Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Мыльников, Минимальные негрупповые редуцированные скрученные подмножества без инволюций, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 6, 902–910

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8488>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:23:01

Минимальные негрупповые редуцированные скрученные подмножества без инволюций

А. Л. Мыльников

Подмножество K из группы G называется скрученным подмножеством, если $1 \in K$ и для любых элементов $x, y \in K$ элемент $xy^{-1}x$ содержится в K . В работе исследуются конечные скрученные подмножества без инволюций, которые сами не являются подгруппами, но любое собственное скрученное подмножество в них – подгруппа. Также исследуются группы, порожденные такими скрученными подмножествами.

Библиография: 11 названий.

Введение. Следуя [1], приведем определение скрученного подмножества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подмножество K из группы G называется *скрученным подмножеством*, если $1 \in K$ и для любых элементов x, y из K $xy^{-1}x \in K$.

Пусть G – группа и w – инволюция из G . В качестве примеров скрученных подмножеств выступают следующие, играющие важную роль в теории групп подмножества, образованные с помощью инволюции w : $T = w^G \cup \{1\}$:

$$I = \{g \in G : g^w = g^{-1}\}, \quad F = \{g^{-1}g^w \mid g \in G\}.$$

Стоит отметить, что в работе Ашбахера [2] рассматривался объект, аналогичный скрученному подмножеству, называемый им скрученной подгруппой и определяемый следующим образом: подмножество K из группы G называется *скрученной подгруппой*, если $1 \in K$ и для любых x, y из K выполнено $xyx \in K$. Нетрудно показать, что скрученные подмножества являются скрученными подгруппами, но обратное не всегда верно. Заметим также, что в важном случае, когда группа является периодической, понятия “скрученное подмножество” и “скрученная подгруппа” эквивалентны.

Настоящая работа является продолжением работы [3], в которой изучались минимальные негрупповые скрученные подмножества (MNG-подмножества), содержащие инволюции.

Следуя [3], приведем определение MNG-подмножества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скрученное подмножество K из группы G называется *минимальным негрупповым скрученным подмножеством* (MNG-подмножеством), если выполняются следующие условия:

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (грант № 2.1.1/4620).

- 1) $K \neq \langle K \rangle$;
- 2) для любого собственного скрученного подмножества S из K справедливо $S = \langle S \rangle$.

Изучение MNG-подмножеств является естественным этапом в построении общей теории скрученных подмножеств, поскольку любое конечное скрученное подмножество, не являющееся подгруппой, обязательно содержит некоторое конечное MNG-подмножество. Фактически, MNG-подмножества являются наиболее простыми примерами нетривиальных скрученных подмножеств.

Отметим также, что рассмотрение MNG-подмножеств и групп, порожденных такими скрученными подмножествами, является, в некоторой степени, развитием темы о перекрученных группах (см. работы [1], [4]), поскольку, как следует из основного результата настоящей работы и теоремы 1 из [3], конечные минимальные неперекрученные группы, изучаемые в работах [5], [6], порождаются MNG-подмножествами.

В настоящей работе исследуются конечные редуцированные MNG-подмножества без инволюций и группы, которые порождаются такими скрученными подмножествами.

Прежде чем сформулировать основной результат настоящей работы, приведем определение редуцированного скрученного подмножества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Скрученное подмножество K из группы G называется *редуцированным*, если для $\text{Ker } K := \{x \in K : xK = K\}$ выполняется $\text{Ker } K = 1$.

Теперь сформулируем основной результат настоящей работы.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть G – конечная группа и K – конечное скрученное подмножество из G без инволюций такое, что $G = \langle K \rangle$. Допустим, что K – редуцированное скрученное подмножество. Тогда K – MNG-подмножество тогда и только тогда, когда группа G и подмножество K удовлетворяют одному из следующих трех случаев.

(1) Группа $G = A \rtimes \langle b \rangle$ – группа Миллера–Морено, где A – элементарная абелева p -группа, $|b| = q$, $p \neq q$, p, q – нечетные простые числа и $|A| = p^{2t}$ для некоторого натурального t . В этом случае $K = \{g^{-1}\varphi(g) \mid g \in G\}$, где φ – некоторый инволютивный автоморфизм группы G такой, что $\varphi(b) = b^{-1}$.

(2) Группа $G = (A_1 \times A_2) \rtimes \langle b \rangle$ – группа нечетного порядка, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) A_1, A_2 – нормальные элементарные абелевы p -подгруппы порядка p^{2t+1} для некоторого целого $t \geq 0$, $|b| = q$, $p \neq q$ и p, q – простые;

(ii) $G_1 := A_1 \langle b \rangle, G_2 := A_2 \langle b \rangle$ – группы Миллера–Морено;

(iii) существует инволютивный автоморфизм φ группы G такой, что выполнено $\varphi(G_1) = G_2$ и $\varphi(b) = b^{-1}$.

В этом случае $K = \{g^{-1}\varphi(g) \mid g \in G\}$.

(3) Группа $G = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, где $|a| = |b| = |z| = p$, p – простое, $p \neq 2$, $z = [a, b]$, $[b, z] = 1$. В этом случае $K = \{a^m b^n a^m \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае (1) группа G всегда обладает требуемым инволютивным автоморфизмом. Данное утверждение вытекает из леммы 1.8.

Таким образом, в силу настоящей работы и работы [3] общий вопрос о строении конечных MNG-подмножеств сводится к вопросу о строении конечных нередуцированных MNG-подмножеств без инволюций.

1. Вспомогательные результаты. В данном пункте приводятся вспомогательные результаты, которые используются при доказательстве основной теоремы.

Из теоремы 1 работы [7] вытекает следующая

ЛЕММА 1.1. Пусть G – группа и K – скрученное подмножество из G такое, что $G = \langle K \rangle$. Допустим, что K конечно. Тогда G – конечная группа.

ЛЕММА 1.2 [8; лемма 2.2]. Пусть G – конечная группа и K – скрученное подмножество из G такое, что $G = \langle K \rangle$. Допустим, что K не содержит инволюций. Тогда G имеет нечетный порядок.

Из лемм 10, 11 работы [5] вытекает следующая

ЛЕММА 1.3. Пусть G – конечная группа и K – скрученное подмножество из G такое, что $G = \langle K \rangle$. Тогда справедливы следующие утверждения.

- (1) Множество $\text{Ker } K := \{x \in K : xK = K\}$ – нормальная подгруппа в G .
- (2) Для любого элемента z из K справедливо $z \in \text{Ker } K \subseteq K$.
- (3) Допустим, что $\text{Ker } K = 1$. Тогда группа G обладает таким автоморфизмом φ , что $\varphi^2 = 1$, для любого элемента x из K имеем $\varphi(x) = x^{-1}$ и $\{g^{-1}\varphi(g) \mid g \in G\} \subseteq K$. Если G имеет нечетный порядок, то $K = \{g^{-1}\varphi(g) \mid g \in G\}$.

Следуя [1], подгруппоид, порожденный некоторым подмножеством $M \cup 1$ из группы G с помощью бинарной операции $x \circ y := xy^{-1}x$, будем обозначать $Tw(M)$.

ЛЕММА 1.4 [3; лемма 2.1]. Пусть G – конечная неабелева группа, K – скрученное подмножество из группы G такое, что $G \neq K$, $G = \langle K \rangle$, и Ω – множество максимальных подгрупп из K . Допустим, что $\text{Ker } K := \{x \in K : xK = K\} = 1$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) Любая подгруппа X из Ω абелева.
- (2) Допустим, что подмножество K является MNG-подмножеством; тогда
 - (а) для любых двух различных подгрупп X, Y из Ω справедливо $X \cap Y = 1$;
 - (б) для любых элементов $x \in X \setminus \{1\}$, $y \in Y \setminus \{1\}$ $xy \neq yx$ и $K = Tw(x, y)$.

ЛЕММА 1.5 [10; с. 18, теорема 2.1 (iii)]. Пусть G – группа и φ – автоморфизм группы G такой, что $\varphi^2 = 1$. Тогда подгруппа $\langle x^{-1}\varphi(x) \mid x \in G \rangle$ является нормальной подгруппой в G .

Следуя [1], приведем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Группа называется *перекрученной*, если в ней любое скрученное подмножество является подгруппой.

Справедлива следующая

ЛЕММА 1.6 [9; теорема 1]. Для периодической абелевой группы G следующие условия эквивалентны:

- (1) G перекрученная;
- (2) G содержит не более одной инволюции.

Следуя [5], приведем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Группа G называется MNS-группой, если

- 1) существует скрученное подмножество K из G такое, что $K \neq \langle K \rangle$;
- 2) любая собственная секция группы G является перекрученной группой.

Из теоремы 1 работы [6] вытекает

ЛЕММА 1.7. Пусть $G = A \rtimes \langle b \rangle$ – группа Миллера–Морено нечетного порядка, где A – элементарная абелева p -группа порядка p^n , $|b| = q$, $p \neq q$, p, q – простые.

Тогда справедливо следующее:

- (1) если n четно, то G – MNS-группа;
- (2) если n нечетно, то G – перекрученная группа.

ЛЕММА 1.8. Пусть G, n удовлетворяют условию леммы 1.7. Допустим, что n четно. Тогда группа G обладает инволютивным автоморфизмом φ таким, что $\varphi(b) = b^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по лемме 1.7 (1) G – MNS-группа, то существует такое скрученное подмножество K из G , что $K \neq \langle K \rangle$ и $\langle K \rangle = G$.

Заметим, что $\text{Ker } K := \{x \in K : xK = K\} = 1$.

Действительно, в противном случае, так как по лемме 1.3 (1) $\text{Ker } K$ – нормальная подгруппа в G , то $A \leq \text{Ker } K$. Пусть $\bar{G} := G / \text{Ker } K$ и $\bar{K}$ – образ K в $\bar{G}$. Тогда $\bar{G}$ – циклическая группа. По лемме 1.6 $\bar{G}$ – перекрученная группа. Значит, $\bar{K}$ – подгруппа, откуда ввиду леммы 1.3 (2) получаем, что K – подгруппа, что противоречит выбору K .

Итак, $\text{Ker } K = 1$. Понятно, что K содержит элементы порядка q . Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $b \in K$. Далее, применяя лемму 1.3 (3), получаем требуемое.

Из доказательства леммы 4.2 работы [1] вытекает

ЛЕММА 1.9. Пусть $G = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, где $|a| = |b| = |z| = p$, p – простое, $p \neq 2$ и $z = [a, b]$, $[b, z] = 1$. Пусть $K := Tw(a, b)$. Тогда

$$K = \{a^k b^n a^k \mid k, n \in \mathbb{Z}\}.$$

ЛЕММА 1.10 [10; с. 336, теорема 1.4]. Если конечная группа G допускает регулярный инволютивный автоморфизм, то G абелева.

Из теоремы 2 работы [6] вытекает следующая

ЛЕММА 1.11. Если группа G удовлетворяет одному из случаев основной теоремы, то G – MNS-группа.

ЛЕММА 1.12. Пусть G – группа нечетного порядка и K – скрученное подмножество из G . Тогда $|K|$ делит $|G|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – минимальный контрпример к лемме 1.12 и K – скрученное подмножество из G такое, что $|K|$ не делит $|G|$. Не нарушая общности, можно считать, что $G = \langle K \rangle$.

Дальнейший анализ ситуации разбивается на ряд этапов.

- (1) Докажем, что $\text{Ker } K = \{x \in K : xK = K\} = 1$.

Допустим противное, что $\text{Ker } K \neq 1$. По лемме 1.3(1) $\text{Ker } K$ – нормальная подгруппа в G .

Рассмотрим $\bar{G} := G/\text{Ker } K$. Пусть $\bar{K}$ – образ K в $\bar{G}$. Понятно, что $\bar{K}$ – скрученное подмножество. Согласно лемме 1.3(2) K – полный прообраз $\bar{K}$, т.е. является объединением некоторого набора смежных классов по подгруппе $\text{Ker } K$. Значит, $|K|$ делит $|G|$ тогда и только тогда, когда $|\bar{K}|$ делит $|\bar{G}|$. В силу минимальности контрпримера G получаем, что $|\bar{K}|$ делит $|\bar{G}|$, следовательно, $|K|$ делит $|G|$, что противоречит выбору G и K .

(2) Группа G обладает таким инволютивным автоморфизмом φ , что

$$K = \{g^{-1}\varphi(g) \mid g \in G\}.$$

Это вытекает из леммы 1.3(3).

(3) Докажем, что $G = C_G(\varphi)K$.

Пусть $G^* = G\langle\varphi\rangle$ и g – произвольный элемент из группы G . Тогда $|\varphi\varphi^g| = 2n+1$ для некоторого целого числа n . Значит, существует элемент h из $\langle\varphi\varphi^g\rangle$ такой, что $\varphi^g = \varphi\varphi^h$. Следовательно, $g\varphi^h \in C_{G^*}(\varphi)$, т.е. $g = c\varphi^h$ для некоторого элемента c из $C_{G^*}(\varphi)$.

Понятно, что $C_{G^*}(\varphi) = C_G(\varphi) \times \langle\varphi\rangle$. Так как $g \in G$, то $c = c_1\varphi$, где c_1 – некоторый элемент из $C_G(\varphi)$. Следовательно, $g = c_1(\varphi\varphi^h)$, значит, $G = C_G(\varphi)K$.

(4) Пусть $x, y \in K$. Докажем, что если $xC_G(\varphi) = yC_G(\varphi)$, то $x = y$.

Имеем $x = yc$, где c – некоторый элемент из $C_G(\varphi)$. Тогда по лемме 1.3(3) $x^{-1} = \varphi(x) = \varphi(yc) = y^{-1}c$, откуда $c = yx^{-1}$. Следовательно, $x = y(yx^{-1})$, значит, $x^2 = y^2$. Так как G – группа нечетного порядка, то получаем, что $x = y$.

(5) Докажем, что $|K|$ делит $|G|$.

Рассмотрим отображение $\theta: K \rightarrow G/C_G(\varphi)$, определенное следующим образом: для любого элемента x из K положим $\theta(x) := xC_G(\varphi)$. В силу (3), (4) получаем, что θ – биекция. Значит, $|K| = |G : C_G(\varphi)|$, откуда вытекает, что $|K|$ делит $|G|$.

Далее, в силу пункта (5) получаем противоречие с выбором G, K , которое доказывает лемму 1.12.

2. Доказательство основной теоремы. Сначала докажем импликацию $\Rightarrow$. Анализ ситуации разбивается на ряд этапов.

(1) Группа G конечна и имеет нечетный порядок. Это вытекает из лемм 1.1, 1.2.

(2) Группа G разрешима. Это следует из (1) и теоремы Фейта–Томпсона [11].

(3) Группа G обладает таким инволютивным автоморфизмом φ , что

$$K = \{g^{-1}\varphi(g) \mid g \in G\}.$$

Это следует из леммы 1.3(3).

(4) Докажем, что $K = Tw(a, b)$ для некоторых таких элементов a, b из K , что $|a| = r$, $|b| = q$, где r, q – нечетные простые числа.

По лемме 1.4 $K = A_1 \cup \dots \cup A_n$, где A_i – максимальная подгруппа из K и $A_i \cap A_j = 1$ при $i \neq j$. Поскольку $K \neq \langle K \rangle$, то $n \geq 2$. Тогда, взяв элемент a простого порядка r из A_1 и элемент b простого порядка q из A_2 , ввиду леммы 1.4(2b) получим, что $K = Tw(a, b)$.

(5) Докажем, что либо $G' \cap K \neq 1$, либо $G' \leq Z(G)$.

Допустим, что $G' \cap K = 1$. Покажем, что тогда $G' \leq Z(G)$.

Пусть x – произвольный элемент из G' . В силу (4) для доказательства данного пункта достаточно показать, что $x^a = x$, $x^b = x$. Поскольку $G' \cap K = 1$ и G' – φ -инвариантная подгруппа, то ввиду (3) получаем, что для любого элемента $z \in G'$ справедливо $z^{-1}\varphi(z) = 1$, т.е. $\varphi(z) = z$. Таким образом, $\varphi(x) = x$ и $\varphi(x^a) = x^a$. Тогда имеем $x^a = \varphi(x^a) = x^{a^{-1}}$, откуда $xa^2 = a^2x$. В силу нечетности $|a|$ имеем $xa = ax$. Аналогично имеем $xb = bx$. Таким образом, $x \in Z(G)$, следовательно, $G' \leq Z(G)$.

(6) Пусть $F = G' \cap K$. Докажем, что тогда $F = [G, \varphi]$, F – нормальная в G' абелева подгруппа и $F \cap Z(G) = 1$.

Очевидно, F – скрученное подмножество. Поскольку согласно (2) справедливо $G' \subset G$, то имеем $F \subset K$, откуда ввиду леммы 1.4 получаем, что F – абелева подгруппа. Следовательно, в силу (3) легко видеть, что

$$F = \{z^{-1}\varphi(z) \mid z \in G'\} = [G', \varphi].$$

Тогда по лемме 1.5 F – нормальная подгруппа в G' .

Теперь покажем, что $F \cap Z(G) = 1$. Пусть x – элемент из $F \cap Z(G)$. В силу нечетности $|G|$ имеем

$$xK = x^{2t+2}K = x^{t+1}Kx^{t+1} = K,$$

где t – натуральное число такое, что $|x| = 2t+1$. Таким образом, $x \in \text{Ker}(K)$, откуда согласно условию имеем $x = 1$.

(7) Пусть $G' \cap K \neq 1$. Докажем, что тогда группа G и скрученное подмножество K удовлетворяют либо пункту (1), либо пункту (2) основной теоремы.

В силу (6) и леммы 1.4 имеем либо $G = \langle F, a \rangle$, либо $G = \langle F, b \rangle$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $G = \langle F, b \rangle$. Далее анализ ситуации разбивается на ряд этапов.

(i) Докажем, что $G = G' \rtimes \langle b \rangle$ и G' – элементарная абелева p -подгруппа, где p – некоторое простое число, отличное от q .

Поскольку $G = \langle F, b \rangle$, то легко видеть, что $G = G' \rtimes \langle b \rangle$. Далее, поскольку согласно (6) F – нормальная в G' подгруппа, то, понятно, F содержит некоторую минимальную нормальную в G' подгруппу A . Легко видеть, что A – элементарная абелева p -подгруппа, где p – некоторое простое число из $\pi(F)$. В силу (6) и леммы 1.4 $K = Tw(A, b)$, откуда вытекает, что $G = A^{(b)} \rtimes \langle b \rangle$. Следовательно, $G' = A^{(b)}$. Поскольку A – минимальная нормальная в G' подгруппа, легко видеть, что $G' = A^{(b)}$ – элементарная абелева p -группа.

Далее, $p \neq q$, так как в противном случае группа G нильпотентна, а, значит, в силу того, что $G' = A^{(b)}$, и $G' \leq \Phi(G)$, где $\Phi(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G , которая является множеством непорождающих элементов группы G . Значит, получаем, что G – циклическая группа, чего ввиду леммы 1.6 быть не может.

(ii) Докажем, что $Z(G) = 1$.

В силу (i) нетрудно видеть, что $G = H \times Z(G)$ для некоторой φ -инвариантной подгруппы H . Поскольку $G = \langle K \rangle$, то $\langle K \cap H \rangle = H$.

Если $Z(G) \neq 1$, то $K \cap H$ – собственное скрученное подмножество из K , значит, ввиду леммы 1.4 $K \cap H$ – абелева подгруппа, откуда вытекает, что G – абелева группа, чего ввиду леммы 1.6 не может быть. Таким образом, $Z(G) = 1$.

(iii) Докажем, что либо $G = A \rtimes \langle b \rangle$, либо $G = (A \times \varphi(A)) \rtimes \langle b \rangle$, где A – минимальная нетривиальная b -инвариантная подгруппа из G' .

Если A φ -инвариантна, то ввиду (i) и (ii) нетрудно видеть, что φ действует нетривиально на A , откуда следует, что $A \cap K \neq 1$. Тогда из (6) и леммы 1.4 получаем, что

$$G = \langle K \rangle = \langle A, b \rangle = A \rtimes \langle b \rangle.$$

Если A не является φ -инвариантной, то ввиду того, что A – минимальная b -инвариантная подгруппа, имеем $\langle A, \varphi(A) \rangle = A \times \varphi(A)$. Поскольку $b \in K$, то по лемме 1.3 $\varphi(b) = b^{-1}$, значит, $H := \langle A \times \varphi(A), b \rangle$ φ -инвариантна. Очевидно, $H = (A \times \varphi(A)) \rtimes \langle b \rangle$. Ввиду (3) нетрудно видеть, что $(A \times \varphi(A)) \cap K \neq 1$. Тогда из (6) и леммы 1.4 получаем, что $K = Tw(z, b)$ для некоторого элемента z из подгруппы $A \times \varphi(A)$. Следовательно, $G = \langle K \rangle = H$ и пункт (iii) доказан.

(iv) Пусть $G = A \rtimes \langle b \rangle$, тогда группа G и скрученное подмножество K удовлетворяют пункту (1) основной теоремы. Это легко следует из пункта (3) и леммы 1.7.

(v) Пусть $G = (A \times \varphi(A)) \rtimes \langle b \rangle$. Докажем, что тогда группа G и скрученное подмножество K удовлетворяют пункту (2) основной теоремы.

В силу пунктов (3), (iii) необходимо показать, что $|A| = p^{2t+1}$ для некоторого целого числа t . Допустим противное, что $|A| = p^{2t}$ для некоторого целого числа t . Обозначим $k := 2t - 1$.

Имеем

$$A = \langle x \rangle \times \langle x^b \rangle \times \cdots \times \langle x^{b^k} \rangle, \quad \varphi(A) = \langle y \rangle \times \langle y^b \rangle \times \cdots \times \langle y^{b^k} \rangle$$

для некоторых элементов x из A , y из $\varphi(A)$ таких, что $\varphi(x) = y$. Также имеем

$$x^{b^{k+1}} = (x^{\beta_k})^{b^k} \cdots (x^{\beta_1})^b (x^{\beta_0}), \quad y^{b^{k+1}} = (y^{\gamma_k})^{b^k} \cdots (y^{\gamma_1})^b (y^{\gamma_0})$$

для некоторых чисел β_i, γ_i из $\{0, 1, \dots, p-1\}$.

Далее, по лемме 1.8 группа $Q := \varphi(A) \rtimes \langle b \rangle$ обладает инволютивным автоморфизмом θ таким, что $\theta(b) = b^{-1}$. В силу леммы 1.10 существует нетривиальный элемент из $\varphi(A)$, неподвижный относительно θ . Поэтому в силу произвольности в выборе элемента x и ввиду того, что $y = \varphi(x)$, можно считать, что $\theta(y) = y$. Тогда отображение $\tau := \theta\varphi$ изоморфно отображает $A \rtimes \langle b \rangle$ на Q , причем справедливо $\tau(x^{b^i}) = y^{b^i}$ для любого i , откуда следует, что $\beta_j = \gamma_j$, $j = 0, \dots, k$. Следовательно, для $z := xy^{-1}$ имеем $\langle z, b \rangle \cong Q$.

Ввиду (3) легко видеть, что $z \in K$, значит, $\langle z, b \rangle$ φ -инвариантна.

Заметим, что $Tw(z, b)$ не является подгруппой.

Действительно, в противном случае имеем $\langle z, b \rangle = Tw(z, b)$, откуда ввиду того, что $Tw(z, b) \subseteq K$, согласно пункту (3) для любого элемента f из $Tw(z, b)$ имеем $\varphi(f) = f^{-1}$. Очевидно, φ действует регулярно на $\langle z, b \rangle$. Тогда по лемме 1.10 получаем, что $\langle z, b \rangle$ абелева, чего ввиду леммы 1.6 не может быть.

Итак, $Tw(z, b)$ не является подгруппой. Поскольку $Tw(z, b)$ – собственное скрученное подмножество из K , то получаем, что K не является MNG-подмножеством. Получаем противоречие с условием, которое доказывает пункт (v), а вместе с ним и пункт (6).

(7) Пусть $G' \leq Z(G)$. Докажем, что тогда группа G и скрученное подмножество K удовлетворяют пункту (3) основной теоремы.

Анализ ситуации разбивается на ряд этапов.

(i) Докажем, что G – q -группа, где q – некоторое простое число.

Допустим противное, что группа G не является q -группой. Понятно, что G нильпотентна. Тогда $G = P_1 \times \dots \times P_n$, где P_i – p_i -группа, $p_1, \dots, p_n$ – различные нечетные простые числа, $n \geq 2$. Значит, $T_i := K \cap P_i$ – собственное скрученное подмножество из K , следовательно, ввиду леммы 1.4 T_i – абелева подгруппа. Нетрудно видеть, что $\langle K \rangle = \langle T_1 \cup \dots \cup T_n \rangle$, откуда вытекает, что $G = \langle K \rangle$ – абелева группа, чего ввиду леммы 1.6 быть не может.

Таким образом, G – q -группа и пункт (i) доказан.

(ii) Докажем, что $G' = \Phi(G) = Z(G)$.

Так как G нильпотентна, то $G' \leq \Phi(G)$. Поскольку по (4) $G = \langle a, b \rangle$, где ввиду (i) $|a| = |b| = q$, то G/G' – элементарная абелева q -группа, значит, $\Phi(G) \leq G'$.

По условию $G' \leq Z(G)$. Поскольку G/G' – элементарная абелева q -группа ранга 2 и G неабелева, легко видеть, что $Z(G) \leq G'$.

(iii) Докажем, что $Z(G) = \langle [a, b] \rangle$ – циклическая подгруппа порядка q , где a, b – элементы из K , удовлетворяющие пункту (4).

В силу (4) и (i), $G = \langle a, b \rangle$, где $|a| = |b| = q$.

Пусть $z := [a, b]$. По (ii) $\langle z \rangle \leq Z(G)$. Тогда для $\bar{G} := G/\langle z \rangle$ имеем $\bar{G} = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle$ – элементарная абелева q -подгруппа, где $\bar{a}, \bar{b}$ – образы соответственно элементов a, b в $\bar{G}$. Следовательно, $\Phi(G) \subseteq \langle z \rangle \subseteq Z(G)$, откуда ввиду (ii) имеем $Z(G) = \langle z \rangle$.

Далее, поскольку согласно (ii) $Z(G) = \Phi(G)$, то справедливо $[a, b]^q = [a^q, b] = 1$. Таким образом, $|[a, b]| = q$ и пункт (iii) доказан.

Далее, в силу (i)–(iii) получаем, что G – экстраспециальная группа порядка q^3 , т.е. удовлетворяет пункту (3) основной теоремы.

По лемме 1.9 получаем, что

$$K = \{a^m b^n a^m \mid m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Таким образом, пункт (7) доказан и значит в основной теореме выполнена импликация $\Rightarrow$.

Покажем теперь, что в основной теореме выполнена импликация $\Leftarrow$.

Пусть T – собственное скрученное подмножество из K . Покажем, что T – подгруппа. Допустим противное, что $T \neq \langle T \rangle$.

Далее анализ ситуации разбивается на ряд этапов.

(1) Докажем, что $G = \langle T \rangle$.

Допустим противное, что $G \neq \langle T \rangle$. Поскольку согласно лемме 1.11 G – MNS-группа, то получаем, что $\langle T \rangle$ – перекрученная группа, откуда имеем $T = \langle T \rangle$, что противоречит выбору T .

(2) Докажем, что $\text{Ker}(T) = 1$.

Допустим противное, что $\text{Ker}(T) \neq 1$. Ввиду (1) из леммы 1.3(1) вытекает, что $\text{Ker}(T)$ – нормальная подгруппа в G .

Рассмотрим $\bar{G} := G/\text{Ker}(T)$. Пусть $\bar{T}$ – образ T в $\bar{G}$. Поскольку согласно лемме 1.11 G – MNS-группа, то $\bar{G}$ – перекрученная группа, значит, $\bar{T} = \bar{G}$. Тогда из леммы 1.3(2) имеем $G = T$, что противоречит выбору T .

(3) Докажем, что если G удовлетворяет случаю (1) или (2) основной теоремы, то $T = K$.

Из пунктов (1), (2) и леммы 1.3 (3) получаем, что группа G обладает таким инволютивным автоморфизмом φ^* , что $T = \{g^{-1}\varphi^*(g) \mid g \in G\}$. Нетрудно видеть, что $\varphi|_T = \varphi^*|_T$. Так как $G = \langle T \rangle$, получаем, что $\varphi = \varphi^*$, значит, $T = K$.

(4) Докажем, что если G удовлетворяет случаю (3) основной теоремы, то $T = K$.

Из того, что $G \neq K$, ввиду леммы 1.12 вытекает, что $|K| = p^2$. Аналогично получаем, что $|T| = p^2$, откуда имеем $T = K$.

Далее, из (3), (4) получаем противоречие с выбором T , которое доказывает, что K – MNG-подмножество. Основная теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Л. Мыльников, “Конечные перекрученные группы”, *Сиб. матем. журн.*, **48:2** (2007), 369–375.
- [2] M. Aschbacher, “Near subgroups of finite groups”, *J. Group Theory*, **1:2** (1998), 113–129.
- [3] А. Л. Мыльников, “Минимальные негрупповые скрученные подмножества, содержащие инволюцию”, *Алгебра и логика*, **46:4** (2007), 459–482.
- [4] А. Л. Мыльников, “Нильпотентность коммутанта конечной перекрученной группы”, *Сиб. матем. журн.*, **47:5** (2006), 1117–1127.
- [5] А. Л. Мыльников, “Конечные минимальные неперекрученные группы”, *Вестн. Красноярск. гос. ун-та*, **1** (2005), 71–76.
- [6] А. Л. Мыльников, “О конечных минимальных неперекрученных группах”, *Вестн. Красноярск. гос. ун-та*, **4** (2005), 164–169.
- [7] В. В. Беляев, А. Л. Мыльников, “Оценка порядка группы, порожденной конечным скрученным подмножеством”, *Сиб. матем. журн.*, **49:6** (2008), 1235–1237.
- [8] Д. В. Вепринцев, А. Л. Мыльников, “Инволютивная декомпозиция группы и скрученные подмножества с малым количеством инволюций”, *Сиб. матем. журн.*, **49:2** (2008), 274–279.
- [9] А. Л. Мыльников, “Абелевы перекрученные группы”, *Матем. системы*, **3**, Красноярск. гос. аграр. ун-т, Красноярск, 2005, 59–61.
- [10] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper & Row Publ., New York, 1968.
- [11] W. Feit, J. G. Thompson, “Solvability of groups of odd order”, *Pacific J. Math.*, **13:3** (1963), 775–1029.

А. Л. Мыльников

Институт фундаментальной подготовки

Сибирского федерального университета, г. Красноярск

E-mail: mylnand@yandex.ru

Поступило

29.04.2009