Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Микушева, Аналог теоремы Баума–Каца для слабо зависимых случайных величин, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 3, 360–368

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm849>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:29:56

УДК 519.214.5

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ БАУМА–КАЦА ДЛЯ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. Е. Микушева

В статье изучается предельное поведение сумм зависимых случайных величин с условием сильного перемешивания. Получены условия, при которых выполняется аналог теоремы Баума–Каца, и приведен пример, показывающий их оптимальность.

Библиография: 6 названий.

1. Введение. Исследования в области усиленного закона больших чисел (УЗБЧ) – одно из классических направлений современной теории вероятностей, возникшее при изучении независимых слагаемых. Цель данной работы – получить, в определенном смысле, оптимальные результаты о скорости сходимости в УЗБЧ для слабо зависимых случайных величин.

Всюду далее мы будем рассматривать последовательность центрированных случайных величин $\{X_k, k \geq 1\}$, заданных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^n X_k, n \geq 1$.

Прежде всего, напомним известную теорему Марцинкевича–Зигмунда.

ТЕОРЕМА 1 (см., например, [1]). Пусть $\{X_k, k \geq 1\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин. Тогда для любого $p \in [1, 2)$

$$E|X_k|^p < \infty \iff \frac{S_n}{n^{1/p}} \rightarrow 0 \quad \text{н.н. при } n \rightarrow \infty.$$

В статье Рио [2] аналог этого результата был получен для последовательностей, зависимость которых описывалась в терминах должного убывания α – коэффициента Розенблата. Для точной формулировки введем следующие обозначения. Положим

$$\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}} |P(AB) - P(A)P(B)|,$$

где σ -алгебры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ вложены в $\mathcal{F}$. Введем (см. [2]) коэффициент перемешивания

$$\alpha_n = \sup_{k \geq 1} \alpha(\sigma\{X_1, \dots, X_k\}, \sigma\{X_{k+n}\}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

где $\sigma\{X_j, j \in J\}$ есть σ -алгебра, порожденная случайными величинами, стоящими в фигурных скобках (для удобства будем считать $\alpha_0 = 1/4$). Этот коэффициент имеет менее ограничительный характер, чем широко используемый коэффициент сильного перемешивания (см., например, [3, гл. 17]), в определении которого вместо $\sigma\{X_{k+n}\}$ в (1) фигурирует $\sigma\{X_j, j \geq k+n\}$. Пусть $\alpha(t) = \alpha_{[t]}$ при $t > 0$, где $[\cdot]$ – целая часть числа.

Для любой невозрастающей непрерывной справа и имеющей предел слева в каждой точке области определения функции $H: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ определим обобщенную обратную функцию $H^{-1}(u) = \sup\{t \in \mathbb{R}^+ : H(t) > u\}$. Любой случайной величине X с функцией распределения $F(t)$ поставим в соответствие функцию $Q_F = Q_X$, обратную к функции $t \rightarrow P\{|X| > t\}$.

ТЕОРЕМА 2 [2]. Пусть $\{X_k : k \geq 1\}$ – последовательность такая, что

$$\alpha_n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

и найдется неотрицательная случайная величина X со свойством

$$\sup_k P\{|X_k| > t\} \leq P\{X > t\} \quad \text{при всех } t > 0. \quad (3)$$

Пусть для некоторого $p \in (1, 2)$

$$\int_0^1 \left(\alpha^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{p-1} Q_X^p(t) dt < \infty. \quad (4)$$

Тогда

$$\frac{S_n}{n^{1/p}} \rightarrow 0 \quad \text{н.н. при } n \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Если же

$$\int_0^1 Q_X(t) \log\left(1 + \alpha^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt < \infty,$$

то (5) имеет место при $p = 1$.

В [2] показано, что условия этой теоремы оптимальны в следующем смысле. Для любого $p \in (1, 2)$, $\gamma > 1$ и любой непрерывной функции распределения $F(t)$ некоторой центрированной случайной величины таких, что

$$\int_0^1 t^{(1-p)/\gamma} Q_F^p(t) dt = \infty, \quad (6)$$

существует строго стационарный марковский процесс $\{X_k, k \geq 1\}$, для которого

$$P\{X_1 \leq t\} = F(t), \quad (7)$$

$$0 < \varliminf_{n \rightarrow \infty} n^\gamma \alpha_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^\gamma \alpha_n < \infty \quad (8)$$

(таким образом, справедливы условия (2), (3), но не выполнено (4)) и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{n^{1/p}} = \infty.$$

Естественно возникает вопрос о скорости сходимости в УЗБЧ, т.е. в соотношении (5). Часто скорость убывания к нулю последовательности чисел $a_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) характеризуют в терминах сходимости рядов вида $\sum n^\lambda a_n$, где $\lambda > 0$. Именно такой подход для описания асимптотического поведения вероятностей событий, связанных с частными суммами независимых слагаемых, использовали Баум и Кац [4]. Напомним их известный результат.

ТЕОРЕМА 3 [4]. Пусть $\{X_k, k \geq 1\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных центрированных случайных величин. Пусть $p > 1$, $r > 1$, $1/2 < r/p \leq 1$. Тогда следующие три утверждения эквивалентны:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}|X_k|^p < \infty, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \mathbb{P}\{|S_n| > n^{r/p} \varepsilon\} < \infty \quad \text{для каждого } \varepsilon > 0, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \mathbb{P}\left\{\sup_{k \geq n} \frac{|S_k|}{k^{r/p}} > \varepsilon\right\} < \infty \quad \text{для каждого } \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (9)$$

В случае $r = 1$, $1 \leq p < 2$, $\varepsilon > 0$ следующие три утверждения равносильны:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}|X_k|^p \ln^+(|X_k|) < \infty, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (\ln n) \mathbb{P}\{|S_n| > n^{1/p} \varepsilon\} < \infty \quad \text{для любого } \varepsilon > 0, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \mathbb{P}\left\{\sup_{k \geq n} \frac{|S_k|}{k^{1/p}} > \varepsilon\right\} < \infty \quad \text{для любого } \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\ln^+ t = \max\{0, \ln t\}$ для $t > 0$.

Нашей целью является обобщение теоремы Баума и Каца на слабо зависимые величины.

2. Основные результаты. Положим $S_n^* = \max_{1 \leq m \leq n} |S_m|$, $n \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{X_k, k \geq 1\}$ – центрированная последовательность случайных величин, удовлетворяющая условиям теоремы 2. Пусть $1 < p < 2$, $r > 1$, $1/2 < r/p \leq 1$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \mathbb{P}\{S_n^* > n^{r/p} \varepsilon\} < \infty \quad \text{для каждого } \varepsilon > 0, \quad (11)$$

а также имеет место (9).

Если $1 < p < 2$, то условия (2), (3) и

$$\int_0^1 \left(\alpha^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{p-1} Q_X^p(t) \left(\ln\left(\alpha^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)\right) + \ln Q_X(t)\right) dt < \infty \quad (12)$$

влекут соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \ln n \mathbb{P}\{S_n^* > n^{1/p} \varepsilon\} < \infty \quad \text{для любого } \varepsilon > 0, \quad (13)$$

а также (10).

При этом условия первой части теоремы 4 оптимальны в следующем смысле.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $r > 1$, $p > 1$, $1/2 < r/p \leq 1$, $\gamma > 1$. Пусть $F(t)$ – любая непрерывная функция распределения некоторой центрированной случайной величины, для которой выполнено (6). Тогда существует стационарный марковский процесс $\{X_k, k \geq 1\}$, удовлетворяющий условиям (7) и (8) и такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\{S_n^* > n^{r/p} \varepsilon_0\} = \infty \quad \text{для некоторого } \varepsilon_0. \quad (14)$$

Нам потребуются вспомогательные результаты. Для любого $x > 0$ и любого $m \in \mathbb{N}$ обозначим $L_m(x)$ семейство функций $f: \mathbb{R}^m \rightarrow [-1, 1]$, липшицевых с коэффициентом $1/x$, т.е.

$$|f(z) - f(y)| \leq \frac{1}{x} \sum_{i=1}^m |z_i - y_i|, \quad z, y \in \mathbb{R}^m.$$

Пусть $L_m^0(x) \subseteq L_m(x)$ состоит из f таких, что $f(z_1, \dots, z_{m-1}, 0) = 0$ при всех $(z_1, \dots, z_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$. Для последовательности случайных величин $\{X_k, k \geq 1\}$ с конечным вторым моментом введем, следуя [2], для $x > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ коэффициенты зависимости

$$\begin{aligned} \gamma_{m,n}(x) &= \sup_{f \in L_m(x)} |\text{cov}(f(X_1, \dots, X_m), X_{m+n})|, \\ \delta_{m,n}(x) &= \sup_{f \in L_m^0(x)} x |\text{cov}(f(X_1, \dots, X_m), X_{m+n})|. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 4 будет опираться на теорему 4 и лемму 1 из [2], которые мы здесь приведем в качестве лемм 1 и 2.

ЛЕММА 1 [2]. Пусть случайные величины $\{X_k, k \geq 1\}$ обладают конечным вторым моментом. Тогда для любого $x > 0$ верно неравенство

$$P(S_n^* \geq 2x) \leq \frac{2}{x^2} \sum_{k=1}^n EX_k^2 + \frac{4}{x} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_{k,1}(x),$$

причем

$$\gamma_{m,1}(x) \leq \gamma_{m+1-k,k}(x) + \frac{2}{x} \sum_{i=1}^{k-1} \delta_{m+1-i,i}(x).$$

Здесь для удобства считаем $\gamma_{l,n} = \delta_{l,n} = 0$ при $l \leq 0$.

ЛЕММА 2 [2]. Пусть случайные величины $\{X_k, k \geq 1\}$ имеют конечный второй момент. Тогда

$$\delta_{m,n}(x) \leq 2 \int_0^{2\alpha_n} Q_{X_m}(t) Q_{X_{m+n}}(t) dt, \quad \gamma_{m,n}(x) \leq 2 \int_0^{2\alpha_n} Q_{X_{m+n}}(t) dt.$$

ЛЕММА 3. Пусть $\{X_k, k \geq 1\}$ – последовательность центрированных случайных величин, удовлетворяющая условиям (2), (3). Тогда для любых $\beta, \varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$P\{S_n^* \geq \varepsilon n^\beta\} \leq \frac{130n}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{n^\beta} \int_0^{u_n} Q_X(t) dt + \frac{1}{n^{2\beta}} \int_{u_n}^1 H(t) Q_X(t) dt \right),$$

где $H(t) = \alpha^{-1}(t/2)Q_X(t)$, $u_n = H^{-1}(n^\beta)$ (разумеется, $u_n = u_n(\beta)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произведем урезание случайных величин X_k на уровне $Q_X(u_n)$. Положим

$$Z_k^{(1)} := (X_k \wedge Q_X(u_n)) \vee (-Q_X(u_n)); \quad Y_k = X_k - Z_k^{(1)}, \quad Z_k = Z_k^{(1)} - \mathbb{E}Z_k^{(1)}.$$

Имеем

$$|\mathbb{E}Y_k| \leq \mathbb{E}|Y_k| \leq \int_0^{u_n} (Q(t) - Q(u_n)) dt.$$

Введем обозначения: $T_n = \sum_{k=1}^n Z_k$, $T_n^* = \max_{k \leq n} |T_k|$. Тогда верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} P(S_n^* \geq 5x) &\leq P(T_n^* \geq 4x) + P\left(\sum_{k=1}^n |Y_k| + |\mathbb{E}Y_k| \geq x\right) \\ &\leq P(T_n^* \geq 4x) + \frac{2n}{x} \int_0^{u_n} (Q_X(t) - Q_X(u_n)) dt. \end{aligned}$$

Применим лемму 2 к величинам $\{Z_k\}$:

$$\gamma_{i,1}(2x) \leq \frac{2}{x} \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^{2\alpha_i} Q_X^2(t \vee u_n) dt + 2 \int_0^{2\alpha_k} Q_X(t \vee u_n) dt,$$

где k – любое натуральное число. Имеем

$$\mathbb{E}(Z_k^{(1)})^2 = \int_0^1 Q_X^2(t \vee u_n) dt \leq 2 \int_0^{2\alpha_0} Q_X^2(t \vee u_n) dt.$$

Из леммы 1 получаем

$$P(T_n^* \geq 4x) \leq \frac{4n}{x^2} \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^{2\alpha_i} Q_X^2(t \vee u_n) dt + \frac{4n}{x} \int_0^{2\alpha_k} Q_X(t \vee u_n) dt.$$

Выберем $k = \alpha^{-1}(u_n/2)$. Тогда

$$\int_0^{2\alpha_k} Q_X(t \vee u_n) dt = \int_0^{u_n} Q_X(t) dt,$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \int_0^{2\alpha_i} Q_X^2(t \vee u_n) dt = \int_0^1 \left(\alpha^{-1}\left(\frac{t}{2}\right) \wedge k \right) Q_X^2(t \vee u_n) dt \leq \int_0^1 H(t \vee u_n) Q_X(t) dt.$$

В итоге

$$P(S_n^* \geq 5x) \leq \frac{6n}{x} \int_0^{u_n} Q_X(t) dt + \frac{4n}{x^2} \int_0^1 H(t \vee u_n) Q_X(t) dt.$$

Так как $H(t) \leq n^\beta \iff t \geq u_n$, то

$$\int_0^{u_n} H(u_n) Q(t) dt \leq n^\beta \int_0^{u_n} Q(t) dt,$$

откуда и следует утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Докажем, что из (2)–(4) следует (11). Применим лемму 3 с $\beta = r/p$; получим, что выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \mathbf{P}(S_n^* \geq \varepsilon n^{r/p})$$

не превосходит

$$\frac{130}{\varepsilon^2} \left(\int_0^1 Q_X(t) \left(\sum_{n \leq H^{p/r}(t)} n^{r-1-r/p} \right) dt + \int_0^1 H(t) Q_X(t) \left(\sum_{n \geq H^{p/r}(t)} n^{r-1-2r/p} \right) dt \right).$$

Условия теоремы 4 обеспечивают сходимость ряда $\sum n^{r-1-2r/p}$. Так как

$$\sum_{n \leq H^{p/r}(t)} n^{r-1-r/p} \leq \text{const } H^{p-1}(t), \quad \sum_{n \geq H^{p/r}(t)} n^{r-1-2r/p} \leq \text{const } H^{p-2}(t),$$

получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \mathbf{P}\{S_n^* \geq \varepsilon n^{r/p}\} \leq \text{const} \left(\int_0^1 Q_X(t) H^{p-1}(t) dt \right). \quad (15)$$

Из неравенства (15) следует, что (4) влечет (11).

Аналогично, учитывая, что

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq H^p(t)} (\ln n) n^{-1/p} &\leq \text{const } H^{p-1} \ln(H(t)), \\ \sum_{n \geq H^p(t)} (\ln n) n^{-2/p} &\leq \text{const } H^{p-2} \ln(H(t)), \end{aligned}$$

доказывается, что (12) влечет (13).

Докажем, что из (11) следует (9):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \mathbf{P} \left(\max_{j \geq n} \frac{|S_j|}{j^{r/p}} \geq \varepsilon \right) &\leq c_1 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(r-1)} \mathbf{P} \left(\max_{j \geq 2^k} \frac{|S_j|}{j^{r/p}} \geq \varepsilon \right) \\ &\leq c_1 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k(r-1)} \sum_{l=k}^{\infty} \mathbf{P} \left(\max_{2^l \leq j \leq 2^{l+1}} \frac{|S_j|}{j^{r/p}} \geq \varepsilon \right) \\ &\leq c_1 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2^{(l+1)(r-1)} - 1}{2^{r-1} - 1} \mathbf{P} \left(\max_{2^l \leq j < 2^{l+1}} \frac{|S_j|}{j^{r/p}} \geq \varepsilon \right) \\ &\leq c_2 \sum_{l=0}^{\infty} 2^{(l+1)(r-1)} \mathbf{P} \left(\max_{2^l \leq j < 2^{l+1}} |S_j| \geq \varepsilon 2^{lr/p} \right) \\ &\leq c_2 \sum_{l=0}^{\infty} 2^{(l+1)(r-1)} \mathbf{P} \left(\max_{0 \leq j \leq 2^{l+1}} |S_j| \geq \varepsilon 2^{lr/p} \right) \\ &\leq c_2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=2^{l+1}}^{2^{l+2}-1} 2^{(l+1)(r-2)} \mathbf{P} \left(\max_{0 \leq j \leq 2^{l+1}} |S_j| \geq \tilde{\varepsilon} 2^{(l+2)r/p} \right) \\ &\leq c_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \mathbf{P} \left(\max_{j \leq n} |S_j| \geq \tilde{\varepsilon} n^{r/p} \right); \end{aligned}$$

здесь $c_1 = 2^{r-2}$, $c_2 = c_1/(2^{r-1} - 1)$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \cdot 2^{-2r/p}$.

Аналогично доказывается, что (13) влечет (10):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\left(\max_{j \geq n} \frac{|S_j|}{j^{1/p}} \geq \varepsilon\right) &\leq \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\max_{j \geq 2^k} \frac{|S_j|}{j^{1/p}} \geq \varepsilon\right) \leq \sum_{l=0}^{\infty} l P\left(\max_{2^l \leq j < 2^{l+1}} \frac{|S_j|}{j^{1/p}} \geq \varepsilon\right) \\ &\leq \sum_{l=1}^{\infty} l P\left(\max_{0 \leq j \leq 2^{l+1}} |S_j| \geq \varepsilon 2^{l/p}\right) \\ &\leq c \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=2^{l+1}}^{2^{l+2}-1} \frac{l}{2^{l+2}} P\left(\max_{0 \leq j \leq 2^{l+1}} |S_j| \geq \tilde{\varepsilon} 2^{(l+2)/p}\right) \\ &\leq c \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \cdot n^{-1} P\left(\max_{j \leq n} |S_k| \geq \tilde{\varepsilon} n^{1/p}\right), \end{aligned}$$

где $c = 2$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon \cdot 2^{-2/p}$.

3. Оптимальность условий. В этом пункте мы докажем теорему 5. Пример строго стационарного марковского процесса с дискретным временем, удовлетворяющего условиям (7) и (8), был впервые построен в [5]. (Некоторые замечания об этом примере имеются также в [2].) Приведем его здесь.

Рассмотрим марковский процесс $\{Y_k, k \geq 1\}$ с дискретным временем и пространством состояний $[0, 1]$, имеющий переходную функцию

$$P(x, A) = T(x)\delta_x(A) + (1 - T(x))\mu(A) \quad (16)$$

и начальное распределение ν , где $T(x) = 1 - x$, $x \in [0, 1]$, μ и ν — меры на $[0, 1]$ с производными относительно меры Лебега λ на $[0, 1]$ равными

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = (1 + \gamma)x^\gamma, \quad \frac{d\nu}{d\lambda} = \gamma x^{\gamma-1}.$$

Введем функцию $F_\nu(t) = t^\gamma$, $t \in [0, 1]$. В [5] было показано, что величины $U_k = F_\nu(Y_k)$ равномерно распределены на $[0, 1]$. Согласно [5] величины $X_k = F^{-1}(U_k)$ центрированы и образуют строго стационарный марковский процесс, удовлетворяющий условиям (7) и (8).

Покажем, что для любой непрерывной функции $F(x)$, удовлетворяющей условию теоремы 5, ряд (14) расходится.

Пусть $\{T_k\}$ — возрастающая последовательность моментов остановки, определяемая следующим образом: $T_0 = \inf\{i > 0 : Y_i \neq Y_{i-1}\}$, $T_k = \inf\{i > T_k : Y_i \neq Y_{i-1}\}$, $\tau_k = T_{k+1} - T_k$.

Из строго марковского свойства и выражения (16) следует, что $\{\tau_k, k \geq 0\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением

$$P(\tau_k > n | Y_{T_k} = \theta) = (1 - \theta)^n. \quad (17)$$

Согласно [5] Y_{T_k} имеет распределение μ . Заметим, что из условия $\gamma > 1$, последнего утверждения и (17) следует, что

$$E\tau_k^2 < \infty. \quad (18)$$

Применив к величинам $\{\tau_k, k \geq 0\}$ теорему Сью и Роббинса [6], получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|T_n - E\tau n| > \delta n) < \infty \quad \text{для любого } \delta > 0. \quad (19)$$

При любых $\beta, \delta > 0, n \in \mathbb{N}$ верны следующие неравенства:

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\sum_{k=1}^{T_n} X_k\right| > \varepsilon n^\beta\right\} &\leq P\left\{\left|\sum_{k=1}^{[E\tau n]} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2} n^\beta\right\} + P\left\{\left|\sum_{k=1}^{[E\tau n]} X_k - \sum_{k=1}^{T_n} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2} n^\beta\right\} \\ &\leq P\left\{\left|\sum_{k=1}^{[E\tau n]} X_k\right| > \frac{\varepsilon}{2} n^\beta\right\} + P\{|T_n - [E\tau n]| > \delta n\} \\ &\quad + 2P\left\{\sup_{k \leq 2\delta n} \left|\sum_{i \leq k} X_i\right| > \frac{\varepsilon}{4} n^\beta\right\}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались стационарностью последовательности $\{X_k\}$.

Положив $\delta = \max\{1, E\tau\}$, получаем

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\sum_{k=1}^{T_n} X_k\right| > \varepsilon n^\beta\right\} &\leq P\{|T_n - [E\tau n]| > \frac{1}{2n}\} \\ &\quad + 3P\left\{\sup_{k \leq \max\{n, [E\tau n]\}} \left|\sum_{i \leq k} X_i\right| > \frac{\tilde{\varepsilon}}{4} (\max\{n, [E\tau n]\})^\beta\right\}, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\tilde{\varepsilon} = \min\{\varepsilon, \varepsilon(E\tau)^{-\beta}\}$.

При $\beta = r/p$, где r, p удовлетворяют условиям теоремы 5, из (19) и (20) следует, что (11) влечет сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} P\left\{\left|\sum_{k=1}^{T_n} X_k\right| > \varepsilon n^{r/p}\right\} < \infty. \quad (21)$$

Из определений моментов остановки имеем

$$\sum_{i=1}^{T_n-1} X_i = \sum_{i=1}^{\tau-1} X_i + \sum_{k=0}^{n-1} \tau_k X_{T_k}.$$

Согласно строго марковскому свойству величины $(\tau_k X_{T_k})$ независимы и одинаково распределены. Из (17) следует

$$E|\tau_k X_{T_k}| = \text{const} \int_0^1 |F^{-1}(\theta^\gamma)| \theta^{\gamma-1} d\theta$$

и $E(\tau_k X_k) = 0$; значит, к ним применима теорема 3, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} \mathbb{P} \left\{ \left| \sum_{k=1}^n \tau_k X_{T_k} \right| > \varepsilon n^{r/p} \right\} < \infty \iff E(\tau_k X_{T_k})^p < \infty.$$

Но условие (6) влечет $E(\tau_k X_{T_k})^p = \infty$; значит (21) не верно, что завершает доказательство теоремы 5.

Автор выражает признательность профессору А. В. Булинскому за помощь при работе над статьей. Хотелось бы также поблагодарить рецензента за ценные замечания, способствовавшие улучшению текста статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Marcinkiewicz J., Zygmund A. Sur les fonctions independantes // Fund. Math. 1937. V. 29. P. 60–90.
- [2] Rio E. A maximal inequality and dependent Marcinkiewicz–Zygmund strong law // Ann. Probab. 1995. V. 23. №2. P. 918–937.
- [3] Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
- [4] Baum L. E., Katz M. Convergence rate in the law of large numbers // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 120. P. 108–123.
- [5] Doukhan P., Massart P., Rio E. The functional central limit theorem for strongly mixing processes // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1994. V. 30. P. 63–82.
- [6] Hsu P. L., Robbins H. Complete convergence and the law of large numbers // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1947. V. 33. P. 25–31.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: mikusheva@prtb.com.ru

Поступило
29.04.1999
Исправленный вариант
15.09.1999