Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Верещагин, Однофазное усреднение для цепочки
Абловица–Лэдика, *Матем. заметки*, 2010, том 87, вы-
пуск 6, 814–824

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8487>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:25:09

Однофазное усреднение для цепочки Абловица–Лэдика

В. Л. Верещагин

Метод усреднения Боголобова–Уизема применен к цепочке Абловица–Лэдика

$$\begin{aligned} -i\dot{q}_n - (1 - q_n r_n)(q_{n-1} + q_{n+1}) + 2q_n &= 0, \\ -i\dot{r}_n + (1 - q_n r_n)(r_{n-1} + r_{n+1}) - 2r_n &= 0 \end{aligned}$$

в однофазном случае. Выписана усредненная система, доказан факт сохранения гамильтоновости при усреднении. Однофазные решения записаны в терминах эллиптических функций, в “фокусирующем” случае для уравнений модуляций найдены римановы инварианты. Характеристические скорости усредненной системы представлены с помощью полных эллиптических интегралов, найдены ее автомодельные решения. Приведены результаты соответствующих численных экспериментов.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. Цепочка Абловица–Лэдика (ЦАЛ) (см. [1])

$$\begin{aligned} -i\dot{q}_n - (1 - q_n r_n)(q_{n-1} + q_{n+1}) + 2q_n &= 0, \\ -i\dot{r}_n + (1 - q_n r_n)(r_{n-1} + r_{n+1}) - 2r_n &= 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$q_n = q_n(t), \quad r_n = r_n(t), \quad \dot{q}_n = \frac{\partial q_n}{\partial t},$$

n – целочисленная пространственная переменная, t – непрерывное время, является одной из наиболее важных нелинейных дискретных моделей интегрируемых методом обратной задачи рассеяния. ЦАЛ принято называть разностным аналогом нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ), при наложении условия $r_n = \pm \bar{q}_n$ (1.1) переходит в скалярное комплексное уравнение

$$i\partial_t A_n + (1 \pm |A_n|^2)(A_{n+1} + A_{n-1}) - 2A_n = 0, \tag{1.2}$$

являющееся одной из дискретизаций НУШ. Интерес к изучению свойств решений ЦАЛ особенно возрос в последние годы по мере выяснения ее важной роли в теории ортогональных полиномов (см., например, [2], [3]). ЦАЛ (1.1) обладает полным набором атрибутов интегрируемости, таких как

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 07-01-00081) и гранта Программы Президиума РАН “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”.

1) “представление нулевой кривизны”

$$-i\partial_t L_n + L_n B_n - B_{n+1} L_n = 0, \quad (1.3)$$

где

$$L_n = \begin{pmatrix} z & q_n \\ zr_n & 1 \end{pmatrix}, \quad B_n = \begin{pmatrix} z - 1 - q_n r_{n-1} & q_n - z^{-1} q_{n-1} \\ zr_{n-1} - r_n & 1 - z^{-1} + r_n q_{n-1} \end{pmatrix},$$

$\partial_t = \partial/\partial t$, $z \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр;

- 2) гамильтонова структура (см. [4]) и набор коммутирующих законов сохранения [1]; соответствующая иерархия уравнений Абловица–Лэдика широко обсуждалась в литературе (см., например, [1], [5], [6]);
- 3) характерная аналитическая, алгеброгеометрическая картина и конечнозонные решения, явные тета-функциональные формулы для которых были выписаны в работе [7]; там же было начато изучение способов применения к ЦАЛ многофазного метода усреднения Боголюбова–Уизема; отметим, что изучаемая задача вполне соответствует схеме наследования гамильтоновых свойств при усреднении дискретных интегрируемых моделей, построенной в статье [8].

Следует подчеркнуть большое значение уравнений медленных модуляций в асимптотическом исследовании решений ряда важных задач Коши для дисперсионных волновых уравнений (см., например, [9]–[14]). При этом особую роль играют вещественные автомодельные решения системы уравнений медленных модуляций для однофазного случая в области ее гиперболичности. Среди ряда примеров можно упомянуть статью [13], где с решением задачи Коши для НУШ с “фокусирующей” нелинейностью

$$-iu_t + u_{xx} + 2u|u|^2 = 0 \quad (1.4)$$

и ступенеобразным начальным условием вида

$$u(x, 0) \rightarrow \rho \exp(i\phi_{\pm}), \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad \rho, \phi_{\pm} \in \mathbb{R},$$

ассоциировались однофазные решения (1.4), параметры которых эволюционируют как автомодельные решения соответствующей усредненной системы с переменной $\zeta = x/t$. Построение подобных соответствий для ЦАЛ (1.1) также представляет существенный интерес, хотя обсуждение предположений, подобных гипотезам Гуревича–Питаевского [9], [10] автор хотел бы вынести за рамки данной работы.

Приведенные соображения обеспечивают актуальность главной задачи работы: выписать в удобной форме усредненную систему для однофазного решения ЦАЛ, определить ее римановы инварианты и исследовать автомодельные решения. Во втором пункте кратко описаны результаты применения к (1.1) метода конечнозонного интегрирования, однофазные решения ЦАЛ записаны с помощью эллиптических функций Вейерштрасса. В третьем пункте приведена гамильтонова картина для ЦАЛ, проиллюстрирован принцип сохранения гамильтоновости при усреднении. Четвертый пункт посвящен случаю существования римановых инвариантов: выведены уравнения модуляций в терминах полных эллиптических интегралов. В пятом пункте описаны автомодельные решения соответствующей усредненной системы, представлены результаты численных экспериментов.

2. Конечнотонные решения. В работе [7] детально описано решение линейной задачи, соответствующей операторам (1.3):

$$\begin{aligned} U_{n+1}(t, z) &= L_n(t, z)U_n(t, z), & -i\partial_t U_n(t, z) &= B_n(t, z)U_n(t, z), \\ U_n &= (u_n^1, u_n^2)^T. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Стандартная процедура алгеброгеометрического конечнотонного интегрирования¹ в применении к (2.1) дает решения $U_n(t, z)$, однозначно определяемые на гиперэллиптической римановой поверхности $\Gamma(y, z)$ рода g ($g = 0, 1, \dots$):

$$U_n = U_n(t, P), \quad P \in \Gamma(y, z): y^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (z - z_j), \quad (2.2)$$

где $z_j, j = 1, 2, \dots, 2g+2$, – точки ветвления. Условия (2.1) диктуют наличие четырех существенных особенностей на поверхности Γ – в точках $0^\pm$ и $\infty^\pm$, где знаки “+” и “–” определяют точку на верхнем и нижнем листе соответственно. Само решение системы (2.1) представляется с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} u_n^1(t, P) &= \frac{\theta(A(\infty^+) - Z)\theta(A(P) - Z + Un + Vt)}{\theta(A(\infty^+) - Z + Un + Vt)\theta(A(P) - Z)} \\ &\quad \times \exp \left[-(G_2 + i)t - G_3n + \int_{P_0}^P n\omega_{(3)} + t\omega_{(2)} \right] \\ u_n^2(t, P) &= \frac{\theta(A(0^+) - Z)\theta(A(P) - Z + Un + Vt + W)}{\theta(A(0^+) - Z + Un + Vt + W)\theta(A(P) - Z)} \\ &\quad \times \exp \left[-(g_2 - i)t - g_3n - f + \int_{P_0}^P n\omega_{(3)} + t\omega_{(2)} + \omega \right]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $A_i(P) = \int_{P_0}^P \eta_i$ – отображение Абеля римановой поверхности Γ (2.2) в ее якобиан, соответствующее базису голоморфных дифференциалов $\{\eta_1, \dots, \eta_g\}$ и каноническому набору циклов $\{a_j, b_j\}_{j=1}^g$ на Γ , $Z = A(D) + K$, $D = P_1 + \dots + P_g$ – неспециальный дивизор, K – вектор римановых констант, θ – риманова тета-функция на Γ . Абелевы дифференциалы второго и третьего рода $\omega_{(2)}, \omega_{(3)}, \omega$ однозначно определяются своим аналитическим поведением и нормировкой (нулевые a -периоды):

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z} - \frac{z^g + \sqrt{\xi}/z + P_{g-1}(z)}{y} \right] dz, \\ \omega_{(2)} &= \frac{i}{2} \left[1 + \frac{1}{z^2} + \frac{z^{g+1} + \sqrt{\xi}/z^2 - \sqrt{\xi}\chi/2z - z^g\Lambda/2 + P_{g-1}^{(2)}(z)}{y} \right] dz, \\ \omega_{(3)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z} + \frac{z^g - \sqrt{\xi}/z + P_{g-1}^{(3)}(z)}{y} \right] dz, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\xi = \prod_{j=1}^{2g+2} z_j, \quad \Lambda = \sum_{j=1}^{2g+2} z_j, \quad \chi = \sum_{j=1}^{2g+2} \frac{1}{z_j}, \quad y^2 = \prod_{j=1}^{2g+2} (z - z_j),$$

¹Детальное описание инструментов метода см. в статье [7].

полиномы $(g-1)$ -й степени $P_{g-1}^{(j)}(z)$ отвечают за то, чтобы выполнялась следующая нормировка:

$$\oint_{a_j} \omega = \oint_{a_j} \omega_{(2)} = \oint_{a_j} \omega_{(3)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, g; \quad (2.5)$$

кроме того, в выражениях (2.3)

$$\begin{aligned} g_3 &= \int_{P_0}^{0^+} \omega_{(3)}, & G_3 &= -\log z(P_0) + \int_{P_0}^{\infty^+} \left(\omega_{(3)} - \frac{dz}{z} \right), & f &= \int_{P_0}^{0^+} \omega, \\ g_2 &= \frac{i}{z(P_0)} + \int_{P_0}^{0^+} \left(\omega_{(2)} - i \frac{dz}{z^2} \right), & G_2 &= -iz(P_0) + \int_{P_0}^{\infty^+} (\omega_{(2)} - i dz), \end{aligned}$$

$P_0 \in \Gamma$ – фиксированная точка.

Явные формулы для решений ЦАЛ (1.1) возникают при рассмотрении коэффициентов разложений функций $u_n^{1,2}(t, P)$ в окрестностях существенно особых точек $0^\pm, \infty^\pm$. В интересующем нас однофазном ($g=1$) случае выпишем эти формулы в терминах эллиптических функций Вейерштрасса (см. [15]):

$$q_n = [\zeta(z) - \zeta(z - U) + c]e_n(t), \quad r_n = a[\zeta(z + b) - \zeta(z + b - U) + c]e_n^{-1}(t), \quad (2.6)$$

где

$$z = Un + itV + w, \quad e_n(t) = \exp(U_0 n + itV_0),$$

ζ – дзета-функция Вейерштрасса:

$$\zeta'(z) = -\wp(z), \quad (\wp'(z))^2 = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3.$$

Величины $U, V, U_0, V_0, a, b, c, g_1, g_2$ – параметры решения (2.6). Следующие условия связи:

$$\begin{aligned} V &= ae^{U_0}[\zeta(b - U) - \zeta(b) - c], \\ V_0 &= e^{U_0} - 2 - a[\zeta(b) - \zeta(b - U) + c][e^{U_0}(\zeta(U) + c) + e^{-U_0}(\zeta(2U) - \zeta(U) + c)] \\ &\quad + ae^{U_0}[\wp(b - U) - \wp(b)], \\ a &= -\{[\zeta(2U) - \zeta(U) + c][\zeta(b - 2U) - \zeta(b - U) - c]\}^{-1}, \\ \zeta(b + 2U) + \zeta(b) &= 2\zeta(b + U), \quad e^{2U_0} = \frac{\zeta(b + U) - \zeta(b) + c}{\zeta(b - U) - \zeta(b) - c}, \end{aligned}$$

оставляют свободными четыре параметра. Кроме того, имеются еще произвольные сдвиг фазы w и масштабный параметр ξ : $q_n \rightarrow \xi q_n, r_n \rightarrow \xi^{-1} r_n$.

3. Гамильтонов формализм и усреднение. В работе [4] был определен набор законов сохранения для ЦАЛ (1.1), т.е. величин $I_n = I_n(r, q), J_n = J_n(r, q)$ таких, что

$$\partial_t I_n = \Delta_n J_n, \quad \Delta_n J_n = J_{n+1} - J_n, \quad (3.1)$$

на решениях ЦАЛ. Первые несколько таких законов сохранения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} I_n^0 &= \log(1 - q_n r_n), & J_n^0 &= q_{n-1} r_n - q_n r_{n-1}, \\ I_n^1 &= q_n r_{n+1}, & J_n^1 &= q_{n-1} r_{n+1} (q_n r_n - 1) + q_n r_n, \\ I_n^2 &= r_n q_{n+1}, & J_n^2 &= r_{n-1} q_{n+1} (q_n r_n - 1) + q_n r_n, \\ I_n^3 &= -\frac{1}{2} (r_n q_{n+1})^2 + (1 - q_n r_n) r_{n-1} q_{n+1}, \\ J_n^3 &= (1 - q_n r_n) [r_{n-1} q_n - (r_{n-1})^2 q_{n+1} q_n + (1 - r_{n-1} q_{n-1}) q_{n+1} r_{n-1}]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Известен факт гамильтоновости ЦАЛ, т.е. возможности представить уравнения (1.1) в следующем специальном виде:

$$\dot{q}_n = \{q_n, H\}, \quad \dot{r}_n = \{r_n, H\}, \quad (3.3)$$

где гамильтониан $H = \sum_m (2I_m^0 + I_m^1 + I_m^2)$, скобка Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ определяется как кососимметрический оператор такой, что

$$\begin{aligned} \{q_n, F\} &= \sum_m \left[\frac{\partial F}{\partial q_m} \{q_n, q_m\} + \frac{\partial F}{\partial r_m} \{q_n, r_m\} \right], \\ \{q_n, q_m\} &= \{r_n, r_m\} = 0, \quad \{q_n, r_m\} = i(1 - r_m q_m) \delta_{mn}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Легко убедиться, что законы сохранения (3.2) находятся в инволюции относительно скобки (3.4): $\{\sum_n I_n^i, \sum_n I_n^j\} = 0$.

В целях применения метода усреднения систему (1.1) полезно переписать в “интерполированном” или “псевдодифференциальном” виде, а именно, перейти от последовательностей $q_n(t)$, $r_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, к функциям непрерывного аргумента $q(x, t)$, $r(x, t)$, $x \in \mathbb{C}$, так, что $q(n, t) \equiv q_n(t)$, $r(n, t) \equiv r_n(t)$:

$$\begin{aligned} -i\dot{q}(x, t) - (1 - q(x, t)r(x, t))(q(x-1, t) + q(x+1, t)) + 2q(x, t) &= 0, \\ -i\dot{r}(x, t) + (1 - q(x, t)r(x, t))(r(x-1, t) + r(x+1, t)) - 2r(x, t) &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

Очевидно, формулы (2.6), где n заменено на x , описывают однофазное решение системы (3.5). Теперь введем малую положительную величину ϵ и соответствующие “медленные” переменные $X = \epsilon x$, $T = \epsilon t$. Далее считаем четыре параметра, определяющие решение (2.6), зависящими от медленных переменных и следуем принципам работы [16]. Введение медленных переменных приводит к изменению правила дифференцирования в (3.1):

$$\partial_t \rightarrow \partial_t + \epsilon \partial_T, \quad \Delta_n \rightarrow [\exp(\partial_x + \epsilon \partial_X) - 1]_{x=n} = \Delta_n + \epsilon \partial_X \exp(\partial_x)|_{x=n} + O(\epsilon^2). \quad (3.6)$$

Подставим это в (3.1), воспользуемся периодичностью законов сохранения (3.2) как функций от однофазных решений (2.6) и усредним, после чего в уравнении останутся лишь величины порядка $O(\epsilon)$. Таким образом приходим к системе уравнений медленных модуляций

$$\partial_X \overline{I^j} = \partial_T \overline{J^j}, \quad j = 0, 1, 2, 3. \quad (3.7)$$

Здесь $\overline{F}$ означает усреднение величины $F(q(\tau), r(\tau), X, T)$, периодической по “быстрой” фазе τ :

$$\overline{F}(X, T) = \oint F(q(\tau), r(\tau), X, T) d\tau.$$

Согласно результатам работы [7] усредненная система (3.7) в общем случае не имеет римановых инвариантов, тем не менее, она может быть записана в гамильтоновом виде. Следующая теорема взята из работы [8].

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть для плотностей законов сохранения выполняется равенство

$$\{I_n^i, I_m^j\} = \sum_{l=0} A_{l,n}^{ij} \delta_{n,m-l},$$

так что

$$\sum_{l=0} A_{l,n}^{ij} = \sum_{k=1} (Q_{k,n}^{ij} - Q_{k,n-k}^{ij}).$$

Тогда усредненная система (3.7) гамильтонова с гамильтонианом

$$\overline{H}(X, T) = 2\overline{I^0}(X, T) + \overline{I^1}(X, T) + \overline{I^2}(X, T)$$

и скобкой Пуассона гидродинамического типа (ср. с [16]):

$$\{\overline{I^i}(X), \overline{I^j}(Y)\}_{\text{aver}} = \sum_l l \overline{A_l^{ij}}(X) \delta'(X - Y) + \left[\frac{\partial}{\partial X} \sum_{k=1} k \overline{Q_k^{ij}} \right] \delta(X - Y), \quad (3.8)$$

где δ – дельта-функция Дирака, черта сверху означает усреднение.

Доказательство полностью совпадает с доказательством аналогичных теорем для усредненных методом Дубровина–Новикова теоретико-полевых скобок Пуассона (см., например, [17]).

Процедура конкретного вычисления тензорных элементов скобки носит технический характер, укажем здесь наиболее простые явные формулы. Например,

$$\{I_n^0, I_m^1\} = i(q_n r_{n+1} \delta_{mn} - r_n q_{n-1} \delta_{m,n-1}),$$

следовательно,

$$A_0^{01} = i q_n r_{n+1} = i I_{n+1}^1, \quad A_1^{01} = -i r_n q_{n-1} = -i I_n^1, \quad Q_1^{01} = i q_n r_{n+1} = i I_{n+1}^1,$$

и соответствующая скобка есть

$$\{\overline{I^0}(X), \overline{I^1}(Y)\}_{\text{aver}} = i \overline{I^1}(X) \delta'(X - Y) + i \frac{\partial}{\partial X} \overline{I^1}(X) \delta(X - Y).$$

Аналогичным образом получается следующее:

$$\begin{aligned} \{\overline{I^0}(X), \overline{I^2}(Y)\}_{\text{aver}} &= i \overline{I^2}(X) \delta'(X - Y) + i \frac{\partial}{\partial X} \overline{I^2}(X) \delta(X - Y), \\ \{\overline{I^0}(X), \overline{I^0}(Y)\}_{\text{aver}} &= 0, \\ \{\overline{I^1}(X), \overline{I^1}(Y)\}_{\text{aver}} &= \{\overline{I^2}(X), \overline{I^2}(Y)\}_{\text{aver}} \\ &= i(\overline{r_n q_n}(X) - 1) \delta'(X - Y) + i \frac{\partial}{\partial X} \overline{r_n q_n}(X) \delta(X - Y), \\ \{\overline{I^1}(X), \overline{I^2}(Y)\}_{\text{aver}} &= i \frac{\partial}{\partial X} \overline{r_n q_n}(X) \delta(X - Y), \end{aligned}$$

причем коэффициенты можно записать в терминах параметров исходного однофазного решения:²

$$\begin{aligned}\overline{I^1} &= \frac{ae^{-U_0}}{2\omega} \{4\eta U[\zeta(b+U) - \zeta(b) + c] + c^2 - [\zeta(b+U) - \zeta(b)]^2 + \wp(b) - \wp(b+U)\}, \\ \overline{I^2} &= \frac{ae^{U_0}}{2\omega} \{4\eta U[\zeta(b) - \zeta(b-U) + c] + c^2 - [\zeta(b) - \zeta(b-U)]^2 + \wp(b) - \wp(b-U)\}, \\ \overline{r_n q_n} &= \frac{a}{2\omega} \{[\zeta(b) - \zeta(b-U) + c] \\ &\quad \times [\zeta(z) - \zeta(z+b-U) - e^{2U_0}[\zeta(z+b) - \zeta(z-U) + \zeta(b) + \zeta(U)] \\ &\quad + \zeta(U) + \zeta(b-U) + c] + \wp(b-U) - \wp(b)\}.\end{aligned}$$

4. Римановы инварианты для уравнений модуляций. В работе [7] подробно обсуждались условия, при которых исходная система ЦАЛ (1.1) сводится к скалярному аналогу (1.2) нелинейного уравнения Шрёдингера в фокусирующем ($r_n(t) = -\bar{q}_n(t)$, черта сверху означает комплексное сопряжение) и дефокусирующем ($r_n(t) = \bar{q}_n(t)$) случаях. Показано, что одним из этих условий является наличие спектральной инволюции – отражения относительно единичной окружности $z \rightarrow \bar{z}^{-1}$, причем в фокусирующем случае набор точек ветвления $\{z_j\}_{j=1}^{2g+2}$ должен быть инвариантен относительно указанной инволюции и сами точки z_j (если они не кратные) должны лежать вне единичной окружности. В дефокусирующем случае условия на спектр значительно более сложные. В частности, если для всех $n \in \mathbb{Z}$ выполнено неравенство $|q_n(t)| < 1$, то все точки ветвления должны лежать на единичной окружности.

Перейдем к рассмотрению фокусирующего случая. Тогда (см. [7]) усредненная система (3.7) может быть записана в следующем виде:

$$\partial_T \omega_{(3)} = \partial_X \omega_{(2)}, \quad (4.1)$$

где $\omega_{(2,3)}$ – абелевы дифференциалы на римановой поверхности $\Gamma(y, z)$, определенные формулами (2.4).

Исследование аналитических свойств обеих частей уравнения (4.1) в окрестности точек ветвления z_j позволяет переписать его в следующей форме:

$$\partial_T z_j + c(z_j, \mathbf{z}) \partial_X z_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2g+2, \quad (4.2)$$

где $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{2g+2})$,

$$c(z, \mathbf{z}) = -i \frac{z^{g+1} + \sqrt{\xi}/z^2 - \sqrt{\xi} \chi/2z - z^g \Lambda/2 + 2P_{g-1}^{(2)}(z, \mathbf{z})}{-\sqrt{\xi}/z + z^g + 2P_{g-1}^{(3)}(z, \mathbf{z})}, \quad (4.3)$$

где

$$\xi = \prod_{j=1}^{2g+2} z_j, \quad \Lambda = \sum_{j=1}^{2g+2} z_j, \quad \chi = \sum_{j=1}^{2g+2} \frac{1}{z_j},$$

полиномы $P_{g-1}^{(2,3)}(z, \mathbf{z})$ определяются из условия нормировки (2.5).

Прежде всего нас будут интересовать вещественные решения системы (4.2), отвечающие фокусирующему случаю и однофазному решению ЦАЛ (1.1), т.е.

$$g = 1, \quad z_1 = z_4^{-1} \leq z_2 = z_3^{-1} \leq 1, \quad z_j \in \mathbb{R}.$$

²Использованы стандартные обозначения теории эллиптических функций Вейерштрасса [15].

Соответствующие разрезы и циклы на римановой поверхности

$$\Gamma(y, z): y^2 = \prod_{j=1}^4 (z - z_j)$$

изображены на рис. 1.

Рис. 1

Теперь запишем уравнения модуляций (4.2) в терминах полных эллиптических интегралов. Для этого нужно выразить нормирующие константы $P_0^{(2,3)}(z, \mathbf{z})$ в формуле для характеристической скорости $c(z, \mathbf{z})$:

$$P_0^{(2)} = \left(\oint_a \frac{dz}{y} \right)^{-1} \left(\frac{\chi \sqrt{\xi}}{2} \oint_a \frac{dz}{zy} + \frac{\Lambda}{2} \oint_a \frac{z dz}{y} - \oint_a \frac{z^2 dz}{y} - \sqrt{\xi} \oint_a \frac{dz}{z^2 y} \right),$$

$$P_0^{(3)} = \left(\oint_a \frac{dz}{y} \right)^{-1} \left(\sqrt{\xi} \oint_a \frac{dz}{zy} - \oint_a \frac{z dz}{y} \right),$$

где

$$\begin{aligned} \oint_a \frac{dz}{y} &= (z_3 - z_2 c^2) K(k) - \frac{z_2 c^2 (1 - c^2)}{k^2} [K(k) - E(k)], \\ \oint_a \frac{z dz}{y} &= (z_3 - z_2) \left\{ (z_3 - z_2) \Pi_1(c^2, k) - \frac{z_2^2 c^2}{(z_4 - z_2) k^2} [K(k) - E(k)] \right. \\ &\quad \left. + z_2 \left(1 + \frac{z_2}{z_4 - z_2} \right) K(k) \right\}, \\ \oint_a \frac{dz}{zy} &= (z_3 - z_2) \left\{ c^2 \left(\frac{1}{z_3} - \frac{1}{z_2} \right) \Pi_1 \left(\frac{z_2}{z_3} c^2, k \right) + \left(\frac{c^2}{z_2} + \frac{1}{z_4 - z_2} \right) K(k) \right. \\ &\quad \left. - \frac{c^2}{(z_4 - z_2) k^2} [K(k) - E(k)] \right\}, \\ \oint_a \frac{z^2 dz}{y} &= (z_3 - z_2) \left\{ \frac{z_2^2 (z_4 + 2z_3 - 2z_2)}{z_4 - z_2} K(k) - \frac{z_2^3 c^2}{(z_4 - z_2) k^2} [K(k) - E(k)] \right. \\ &\quad + \frac{z_2 (z_3 - z_2) (2z_4 + z_3 - 3z_2)}{z_4 - z_2} \Pi_1(c^2, k) \\ &\quad \left. + (z_3 - z_2)^2 \Pi_2(c^2, k) \right\}, \end{aligned}$$

$$\oint_a \frac{dz}{z^2 y} = \frac{z_3 - z_2}{z_2^2(z_4 - z_2)} \left\{ (z_4 - 2z_3 - 2z_2)K(k) - \frac{z_2 c^2}{k^2} [K(k) - E(k)] \right. \\ \left. + (2z_4 - 3z_3 + z_2) \left(\frac{z_2}{z_3} - 1 \right) \Pi_1 \left(\frac{z_2}{z_3} c^2, k \right) \right. \\ \left. + (z_4 - z_3) \left(\frac{z_2}{z_3} - 1 \right)^2 \Pi_2 \left(\frac{z_2}{z_3} c^2, k \right) \right\};$$

здесь использованы стандартные обозначения, соответствующие форме Лежандра:

$$c^2 = \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2}, \quad k^2 = c^2 \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}, \quad G(x) = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2),$$

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{G(x)}}, \quad E(k) = \int_0^1 \frac{1 - k^2 x^2}{\sqrt{G(x)}} dx,$$

$$\Pi_j(\nu, k) = \int_0^1 \frac{dx}{(1 - \nu x^2)^j \sqrt{G(x)}}, \quad j = 1, 2,$$

$$\Pi_1(\nu, k) = \Pi(\nu, k)$$

$$\Pi_2(\nu, k) = \frac{\nu}{2(k^2 - \nu)(\nu - 1)} \left[E(k) + \frac{k^2 - \nu}{\nu} K(k) + \frac{\nu^2 - k^2}{\nu} \Pi(\nu, k) \right] + \Pi(\nu, k).$$

Таким образом, в фокусирующем случае для однофазного решения уравнения (1.2) мы имеем представление усредненной системы в виде двух уравнений в частных производных вида

$$\partial_T z_j + c(z_j, \mathbf{z}) \partial_X z_j = 0, \quad j = 1, 2, \quad (4.4)$$

где коэффициенты $c(z_j, \mathbf{z})$ явно выражены в терминах полных эллиптических интегралов.

5. Автомоделные решения уравнений модуляций. По виду формулы для характеристических скоростей (4.3) усредненной системы легко установить факт отсутствия однородности³ величин $c(z_j, \mathbf{z})$ относительно $\mathbf{z}$. Следовательно, среди автомоделных решений (4.2) будем рассматривать те, что зависят от переменной $\xi = iX/T$. Такие решения удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$(i\xi + c(z_j, \mathbf{z})) \frac{\partial z_j}{\partial \xi} = 0, \quad j = 1, 2, \quad (5.1)$$

где

$$c(z, \mathbf{z}) = -i \left[z - \frac{1}{z} - 2P_0^{(3)} + \frac{-\Lambda(z + 1/z)/2 + 2 + 2P_0^{(2)} + 4P_0^{(3)}}{z - 1/z + 2P_0^{(3)}} \right].$$

Таким образом, интересующие нас решения принадлежат трем основным группам:

$$1) \quad \frac{\partial z_1}{\partial \xi} \neq 0, \quad \frac{\partial z_2}{\partial \xi} = 0, \quad 2) \quad \frac{\partial z_1}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial z_2}{\partial \xi} \neq 0, \quad 3) \quad \frac{\partial z_1}{\partial \xi} \neq 0, \quad \frac{\partial z_2}{\partial \xi} \neq 0.$$

Численные эксперименты, соответствующие этим случаям, дают типичные картины, представленные на следующих иллюстрациях (см. рис. 2–4).

³Подобная однородность, характерная, например, для усредненных систем КдФ (см. [16], [18]) позволила найти широкий класс автомоделных решений.

Рис. 2. 1) $\partial z_1/\partial \xi \neq 0$, $\partial z_2/\partial \xi = 0$ Рис. 3. 2) $\partial z_1/\partial \xi = 0$, $\partial z_2/\partial \xi \neq 0$ Рис. 4. 3) $\partial z_1/\partial \xi \neq 0$, $\partial z_2/\partial \xi \neq 0$

Следующая иллюстрация показывает динамику по ξ комплексных точек ветвления, описываемую автомодельным решением системы (4.2): в начальный момент ξ_0 двойная точка, лежащая на единичной окружности, расщепляется на z_1 и z_4 , а точки ветвления z_2 и z_3 в момент ξ_1 совпадают на окружности и образуют другую двойную точку. Такое решение можно “склеить” с решением $z_2 = \text{const}$ и $z_3 = \text{const}$ для $\xi \leq \xi_0$ и с решением $z_1 = \text{const}$ и $z_4 = \text{const}$ для $\xi \geq \xi_1$ и идейно аналогично сделанному в работах [9], [10] сопоставить его решению задачи Коши со “ступенеобразным” начальным условием для цепочки Абловица–Лэдика.

Рис. 5

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, “Nonlinear differential-difference equations”, *J. Math. Phys.*, **16**:3 (1975), 598–603.
- [2] F. Gesztesy, H. Holden, J. Michor, G. Teschl, *Soliton Equations and Their Algebro-Geometric Solutions*, v. 2, (1 + 1)-Dimensional Discrete Models, Cambridge Stud. Adv. Math., **114**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
- [3] F. Gesztesy, H. Holden, J. Michor, G. Teschl, *The Ablowitz–Ladik Hierarchy Revisited*, arXiv: [nlin.SI/0702058](#).
- [4] F. Gesztesy, H. Holden, J. Michor, G. Teschl, *Local Conservation Laws and the Hamiltonian Formalism for the Ablowitz–Ladik Hierarchy*, arXiv: [nlin.SI/0711.1644](#).
- [5] M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson, *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **149**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [6] M. J. Ablowitz, J. F. Ladik, “A nonlinear difference scheme and inverse scattering”, *Stud. Appl. Math.*, **55**:3 (1976), 213–229.
- [7] P. D. Miller, N. M. Ercolani, I. M. Krichever, C. D. Levermore, “Finite genus solutions to the Ablowitz–Ladik equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **48**:12 (1995), 1369–1440.
- [8] А. Я. Мальцев, “Усреднение гамильтоновых структур в дискретном варианте метода Уизема”, *УМН*, **53**:1 (1998), 219–220.
- [9] А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, “Распад начального разрыва в уравнении Кортевега–де Фриза”, *Письма в ЖЭТФ*, **17**:5 (1973), 268–271.
- [10] А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, “Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны”, *ЖЭТФ*, **65**:2 (1973), 590–604.
- [11] В. В. Авилов, С. П. Новиков, “Эволюция Уитемовской зоны в теории КдФ”, *Докл. АН СССР*, **294**:2 (1987), 325–329.
- [12] P. D. Lax, C. D. Levermore, S. Venakides, “The generation and propagation of oscillations in dispersive initial value problems and their limiting behavior”, *Important Developments in Soliton Theory*, Springer Ser. Nonlinear Dynam., Springer-Verlag, Berlin, 1993, 205–241.
- [13] Р. Ф. Бикбаев, “Комплексные деформации Уизема в задачах с “интегрируемой неустойчивостью””, *ТМФ*, **104**:3 (1995), 393–419.
- [14] P. Deift, S. Venakides, X. Zhou, “New results in small dispersion KdV by an extension of the steepest descent method for Riemann–Hilbert problems”, *Internat. Math. Res. Notices*, 1997, № 6, 285–299.
- [15] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Маттье*, Справочная математическая библиотека, **14**, Наука, М., 1967.
- [16] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, “Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория”, *УМН*, **44**:6 (1989), 29–98.
- [17] А. Я. Мальцев, “Наследование гамильтоновых структур в методе усреднения Уизема”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **63**:6 (1999), 117–146.
- [18] H. Flaschka, M. G. Forest, D. W. McLaughlin, “Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg–de Vries equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **33**:6 (1980), 739–784.

В. Л. Верещагин

Институт математики с вычислительным центром

Уфимского научного центра РАН, г. Уфа

E-mail: v_vereschagin@mail.ru

Поступило

28.04.2009

Исправленный вариант

20.11.2009