. [1; 3.3.3]). Опираясь на асимптотическую формулу (см. [1; упр. 4.5.3-35], а также [2] и [3])

$$\frac{1}{\varphi(d)} \sum_{a \in Z'_d} S_d(a) = \left(\frac{6}{\pi^2} + o(1) \right) \log^2 d,$$

Д. Кнут сделал следующий вывод: вероятность того, что $S_d(a)$ больше $(\log d)^{2+\varepsilon}$ (для любого фиксированного $\varepsilon > 0$), стремится к нулю при $d \rightarrow \infty$.

В работе [4] было доказано следующее более сильное утверждение на эту тему.

Пусть $g(d)$ – неограниченно возрастающая последовательность положительных вещественных чисел, для которой $g(d) \leq \log^2 d$. Тогда при $d > 2$

$$\frac{1}{\varphi(d)} \# \{a \in Z'_d : S_d(a) \geq g(d) \log d \log \log d\} \ll \frac{1}{g(d)}.$$

В частности, отсюда следует, что в утверждении Кнута вместо показателя $2 + \varepsilon$ можно взять $1 + \varepsilon$.

С помощью методов, предложенных в [5], в настоящей работе для $\log d \leq T \leq \log^2 d$ доказано, что

$$E_d(T) = \frac{12}{\pi^2} \log d \log T + O(\log d), \quad (0.1)$$

$$D_d(T) \ll T \log d + \log^2 d \log T. \quad (0.2)$$

Поскольку

$$\frac{1}{d} \#\{a \in Z_d : \exists q_i(a) \geq T\} \ll \frac{\log d}{T} \quad (0.3)$$

(см. [4; лемма 3]), из (0.1) и (0.2) следует

ТЕОРЕМА. Пусть $g(d)$ – неограниченно возрастающая последовательность положительных вещественных чисел такая, что $g(d) \leq \sqrt{\log \log d}$. Тогда при $d > 2$

$$\frac{1}{d} \#\left\{a \in Z_d : \left| S_d(a) - \frac{12}{\pi^2} \log d \log \log d \right| \geq g(d) \log d \sqrt{\log \log d} \right\} \ll \frac{1}{g^2(d)}.$$

1. О непрерывных дробях. Пусть $a \in Z_d$. В соответствии с определением канонического разложения дроби a/d из пункта основных обозначений для $1 \leq i \leq l_d(a)$ определим взаимно простые неотрицательные целые

$$P_i = P_i(a) = P_i(a; d) \quad \text{и} \quad Q_i = Q_i(a) = Q_i(a; d)$$

как числитель и знаменатель i -й подходящей дроби

$$\frac{P_i}{Q_i} = [0; q_1, \dots, q_{i-1}].$$

Из рекуррентного соотношения $Q_{i+1} = q_i Q_i + Q_{i-1}$ (см. [6]) для знаменателей подходящих дробей следует, что

$$q_i = \left[\frac{Q_{i+1}}{Q_i} \right]. \quad (1.1)$$

Нетрудно показать, что при $a \in Z_d^*$

$$\frac{d-a}{d} = [0; 1, q_1(a) - 1, q_2(a), \dots, q_l(a)], \quad (1.2)$$

и поэтому для любого вещественного $T > 1$

$$S_d(d-a; T) \leq S_d(a; T+1). \quad (1.3)$$

Заметим также, что для $a^* \in Z_d^*$ такого, что $aa^* + (-1)^l \equiv 0 \pmod{d}$, справедливо разложение

$$\frac{a^*}{d} = [0; q_l, \dots, q_2, q_1], \quad (1.4)$$

и при этом (см. [5])

$$Q_{i+1}(a)Q_{l-i+1}(a^*) + Q_i(a)Q_{l-i}(a^*) = d. \quad (1.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отображение $a \rightarrow a^*$ – инволюция на Z_d^* .

Из равенства (1.5) непосредственно следует

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть r – положительное вещественное число. Для любого $a \in Z_d^*$ справедливо, по крайней мере, одно из неравенств:

$$Q_{i+1}(a) < r\sqrt{d} \quad \text{или} \quad Q_{l-i+1}(a^*) < \frac{\sqrt{d}}{r}. \quad (1.6)$$

Если для некоторого номера i одновременно справедливы оба неравенства, то имеем $Q_{l-i+1}(a^*) > \sqrt{d}/2r$.

Нам будет полезно следующее утверждение, вытекающее как частный случай (при $r = 1$) из замечания 2 и неравенства $Q_{i+1} = q_i Q_i + Q_{i-1} \geq 2Q_{i-1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для любого $a \in Z_d^*$ справедливо, по крайней мере, одно из неравенств:

$$Q_{i+1}(a) < \sqrt{d} \quad \text{или} \quad Q_{l-i+1}(a^*) < \sqrt{d}. \quad (1.7)$$

Кроме того, существует не более двух номеров i , для которых выполняются оба неравенства, и при этом $Q_{i+1}(a) > \sqrt{d}/2$.

Пусть $\mathcal{M}$ – множество целочисленных матриц

$$S = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(S) & P'(S) \\ Q(S) & Q'(S) \end{pmatrix}$$

таких, что

$$\det(S) = \pm 1, \quad 0 \leq P \leq Q, \quad 1 \leq P' \leq Q', \quad 1 \leq Q \leq Q'.$$

Далее, $\mathcal{M}(X)$ – подмножество в $\mathcal{M}$, состоящее из матриц S , для которых $Q'(S) < X$, где X – некоторое вещественное число, большее или равное 1. Соответствие (см. [5])

$$(q_1, q_2, \dots, q_l) \rightarrow S = S(q_1, q_2, \dots, q_l) = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

где $\frac{P}{Q} = [0; q_1, \dots, q_{l-1}]$ и $\frac{P'}{Q'} = [0; q_1, \dots, q_l]$, определяет биекцию множества всех конечных наборов натуральных чисел на $\mathcal{M}$.

Для любой матрицы $S \in \mathcal{M}$ определим интервал

$$I(S) = \begin{cases} \left(\frac{P'}{Q'}, \frac{P+P'}{Q+Q'} \right) & \text{для } \det(S) = 1, \\ \left(\frac{P+P'}{Q+Q'}, \frac{P'}{Q'} \right) & \text{для } \det(S) = -1 \end{cases}$$

с длиной

$$\text{mes } I(S) = \frac{1}{Q'(Q+Q')}.$$

Так как каждое из сравнений $QP' \equiv 1 \pmod{Q'}$ и $QP' \equiv -1 \pmod{Q'}$ относительно P' имеет ровно одно решение, то справедливо

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для любой пары (Q, Q') взаимно простых натуральных чисел таких, что $1 \leq Q < Q'$, в $\mathcal{M}$ найдутся ровно две матрицы, содержащие ее в качестве нижней строки

$$S_1 = \begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad S_2 = \begin{pmatrix} Q - P & Q' - P' \\ Q & Q' \end{pmatrix}.$$

При этом $I(S_1) \subset (0; 1/2)$ в том и только в том случае, если $I(S_2) \subset (1/2; 1)$.

В соответствии с вышесказанным, имеет место

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Для любой матрицы $S \in \mathcal{M}$

$$\sum_{1 \leq a < d/2} \chi_{I(S)}\left(\frac{a}{d}\right) = \begin{cases} \frac{d}{Q'(Q+Q')} + O(1), & \text{если } I(S) \subset (0; 1/2), \\ 0, & \text{если } I(S) \subset (1/2; 1), \end{cases}$$

где $\chi_{I(S)}(x)$ – характеристическая функция интервала $I(S)$.

Нам понадобятся еще два утверждения, сформулированные в [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Пересечение $I(S) \cap I(S')$ непусто тогда и только тогда, когда один из интервалов содержится в другом.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Пусть

$$I\begin{pmatrix} P_1 & P'_1 \\ Q_1 & Q'_1 \end{pmatrix} \subset I\begin{pmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{pmatrix},$$

и это включение строгое.

Тогда для некоторой матрицы

$$\begin{pmatrix} P_2 & P'_2 \\ Q_2 & Q'_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$$

выполняются равенства

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{PP_2 + P'Q_2}{QP_2 + Q'Q'_2}, \quad \frac{P'_1}{Q'_1} = \frac{PP'_2 + P'Q'_2}{QP'_2 + Q'Q'_2}.$$

2. Математическое ожидание суммы неполных частных конечной непрерывной дроби.

ЛЕММА 1. Для натурального $d > 2$ и вещественного T таких, что $\log d \leq T \leq \log^2 d$, справедливо равенство

$$A(d; T) = \sum_{\substack{Q'/(T+1) < Q \leq Q' < \sqrt{d} \\ \text{НОД}(Q, Q')=1}} \frac{1}{Q(Q+Q')} = \frac{1}{2\zeta(2)} \log d \log T + O(\log d).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действуя стандартным способом, получим

$$A(d; T) = \sum_{t < \sqrt{d}} \frac{\mu(t)}{t^2} \sum_{Q'_1/(T+1) < Q_1 \leq Q'_1 < \frac{\sqrt{d}}{t}} \frac{1}{Q_1(Q_1 + Q'_1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t < \sqrt{d}} \frac{\mu(t)}{t^2} \left(\sum_{1 \leq Q_1 \leq Q'_1 < \min\{T+1, \sqrt{d}/t\}} \frac{1}{Q_1(Q_1 + Q'_1)} + \sum_{\substack{T+1 \leq Q'_1 < \sqrt{d}/t \\ Q'_1/(T+1) < Q_1 \leq Q'_1}} \frac{1}{Q_1(Q_1 + Q'_1)} \right) \\
&= \sum_{t < \sqrt{d}} \frac{\mu(t)}{t^2} \left(O(\log^2 T) + \sum_{T+1 \leq Q'_1 < \sqrt{d}/t} \left(\int_{Q'_1/(T+1)}^{Q'_1} \frac{dx}{x(x + Q'_1)} + O\left(\frac{T}{(Q'_1)^2}\right) \right) \right) \\
&= \sum_{t < \sqrt{d}} \frac{\mu(t)}{t^2} \sum_{T+1 \leq Q'_1 < \sqrt{d}/t} \frac{1}{Q'_1} \left(\log(T+2) - \log 2 \right) + O(\log^2 T) \\
&= \log\left(\frac{T}{2} + 1\right) \sum_{t < \sqrt{d}} \frac{\mu(t)}{t^2} \log \frac{\sqrt{d}}{t} + O(\log^2 T) = \frac{1}{2\zeta(2)} \log d \log T + O(\log d).
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть для натурального $d > 2$ и вещественного $1 < T < d$ $R_d(a; T)$ – сумма тех $q_i(a; d) \leq T$, для которых неравенства (1.7) выполняются одновременно. Тогда

$$B(d; T) = \sum_{q|d} \sum_{a \in Z_{d/q}^*} R_{d/q}(a; T) \ll d \log T \log \log d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь соответствием (1.8) и замечаниями 3–5, находим

$$\begin{aligned}
\sum_{a \in Z_d^*} R_d(a; T) &= \sum_{a \in Z_d^*} \sum_{\substack{1 \leq i \leq l_d(a) \\ Q_{i+1}(a) < \sqrt{d} \\ Q_{l-i+1}(a^*) < \sqrt{d}}} f_T \left(\left\lceil \frac{Q_{i+1}(a)}{Q_i(a)} \right\rceil \right) \\
&\leq \sum_{1 \leq a < d/2} \sum_{\substack{S \in \mathcal{M} \\ \sqrt{d}/2 < Q'(S) < \sqrt{d} \\ Q'(S)/(T+1) < Q(S) \leq Q'(S)}} \frac{Q'(S)}{Q(S)} \cdot \chi_{I(S)} \left(\frac{a}{d} \right) \\
&= \sum_{\substack{S \in \mathcal{M} \\ \sqrt{d}/2 < Q'(S) < \sqrt{d} \\ Q'(S)/(T+1) < Q(S) \leq Q'(S)}} \frac{Q'(S)}{Q(S)} \sum_{1 \leq a < d/2} \chi_{I(S)} \left(\frac{a}{d} \right) \\
&\leq \sum_{\sqrt{d}/2 < Q' < \sqrt{d}} \sum_{Q'/(T+1) < Q \leq Q'} \frac{Q'}{Q} \left(\frac{d}{Q'(Q + Q')} + O(1) \right) \ll d \log T.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$B(d; T) \ll \sum_{q|d} \frac{d}{q} \log T = d \log T \sigma_{-1}(d) \ll d \log T \log \log d.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Для натурального $d > 2$ и вещественного $1 < T < d$

$$F_d(T) = \sum_{q|d} \sum_{a \in Z_{d/q}^*} \sum_{\substack{1 \leq i \leq l_{d/q}(a) \\ \sqrt{d/q} \leq Q_{i+1}(a; d/q) < \sqrt{d}}} f_T \left(\left\lceil \frac{Q_{i+1}(a; d/q)}{Q_i(a; d/q)} \right\rceil \right) \ll d \log T \log^2 \log d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для $a \in Z_d^*$ $q_i(a) = q_{l-i}(a^*)$, то, принимая во внимание замечания 1–3, а также соответствие (1.8), для $r \geq 1$ получим

$$\begin{aligned}
 H(d; T; r) &= \sum_{a \in Z_d^*} \sum_{\substack{1 \leq i \leq l_d(a) \\ \sqrt{d} \leq Q_{i+1}(a; d) < r\sqrt{d}}} f_T \left(\left[\frac{Q_{i+1}(a; d)}{Q_i(a; d)} \right] \right) \\
 &\leq \sum_{a \in Z_d^*} \sum_{\substack{1 \leq i \leq l_d(a) \\ \sqrt{d}/2r < Q_{l-i+1}(a^*; d) < \sqrt{d}}} f_T \left(\left[\frac{Q_{l-i+1}(a^*; d)}{Q_{l-i}(a^*; d)} \right] \right) \\
 &= \sum_{a^* \in Z_d^*} \sum_{\substack{1 \leq i \leq l_d(a^*) \\ \sqrt{d}/2r < Q_{i+1}(a^*; d) < \sqrt{d}}} f_T \left(\left[\frac{Q_{i+1}(a^*; d)}{Q_i(a^*; d)} \right] \right) \\
 &\leq \sum_{\substack{S \in M \\ Q'(S)/(T+1) < Q(S) \leq Q'(S) \\ \sqrt{d}/2r < Q'(S) < \sqrt{d}}} \frac{Q'(S)}{Q(S)} \sum_{a^* \in Z_d^*} \chi_{I(S)} \left(\frac{a^*}{d} \right) \\
 &\leq \sum_{\substack{Q'/(T+1) < Q \leq Q' \\ \sqrt{d}/2r < Q' < \sqrt{d}}} \frac{Q'}{Q} \left(\frac{d}{Q'(Q+Q')} + O(1) \right) \ll d \log T \log(r+1).
 \end{aligned}$$

Осталось только просуммировать эту оценку для $H(d/q; T; \sqrt{q})$ по всем $q \mid d$ и воспользоваться неравенством

$$\sum_{q \mid d} \frac{\log q}{q} \ll \log^2 \log d$$

(см. [2]). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Для натурального $d > 2$ и вещественного T таких, что $\log d \leq T \leq \log^2 d$, справедливо асимптотическое равенство (0.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$S'_d(a; T) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq l_d(a) \\ Q_{i+1}(a; d) < \sqrt{d}}} f_T \left(\left[\frac{Q_{i+1}(a; d)}{Q_i(a; d)} \right] \right).$$

Опираясь на равенство (1.2), получим

$$\begin{aligned}
 E_d(T) &= \frac{1}{d} \left(\sum_{1 \leq a < d/2} S_d(a; T) + \sum_{d/2 < a \leq d} S_d(a; T) + O(1) \right) \\
 &= \frac{1}{d} \left(2 \sum_{1 \leq a < d/2} S_d(a; T) + \sum_{\substack{1 \leq a < d/2 \\ [d/a] = T+1}} [d/a] + \sum_{\substack{1 \leq a < d/2 \\ T+1 < [d/a] < d}} 1 + O(1) \right) \\
 &= \frac{2}{d} \sum_{1 \leq a < d/2} S_d(a; T) + O(1).
 \end{aligned}$$

Учитывая (1.4) и замечание 3, имеем

$$\begin{aligned}
 E_d(T) &= \frac{2}{d} \sum_{q|d} \sum_{a \in Z_{d/q}^*} S_{d/q}(a; T) + O(1) \\
 &= \frac{2}{d} \sum_{q|d} \sum_{a \in Z_{d/q}^*} (S'_{d/q}(a; T) + S'_{d/q}(a^*; T) - R_{d/q}(a; T)) + O(1) \\
 &= \frac{4}{d} \sum_{q|d} \sum_{a \in Z_{d/q}^*} S'_{d/q}(a; T) + O(\log T \log \log d).
 \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались леммой 2 и замечанием 3. Далее,

$$E_d(T) = \frac{4}{d} \left(\sum_{1 \leq a < d/2} S'_d(a; T) - F_d(T) \right) + O(\log T \log \log d),$$

где $F_d(T)$ – величина из леммы 3. Поэтому

$$E_d(T) = \frac{4}{d} \sum_{1 \leq a < d/2} S'_d(a; T) + O(\log T \log^2 \log d).$$

Воспользовавшись последовательно равенством (1.1) и соответствием (1.8), получим

$$\begin{aligned}
 E_d(T) &= \frac{4}{d} \sum_{1 \leq a < d/2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq l_d(a) \\ Q_{i+1}(a; d) < \sqrt{d}}} f_T \left(\left[\frac{Q_{i+1}(a; d)}{Q_i(a; d)} \right] \right) + O(\log T \log^2 \log d) \\
 &= \frac{4}{d} \sum_{1 \leq a < d/2} \sum_{S \in \mathcal{M}(\sqrt{d})} f_T \left(\left[\frac{Q'(S)}{Q(S)} \right] \right) \chi_{I(S)} \left(\frac{a}{d} \right) + O(\log T \log^2 \log d).
 \end{aligned}$$

Опираясь на замечания 4 и 5, находим

$$\begin{aligned}
 E_d(T) &= 4 \sum_{\substack{1 \leq Q \leq Q' < \sqrt{d} \\ \text{НОД}(Q, Q')=1}} f_T \left(\left[\frac{Q'}{Q} \right] \right) \frac{1}{Q'(Q + Q')} + O(\log T \log^2 \log d) \\
 &= 4 \sum_{\substack{Q'/(T+1) < Q \leq Q' < \sqrt{d} \\ \text{НОД}(Q, Q')=1}} \left(\frac{Q'}{Q} - \left\{ \frac{Q'}{Q} \right\} \right) \frac{1}{Q'(Q + Q')} + O(\log T \log^2 \log d) \\
 &= 4 \sum_{\substack{Q'/(T+1) < Q \leq Q' < \sqrt{d} \\ \text{НОД}(Q, Q')=1}} \frac{1}{Q(Q + Q')} + O(\log d).
 \end{aligned}$$

Осталось только применить лемму 1.

3. Оценка дисперсии суммы неполных частных конечной непрерывной дроби.

ЛЕММА 4. Для натурального $d > 2$ и вещественного T таких, что $\log d \leq T \leq \log^2 d$, справедливо равенство

$$K(d; T) = \sum_{\substack{Q'/(T+1) < Q \leq Q' < \sqrt{d} \\ \text{НОД}(Q, Q')=1}} \frac{\log Q'}{Q(Q+Q')} = \frac{1}{8\zeta(2)} \log^2 d \log T + O(\log^2 d).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 1, имеем

$$\begin{aligned} K(d; T) &= \sum_{t < \sqrt{d}} \frac{\mu(t)}{t^2} \left(\sum_{1 \leq Q_1 \leq Q'_1 < \min\{T+1; \sqrt{d}/t\}} \frac{\log Q'_1}{Q_1(Q_1 + Q'_1)} + \sum_{\substack{T+1 \leq Q'_1 < \sqrt{d}/t \\ Q'_1/(T+1) < Q_1 \leq Q'_1}} \frac{\log Q'_1}{Q_1(Q_1 + Q'_1)} \right) \\ &= \sum_{t < \sqrt{d}} \frac{\mu(t)}{t^2} \left(O(\log^3 T) + \sum_{T+1 \leq Q'_1 < \sqrt{d}/t} \log Q'_1 \left(\int_{Q'_1/(T+1)}^{Q'_1} \frac{dx}{x(x+Q'_1)} + O\left(\frac{T}{(Q'_1)^2}\right) \right) \right) \\ &= \sum_{t < \sqrt{d}} \frac{\mu(t)}{t^2} \sum_{T+1 \leq Q'_1 < \sqrt{d}/t} \frac{\log Q'_1}{Q'_1} \left(\log(T+2) - \log 2 \right) + O(\log^3 T) \\ &= \frac{1}{2} \log T \sum_{t < \sqrt{d}/(T+1)} \frac{\mu(t)}{t^2} \left(\log^2 \frac{\sqrt{d}}{t} - \log^2(T+1) + O\left(\frac{1}{T}\right) \right) + O(\log^2 d) \\ &= \frac{1}{2} \log T \sum_{t < \sqrt{d}/(T+1)} \frac{\mu(t)}{t^2} \left(\log^2 \sqrt{d} - 2 \log t \log \sqrt{d} + \log^2 t \right) + O(\log^2 d) \\ &= \frac{1}{8} \log^2 d \log T \left(\frac{1}{\zeta(2)} + O\left(\frac{T}{\sqrt{d}}\right) \right) + O(\log^2 d) \\ &= \frac{1}{8\zeta(2)} \log^2 d \log T + O(\log^2 d). \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. Для натурального $d > 2$ и вещественного T таких, что $\log d \leq T \leq \log^2 d$, справедлива оценка

$$W_1(d; T) = \frac{1}{d} \sum_{1 \leq a < d/2} \sum_{S \in \mathcal{M}(\sqrt{d})} f_T^2 \left(\left[\frac{Q'(S)}{Q(S)} \right] \right) \chi_{I(S)} \left(\frac{a}{d} \right) \ll T \log d.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изменив порядок суммирования и воспользовавшись замечанием 5, находим

$$\begin{aligned} W_1(d; T) &= \frac{1}{d} \sum_{S \in \mathcal{M}(\sqrt{d})} f_T^2 \left(\left[\frac{Q'(S)}{Q(S)} \right] \right) \sum_{1 \leq a < d/2} \chi_{I(S)} \left(\frac{a}{d} \right) \\ &\leq \sum_{S \in \mathcal{M}(\sqrt{d})} f_T^2 \left(\left[\frac{Q'(S)}{Q(S)} \right] \right) \left(\frac{1}{Q'(S)(Q(S) + Q'(S))} + O\left(\frac{1}{d}\right) \right) \\ &\ll \sum_{Q'/(T+1) < Q \leq Q' < \sqrt{d}} \left(\frac{Q'}{Q} \right)^2 \frac{1}{Q'(Q+Q')} \leq \sum_{Q'/(T+1) < Q \leq Q' < \sqrt{d}} \frac{1}{Q^2} \ll T \log d. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть $n \geq 1$ целое и функция $a(x, y)$ задана в целых точках (x, y) , где $0 \leq x \leq n$, $0 \leq n_0 \leq y \leq n$ с целым n_0 . Предположим, что эта функция удовлетворяет неравенствам

$$a(x, y) \geq 0, \quad \Delta_{1,0}a(x, y) \leq 0, \quad \Delta_{0,1}a(x, y) \leq 0, \quad \Delta_{1,1}a(x, y) \geq 0$$

во всех точках, где эти условия определены. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{\substack{xy \equiv \pm 1 \pmod{n} \\ 0 \leq x \leq n \\ n_0 \leq y \leq n}} a(x, y) = 2 \frac{\varphi(n)}{n^2} \sum_{0 \leq x \leq n} \sum_{n_0 \leq y \leq n} a(x, y) + O_\varepsilon(An^{1/2+\varepsilon}),$$

где $A = a(0, n_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы 6 полностью повторяет рассуждения для случая $n_0 = 0$ из [7].

ЛЕММА 7. Пусть $\log d \leq T \leq \log^2 d$. Тогда

$$\begin{aligned} W_2(d; T) &= \frac{1}{d} \sum_{1 \leq a < d/2} \sum_{\substack{S, S_1 \in \mathcal{M}(\sqrt{d}) \\ S \neq S_1}} f_T\left(\left[\frac{Q'(S)}{Q(S)}\right]\right) f_T\left(\left[\frac{Q'(S_1)}{Q(S_1)}\right]\right) \chi_{I(S) \cap I(S_1)}\left(\frac{a}{d}\right) \\ &\leq \frac{1}{2\zeta^2(2)} \log^2 d \log^2 T + O(\log^2 d \log T). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опираясь на замечания 4–7, получим

$$\begin{aligned} W_2(d; T) &= \frac{2}{d} \sum_{\substack{S, S_1 \in \mathcal{M}(\sqrt{d}) \\ I(S_1) \subset I(S)}} f_T\left(\left[\frac{Q'(S)}{Q(S)}\right]\right) f_T\left(\left[\frac{Q'(S_1)}{Q(S_1)}\right]\right) \sum_{1 \leq a < d/2} \chi_{I(S_1)}\left(\frac{a}{d}\right) \\ &= \frac{2}{d} \sum_{\substack{S, S_1 \in \mathcal{M}(\sqrt{d}) \\ I(S_1) \subset I(S) \subset (0; 1/2)}} f_T\left(\left[\frac{Q'(S)}{Q(S)}\right]\right) f_T\left(\left[\frac{Q'(S_1)}{Q(S_1)}\right]\right) (d \cdot \text{mes } I(S_1) + O(1)) \\ &= 2 \sum_{\substack{S \in \mathcal{M}(\sqrt{d}) \\ I(S) \subset (0; 1/2)}} f_T\left(\left[\frac{Q'(S)}{Q(S)}\right]\right) \\ &\quad \times \sum_{S_2 \in \mathcal{M}(\sqrt{d})} f_T\left(\left[\frac{Q'(SS_2)}{Q(SS_2)}\right]\right) \frac{1}{Q'(SS_2)(Q'(SS_2) + Q(SS_2))} + R \\ &= 2 \sum_{\substack{1 \leq Q \leq Q' < \sqrt{d} \\ \text{НОД}(Q, Q') = 1}} f_T\left(\left[\frac{Q'}{Q}\right]\right) \\ &\quad \times \sum_{\substack{|an - bm| = 1 \\ 1 \leq m \leq n \\ 0 \leq a \leq b \leq n \\ Q'n + Qb < \sqrt{d}}} f_T\left(\left[\frac{Q'n + Qb}{Q'm + Qa}\right]\right) \frac{1}{(Q'n + Qb)(Q'(n + m) + Q(a + b))} + R, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R &\ll \frac{1}{d} \sum_{S, S_1 \in \mathcal{M}(\sqrt{d})} f_T\left(\left[\frac{Q'(S)}{Q(S)}\right]\right) \cdot f_T\left(\left[\frac{Q'(S_1)}{Q(S_1)}\right]\right) \\ &\leq \frac{2}{d} \sum_{1 \leq Q \leq Q' < \sqrt{d}} f_T\left(\left[\frac{Q'}{Q}\right]\right) \sum_{\substack{|an-bm|=1 \\ 1 \leq m \leq n \\ 0 \leq a \leq b \leq n \\ Q'n+Qb < \sqrt{d}}} f_T\left(\left[\frac{Q'n+Qb}{Q'm+Qa}\right]\right). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\left| \frac{Q'n+Qb}{Q'm+Qa} - \frac{n}{m} \right| = \frac{1}{m(Q'm+Qa)} < \frac{1}{m^2} \quad \text{и} \quad \frac{n}{m} - \frac{1}{m^2} < \frac{Q'n+Qb}{Q'm+Qa} < T+1,$$

то

$$\frac{n}{m} < T+2 = T'.$$

Поэтому

$$R \ll \frac{1}{d} \sum_{Q'/T' < Q \leq Q' < \sqrt{d}} \frac{Q'}{Q} \sum_{n/T' < m \leq n < \sqrt{d}/Q'} \frac{n+1}{m} \ll \log d \log^2 T,$$

и для $W_2(d; T)$ справедлива оценка

$$W_2(d; T) \leq 2 \sum_{\substack{Q'/T' < Q \leq Q' < \sqrt{d} \\ \text{НОД}(Q, Q')=1}} \frac{Q'}{Q} \sum_{\substack{bm \equiv \pm 1 \pmod{n} \\ n/T' < m \leq n < \sqrt{d}/Q' \\ 0 \leq b \leq n}} \frac{n+1}{m} \cdot \frac{1}{(Q'n+Qb)^2} + O(\log d \log^2 T).$$

Вычислим сначала для некоторого $P > 1$ сумму

$$U(d; T; P) = \sum_{\substack{Q'/T' < Q \leq Q' < \sqrt{d} \\ \text{НОД}(Q, Q')=1}} \frac{Q'}{Q} \sum_{P < n < \sqrt{d}/Q'} \frac{n+1}{n^3} \sum_{\substack{bm \equiv \pm 1 \pmod{n} \\ 0 \leq b/n \leq 1 \\ 1/T' < m/n \leq 1}} \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{(Q' + Qb/n)^2}.$$

Используя лемму 6 и аппроксимируя сумму интегралом, получаем

$$\begin{aligned} U(d; T; P) &= \sum_{\substack{Q'/T' < Q \leq Q' < \sqrt{d} \\ \text{НОД}(Q, Q')=1}} \frac{Q'}{Q} \sum_{P < n < \sqrt{d}/Q'} \frac{n+1}{n^3} \\ &\quad \times \left(2\varphi(n) \int_{1/T'}^1 \int_0^1 \frac{1}{v} \cdot \frac{1}{(Q' + uQ)^2} du dv + O_\varepsilon \left(n^{1/2+\varepsilon} T' \frac{1}{(Q')^2} \right) \right) \\ &= 2 \sum_{\substack{Q'/T' < Q \leq Q' < \sqrt{d} \\ \text{НОД}(Q, Q')=1}} \frac{Q'}{Q} \sum_{P < n < \sqrt{d}/Q'} \frac{\varphi(n) \cdot (n+1)}{n^3} \frac{\log T'}{Q'(Q' + Q)} \\ &\quad + O_\varepsilon(TP^{-1/2+\varepsilon} \log^2 d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \log T' \sum_{\substack{Q'/T' < Q \leq Q' < \sqrt{d} \\ \text{НОД}(Q, Q')=1}} \frac{1}{Q(Q' + Q)} \sum_{P < n < \sqrt{d}/Q'} \frac{\varphi(n) \cdot (n+1)}{n^3} \\
&\quad + O_\varepsilon(TP^{-1/2+\varepsilon} \log^2 d) \\
&= 2 \log T' \sum_{\substack{Q'/T' < Q \leq Q' < \sqrt{d} \\ \text{НОД}(Q, Q')=1}} \frac{1}{Q(Q' + Q)} \sum_{P < n < \sqrt{d}/Q'} \frac{\varphi(n)}{n^2} \\
&\quad + O_\varepsilon\left(TP^{-1/2+\varepsilon} \log^2 d + \frac{\log d \log^2 T}{P}\right) \\
&= 2 \log T' \sum_{\substack{Q'/T' < Q \leq Q' < \sqrt{d} \\ \text{НОД}(Q, Q')=1}} \frac{1}{Q(Q' + Q)} \left(\frac{1}{\zeta(2)} \log \frac{\sqrt{d}}{Q'} + O(\log P) \right) \\
&\quad + O_\varepsilon\left(TP^{-1/2+\varepsilon} \log^2 d + \frac{\log d \log^2 T}{P}\right) \\
&= \frac{1}{4\zeta^2(2)} \log^2 d \log^2 T' \\
&\quad + O_\varepsilon(\log d \log^2 T \log P + TP^{-1/2+\varepsilon} \log^2 d + \log^2 d \log T).
\end{aligned}$$

При этом мы воспользовались леммами 1 и 4. Положим $P = T^4$ и заметим, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{Q'/T' < Q \leq Q' < \sqrt{d}} \frac{Q'}{Q} \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \leq T^4 \\ 0 \leq b \leq n \\ bm \equiv \pm 1 \pmod{n}}} \frac{n+1}{m} \cdot \frac{1}{(Q'n + Qb)^2} \\
&\ll \sum_{Q'/T' < Q \leq Q' < \sqrt{d}} \frac{1}{QQ'} \sum_{1 \leq m \leq n \leq T^4} \frac{1}{nm} \ll \log d \log^3 T.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$W_2(d; T) \leq 2U(d; T; T^4) + O(\log d \log^3 T) \leq \frac{1}{2\zeta^2(2)} \log^2 d \log^2 T + O(\log^2 d \log T).$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Для натурального $d > 2$ и вещественного T таких, что $\log d \leq T \leq \log^2 d$, имеет место оценка (0.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основываясь на тех же соображениях, что и при вычислении $E_d(T)$, и принимая во внимание (1.3), имеем

$$\begin{aligned}
M_d(T) &= \frac{1}{d} \left(\sum_{1 \leq a < d/2} S_d^2(a; T) + \sum_{\frac{d}{2} < a \leq d} S_d^2(a; T) + O(1) \right) \\
&= \frac{1}{d} \left(\sum_{1 \leq a < d/2} S_d^2(a; T) + \sum_{1 \leq a < d/2} S_d^2(d-a; T) + O(1) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{d} \sum_{1 \leq a < d/2} S_d^2(a; T+1) + O(1) = \frac{2}{d} \sum_{q|d} \sum_{a \in Z_{d/q}^*} S_{d/q}^2(a; T+1) + O(1) \\
&= \frac{2}{d} \sum_{q|d} \sum_{a \in Z_{d/q}^*} (S'_{d/q}(a; T+1) + S'_{d/q}(a^*; T+1) - R_{d/q}(a; T))^2 + O(1) \\
&\leq \frac{2}{d} \sum_{q|d} \sum_{a \in Z_{d/q}^*} (S'_{d/q}(a; T+1) + S'_{d/q}(a^*; T+1))^2 + O(1) \\
&\leq \frac{4}{d} \sum_{q|d} \sum_{a \in Z_{d/q}^*} ([S'_{d/q}(a; T+1)]^2 + [S'_{d/q}(a^*; T+1)]^2) + O(1),
\end{aligned}$$

где $R_{d/q}(a; T)$ – величина из леммы 2. Поскольку $a \rightarrow a^*$ – инволюция на $Z_{d/q}^*$, то

$$\begin{aligned}
M_d(T) &\leq \frac{8}{d} \sum_{q|d} \sum_{a \in Z_{d/q}^*} [S'_{d/q}(a; T+1)]^2 + O(1) \\
&= \frac{8}{d} \sum_{q|d} \sum_{a \in Z_{d/q}^*} \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq l_{d/q}(a) \\ Q_{i+1}(a; d/q) < \sqrt{d/q}}} f_{T+1} \left(\left[\frac{Q_{i+1}(a; d/q)}{Q_i(a; d/q)} \right] \right) \right)^2 + O(1) \\
&\leq \frac{8}{d} \sum_{q|d} \sum_{a \in Z_{d/q}^*} \left(\sum_{\substack{1 \leq i \leq l_{d/q}(a) \\ Q_{i+1}(a; d/q) < \sqrt{d}}} f_{T+1} \left(\left[\frac{Q_{i+1}(a; d/q)}{Q_i(a; d/q)} \right] \right) \right)^2 + O(1) \\
&= \frac{8}{d} \sum_{q|d} \sum_{a \in Z_{d/q}^*} \sum_{\substack{1 \leq i \leq l_{d/q}(a) \\ Q_{i+1}(a; d/q) < \sqrt{d}}} f_{T+1}^2 \left(\left[\frac{Q_{i+1}(a; d/q)}{Q_i(a; d/q)} \right] \right) + O(1) \\
&\quad + \frac{8}{d} \sum_{q|d} \sum_{a \in Z_{d/q}^*} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq l_{d/q}(a), \ i \neq j \\ Q_{i+1}(a; d/q) < \sqrt{d} \\ Q_{j+1}(a; d/q) < \sqrt{d}}} f_{T+1} \left(\left[\frac{Q_{i+1}(a; d/q)}{Q_i(a; d/q)} \right] \right) f_{T+1} \left(\left[\frac{Q_{j+1}(a; d/q)}{Q_j(a; d/q)} \right] \right) \\
&= \frac{8}{d} \sum_{1 \leq a < d/2} \sum_{\substack{1 \leq i \leq l_d(a) \\ Q_{i+1}(a; d) < \sqrt{d}}} f_{T+1}^2 \left(\left[\frac{Q_{i+1}(a; d)}{Q_i(a; d)} \right] \right) \\
&\quad + \frac{8}{d} \sum_{1 \leq a < d/2} \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq l_d(a), \ i \neq j \\ Q_{i+1}(a; d) < \sqrt{d} \\ Q_{j+1}(a; d) < \sqrt{d}}} f_{T+1} \left(\left[\frac{Q_{i+1}(a; d)}{Q_i(a; d)} \right] \right) f_{T+1} \left(\left[\frac{Q_{j+1}(a; d)}{Q_j(a; d)} \right] \right) + O(1) \\
&= 8W_1(d; T+1) + 8W_2(d; T+1) + O(1).
\end{aligned}$$

С помощью лемм 5 и 7 окончательно получаем

$$\begin{aligned}
D_d(T) &= M_d(T) - (E_d(T))^2 \\
&\leq \frac{4}{\zeta^2(2)} \log^2 d \log^2(T+1) + O(T \log d) - \left(\frac{2}{\zeta(2)} \log d \log T + O(\log d) \right)^2 \\
&\ll T \log d + \log^2 d \log T.
\end{aligned}$$

Теперь у нас есть все необходимое для доказательства теоремы, сформулированной во введении.

Пусть $g(d)$ – неограниченно возрастающая последовательность положительных вещественных чисел такая, что $g(d) \leq \sqrt{\log \log d}$. Используя неравенство Чебышева

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{D(X)}{\delta^2}$$

для случайной величины X и полагая $T = g^2(d) \log d$, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{d} \# \left\{ a \in Z_d : \left| S_d(a; g^2(d) \log d) - \frac{12}{\pi^2} \log d \log \log d \right| \geq g(d) \log d \sqrt{\log \log d} \right\} \\ \ll \frac{g^2(d) \log^2 d + \log^2 d \log \log d}{(g(d) \log d \sqrt{\log \log d})^2} \ll \frac{1}{g^2(d)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Учитывая оценку

$$\frac{1}{d} \# \{a \in Z_d : \exists q_i(a) \geq g^2(d) \log d\} \ll \frac{1}{g^2(d)},$$

вытекающую из (0.3), величину $S_d(a; g^2(d) \log d)$ в (3.1) заменим на $S_d(a)$. Теорема доказана.

Автор благодарит В. А. Быковского за внимание и полезные советы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. Кнут, *Искусство программирования*, т. 2: *Получисленные алгоритмы*, Вильямс, М., 2001.
- [2] A. C. Yao, D. E. Knuth, “Analysis of the subtractive algorithm for greatest common divisors”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **72**:12 (1975), 4720–4722.
- [3] А. А. Панов, “О среднем для суммы элементов по одному классу конечных непрерывных дробей”, *Матем. заметки*, **32**:5 (1982), 593–600.
- [4] М. Г. Рукавишникова, “Вероятностная оценка суммы неполных частных дробей с фиксированным знаменателем”, *Чебышевский сб.*, **7**:4 (2006), 113–121.
- [5] В. А. Быковский, “Оценка дисперсии длин конечных непрерывных дробей”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **11**:6 (2005), 15–26.
- [6] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Физматгиз, М., 1961.
- [7] А. В. Устинов, “О статистических свойствах конечных цепных дробей”, *Труды по теории чисел*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **322**, ПОМИ, СПб., 2005, 186–211.

М. Г. Рукавишникова

Дальневосточный государственный
гуманитарный университет,
Хабаровское отделение Института прикладной математики
Дальневосточного Отделения РАН

Поступило

12.02.2009

Исправленный вариант

04.12.2010