Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Лауринчикас, Оценка роста преобразования Меллина дзета-функции Римана, *Матем. заметки*, 2011, том 89, выпуск 1, 70–81

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8491>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:06:15

Оценка роста преобразования Меллина дзета-функции Римана

А. Лауринчикас

В статье получена оценка сверху для модифицированного преобразования Меллина дзета-функции Римана в критической полосе.

Библиография: 25 названий.

1. Введение. Модифицированные преобразования Меллина $\mathcal{Z}_k(s, \rho)$, $s = \sigma + it$, $\rho \geq 1/2$, $k \geq 0$, дзета-функции Римана $\zeta(s)$ при $\sigma \geq \sigma_0(k) > 1$ определяются интегралом

$$\mathcal{Z}_k(s, \rho) = \int_1^\infty |\zeta(\rho + ix)|^{2k} x^{-s} dx.$$

Ивич, Ютила, Мотохаши и Луккаринен изучали функции $\mathcal{Z}_1(s, 1/2)$ и $\mathcal{Z}_2(s, 1/2)$ и применяли их при изучении моментов

$$\int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{2k} dt, \quad T \rightarrow \infty$$

(см. [1]–[12]). Вероятностные свойства функций $\mathcal{Z}_1(s, 1/2)$ и $\mathcal{Z}_2(s, 1/2)$ были получены в [13]–[16].

В настоящей заметке мы продолжаем изучение функции $\mathcal{Z}_1(s, \rho)$ с фиксированным ρ , $1/2 < \rho < 1$. Первые результаты для функции $\mathcal{Z}_1(s, \rho)$ были получены в [17] и [18]. Мы начали изучение функции $\mathcal{Z}_1(s, \rho)$ под влиянием вышеупомянутых работ, имея в виду применения ко второму моменту

$$\int_0^T |\zeta(\rho + it)|^2 dt.$$

Статьи [17] и [18] посвящены мероморфному продолжению функции $\mathcal{Z}_1(s, \rho)$. Для малого $r > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ пусть

$$a_k(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \left(\frac{z}{e^{z/2} - e^{-z/2}} \right)^{2-2\rho} \frac{dz}{z^{k+1}}.$$

ТЕОРЕМА 1 [18]. *Функция $\mathcal{Z}_1(s, \rho)$ имеет мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость. Точки $s = 1$ и $s = 2 - 2\rho$ являются ее простыми полюсами и*

$$\operatorname{Res}_{s=1} \mathcal{Z}_1(s, \rho) = \zeta(2\rho), \quad \operatorname{Res}_{s=2-2\rho} \mathcal{Z}_1(s, \rho) = (2\pi)^{2\rho-1} \zeta(2-2\rho).$$

Работа выполнена при поддержке Фонда науки и студий Литвы

Кроме того, $\mathcal{Z}_1(s, \rho)$ не имеет других особых точек, кроме возможных простых полюсов $s = 2 - k - 2\rho$ для положительных четных k , и если $a_k(\rho) \neq 0$, то

$$\operatorname{Re} s_{s=2-k-2\rho} \mathcal{Z}_1(s, \rho) = (2\pi)^{2\rho-1} a_k(\rho) (1-2\rho) \cdots (2-k-2\rho) \zeta(2-2\rho).$$

Применение и дальнейшее изучение распределения значений функции $\mathcal{Z}_1(s, \rho)$ требует получения оценок для нее и ее среднего квадратичного. В настоящей заметке мы получим оценку сверху для функции $\mathcal{Z}_1(s, \rho)$, $1/2 < \rho < 1$. Отметим, что функция $\mathcal{Z}_1(s, 1/2)$ была введена и рассмотрена в [7], где при $0 \leq \sigma \leq 1$ и $t \geq t_0 > 0$ для любого $\epsilon > 0$ была получена оценка

$$\mathcal{Z}_1\left(\sigma + it, \frac{1}{2}\right) \ll_{\epsilon} t^{1-\sigma+\epsilon}. \quad (1)$$

Ютила в [8] показал, что при $|s-1| \gg 1$

$$\mathcal{Z}_1\left(\sigma + it, \frac{1}{2}\right) \ll_{\epsilon} \begin{cases} (|t|+1)^{1-4\sigma/3+\epsilon}, & \text{если } 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}, \\ (|t|+1)^{5/6-\sigma+\epsilon}, & \text{если } \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1. \end{cases}$$

Недавно Луккаринен [10] множитель t^{ϵ} в (1) поменяла на $\log^2 t$. Для малых значений σ это также лучше, чем оценка Ютилы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $1/2 < \rho < 1$, $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$ и $t \geq 2$. Тогда имеет место оценка

$$\mathcal{Z}_1(\sigma + it, \rho) \ll_{\sigma_0} t^{1-\sigma} \log t.$$

Оценка теоремы 2 не является неулучшаемой, но она достаточна для дальнейшего изучения функции $\mathcal{Z}_1(s, \rho)$. При ее доказательстве мы будем пользоваться некоторыми идеями и результатами работы [7].

2. Вспомогательные результаты о среднем квадратическом дзета-функции Римана. В этом пункте мы напомним некоторые известные результаты о среднем квадратическом дзета-функции Римана

$$I_{\sigma}(T) = \int_0^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt, \quad T \rightarrow \infty,$$

в критической полосе $1/2 < \sigma < 1$. Определим функцию $E_{\sigma}(T)$ формулой

$$E_{\sigma}(T) = I_{\sigma}(T) - \zeta(2\sigma)T - (2\pi)^{2\sigma-1} \frac{\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma} T^{2-2\sigma}. \quad (2)$$

Тогда для функции $E_{\sigma}(T)$ имеет место аналог формулы Аткинсона об остаточном члене для $I_{1/2}(T)$. Пусть $T \ll X \ll T$, $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$,

$$e(T, m) = \left(1 + \frac{\pi m}{2T}\right)^{-1/4} \left(\frac{2T}{\pi m}\right)^{-1/2} \left(\operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\pi m}{2T}}\right)\right)^{-1},$$

$$f(T, m) = 2T \operatorname{arsinh}\left(\sqrt{\frac{\pi m}{2T}}\right) + (\pi^2 m^2 + 2\pi m T)^{1/2} - \frac{\pi}{4},$$

$$g(T, m) = T \log \left(\frac{T}{2\pi m} \right) - T + \frac{\pi}{4},$$

и

$$X_1 = \frac{T}{2\pi} + \frac{X}{2} - \sqrt{X} \left(\frac{T}{2\pi} + \frac{X}{4} \right)^{1/2}.$$

Кроме того, как обычно, пусть

$$\sigma_a(m) = \sum_{d|m} d^a, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Определим две суммы

$$\begin{aligned} \sum_{1, \sigma} (T, X) &= \sqrt{2} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{3/4 - \sigma} \sum_{m \leq X} (-1)^m \sigma_{1-2\sigma}(m) m^{\sigma-5/4} e(T, m) \cos(f(T, m)), \\ \sum_{2, \sigma} (T, X) &= 2 \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{1/2 - \sigma} \sum_{m \leq X_1} \sigma_{1-2\sigma}(m) m^{\sigma-1} \left(\log \frac{T}{2\pi m} \right)^{-1} \cos(g(T, m)). \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. *Предположим, что $1/2 < \sigma < 1$. Тогда*

$$E_\sigma(T) = \sum_{1, \sigma} (T, X) + \sum_{2, \sigma} (T, X) + O(\log T).$$

Формула леммы 1 для $1/2 < \sigma < 3/4$ была доказана Матсумото в [19] и распространена на весь интервал $(0, 1)$ в работе [20], см. также [21].

ЛЕММА 2. *При $1/2 < \sigma < 1$ имеет место оценка*

$$E_\sigma(T) \ll T^{2(1-\sigma)/3} (\log T)^{2/9}.$$

Оценка леммы 2 получена Ивичем и Матсумото в [22].

Следующая лемма содержит информацию о среднем квадратическом функции $E_\sigma(T)$. Пусть

$$A_0 = \zeta^2 \left(\frac{3}{2} \right) \zeta(2) \zeta^{-1}(3)$$

и при $1/2 < \sigma < 3/4$

$$A_1(\sigma) = \frac{2}{5-4\sigma} (2\pi)^{2\sigma-3/2} \zeta^2 \left(\frac{3}{2} \right) \zeta^{-1}(3) \zeta \left(\frac{5}{2} - 2\sigma \right) \zeta \left(\frac{1}{2} + 2\sigma \right).$$

ЛЕММА 3. *Имеет место оценки*

$$\int_2^T E_\sigma^2(t) dt = \begin{cases} A_1(\sigma) T^{5/2-2\sigma} + O(T), & \text{если } \frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{3}{4}, \\ A_0 T \log T + O(T), & \text{если } \sigma = \frac{3}{4}, \\ O(T), & \text{если } \frac{3}{4} \leq \sigma \leq 1. \end{cases}$$

Первая асимптотическая формула леммы 3 и третья оценка принадлежит Матсумото и Мерману [20], [23], а второе равенство было получено Ламом [24].

3. Сведение к оцениванию одного интеграла. В силу формулы (2) и леммы 2 при $\sigma > 1$ находим, что

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_1(s, \rho) &= \int_1^\infty |\zeta(\rho + it)|^2 x^{-s} dx = \int_1^\infty x^{-s} d\left(\int_0^x |\zeta(\rho + ix)|^2 dt\right) \\ &= \zeta(2\rho) \int_1^\infty x^{-s} dx + (2\pi)^{2\rho-1} \zeta(2-2\rho) \int_1^\infty x^{1-2\rho-s} dx + \int_1^\infty E'_\rho(x) x^{-s} dx \\ &= \frac{\zeta(2\rho)}{s-1} + \frac{(2\pi)^{2\rho-1} \zeta(2-2\rho)}{s-(2-2\rho)} - E_\rho(1) + s \int_1^\infty E_\rho(x) x^{-s-1} dx.\end{aligned}\quad (3)$$

Замечаем, что интеграл в (3) сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах полуплоскости

$$\sigma > \begin{cases} \frac{3}{4} - \rho, & \text{если } \frac{1}{2} < \rho < \frac{3}{4}, \\ 0, & \text{если } \frac{3}{4} \leq \rho < 1. \end{cases}\quad (4)$$

Действительно, для всякого $\theta > 1/2$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty E_\rho(x) x^{-s-1} dx &\ll \left(\int_1^\infty E_\rho^2(x) x^{-2\sigma-2+2\theta} dx \int_1^\infty x^{-2\theta} dx \right)^{1/2} \\ &\ll \left(\int_1^\infty E_\rho^2(x) x^{-2\sigma-2+2\theta} dx \right)^{1/2}.\end{aligned}\quad (5)$$

В силу леммы 3

$$\int_2^\infty E_\rho^2(x) x^{-2\sigma-2+2\theta} dx = \int_2^\infty x^{-2\sigma-2+2\theta} d\left(\int_2^x E_\rho^2(t) dt\right) \ll 1$$

при

$$\sigma > \begin{cases} \frac{1}{4} + \theta - \rho, & \text{если } \frac{1}{2} < \rho < \frac{3}{4}, \\ \theta - \frac{1}{2}, & \text{если } \frac{3}{4} \leq \rho < 1. \end{cases}$$

Это и (5) показывают, что интеграл в (3) сходится равномерно на компактных подмножествах полуплоскости (4) и определяет там аналитическую функцию. Поэтому равенство (3) имеет место для σ , удовлетворяющих неравенству (4). Кроме того, в силу теоремы 1 равенство (3) остается справедливым даже при $\sigma > -2\rho$. Следовательно, доказательство теоремы 2 сводится к оцениванию интеграла

$$s \int_1^\infty E_\rho(x) x^{-s-1} dx. \quad (6)$$

Запишем интеграл (6) в виде

$$s \int_1^\infty E_\rho(x) x^{-s-1} dx = s \left(\int_1^{2t} + \int_{2t}^{2t^2} + \int_{2t^2}^\infty \right) E_\rho(x) x^{-s-1} dx \stackrel{\text{def}}{=} s(I_1 + I_2 + I_3). \quad (7)$$

Самым простым является интеграл I_1 . Имеем

$$sI_1 = - \int_1^{2t} E_\rho(x) dx^{-s}. \quad (8)$$

При $u \leq t$ в силу леммы 2

$$\int_u^{2u} E_\rho(x) dx^{-s} \ll u^{-\sigma} u^{2/3(1-\rho)} + u^{-\sigma} \text{Var}_{[u,2u]}(E_\rho(x)). \quad (9)$$

Легко видеть, что из равенства (2) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \text{Var}_{[u,2u]}(E_\rho(x)) &\leq \text{Var}_{[u,2u]}(I_\rho(x)) + \zeta(2\rho) \text{Var}_{[u,2u]}(x) \\ &\quad + (2\pi)^{2\rho-1} \frac{|\zeta(2-2\rho)|}{2-2\rho} \text{Var}_{[u,2u]}(x^{2-2\rho}). \end{aligned}$$

Поскольку функции $I_\rho(x)$, x и $x^{2-2\rho}$ являются возрастающими, отсюда находим, что

$$\text{Var}_{[u,2u]}(E_\rho(x)) \ll I_\rho(2u) - I_\rho(u) + u + (2u)^{2-2\rho} - u^{2-2\rho} \ll u.$$

Поэтому, используя (9), получаем оценку

$$\int_u^{2u} E_\rho(x) dx^{-s} \ll u^{2/3-\sigma-2\rho/3} + u^{1-\sigma} \ll u^{1-\sigma}.$$

Эта оценка вместе с равенством (8) с некоторым $c > 0$ влечет за собой оценку

$$sI_1 \ll \sum_{0 \leq j \leq c \log t} (t2^{-j})^{1-\sigma} \ll t^{1-\sigma} \log t. \quad (10)$$

Для некоторых значений σ интеграл

$$\int_{2t}^{\infty} E(x) x^{-s-1} dx$$

оценивается при помощи леммы 3. При $u \geq 2t$ имеем

$$\begin{aligned} \int_u^{2u} E(x) x^{-s-1} dx &\ll \left(\int_u^{2u} E^2(x) dx \int_u^{2u} u^{-2\sigma-2} dx \right)^{1/2} \\ &\ll \begin{cases} u^{3/4-\rho-\sigma}, & \text{если } \frac{1}{2} < \rho < \frac{3}{4}, \\ u^{-\sigma} \log u, & \text{если } \rho = \frac{3}{4}, \\ u^{-\sigma}, & \text{если } \frac{3}{4} < \rho < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Поэтому при $\sigma > 0$

$$\begin{aligned} s \int_{2t}^{\infty} E(x) x^{-s-1} dx &\ll t \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{t \cdot 2^j}^{t \cdot 2^{j+1}} E(x) x^{-s-1} dx \right| \\ &\ll t \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} (t \cdot 2^j)^{-\sigma} \log(t \cdot 2^j), & \text{если } \rho = \frac{3}{4}, \\ \sum_{j=1}^{\infty} (t \cdot 2^j)^{-\sigma}, & \text{если } \frac{3}{4} < \rho < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\ll_{\sigma} \begin{cases} t^{1-\sigma} \log t, & \text{если } \rho = \frac{3}{4}, \\ t^{1-\sigma}, & \text{если } \frac{3}{4} < \rho < 1. \end{cases} \quad (11)$$

Аналогично находим, что если $1/2 < \rho < 3/4$, то при $\sigma > 3/4 - \rho$ выполняется оценка

$$s \int_{2t}^{\infty} E(x) x^{-s-1} dx \ll_{\sigma} t^{7/4-\rho-\sigma}.$$

Эта оценка и (10), (11) приводят к оценкам

$$\mathcal{Z}_1(s, \rho) \ll_{\sigma} \begin{cases} t^{7/4-\rho-\sigma}, & \text{если } \frac{1}{2} < \rho < \frac{3}{4} \text{ и } \frac{3}{4} - \rho < \sigma \leq 1, \\ t^{1-\sigma} \log t, & \text{если } \rho = \frac{3}{4} \text{ и } 0 < \sigma \leq 1, \\ t^{1-\sigma} \log t, & \text{если } \frac{3}{4} < \rho < 1 \text{ и } 0 < \sigma \leq 1. \end{cases}$$

4. Применение формулы Аткинсона. В этом пункте для оценки интегралов I_2 и I_3 в (7) мы применяем лемму 1. Также неоднократно будем пользоваться следующей классической леммой об оценке экспоненциальных интегралов, доказательство которой можно найти, например, в [25; леммы 2.1 и 2.2].

ЛЕММА 4. Пусть $g(x)$ – положительная монотонная функция на отрезке $[a, b]$, $|g(x)| \leq G$, а $f(x)$ – r раз дифференцируемая функция на $[a, b]$, причем $f^{(r)}(x) \geq a > 0$ или $f^{(r)}(x) \leq -a < 0$, $r = 1, 2$. Если $r = 1$, то предполагаем монотонность производной $f'(x)$. Тогда

$$\int_a^b g(x) e^{if(x)} dx \ll G a^{-1/r}.$$

Пусть $u \geq 2t$. В лемме 1 положим $X = c_1 u$, где c_1 – достаточно малая положительная постоянная.

ЛЕММА 5. Имеет место оценка

$$\int_u^{2u} \sum_{2, \rho}^2(x, X) dx \ll u \log u.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем пользоваться идеей и некоторыми результатами доказательства теоремы 15.4 из [25; с. 468–469]. Из определения функции $\sum_{2, \rho}(x, X)$ и формулы для произведения косинусов находим, что

$$\begin{aligned} \sum_{2, \rho}^2(x, X) &= 2 \left(\frac{x}{2\pi} \right)^{1-2\rho} \sum_{m \leq X_1} \sum_{n \leq X_1} \sigma_{1-2\rho}(m) \sigma_{1-2\rho}(n) (mn)^{\rho-1} \left(\log \frac{x}{2\pi m} \right)^{-1} \\ &\quad \times \left(\log \frac{x}{2\pi n} \right)^{-1} \left(\cos \left(x \log \frac{x^2}{4\pi mn} - 2x + \frac{\pi}{2} \right) + \cos \left(x \log \frac{m}{n} \right) \right), \end{aligned}$$

где величина X_1 зависит от x и была определена перед формулировкой леммы 1. Отсюда, дословно повторяя рассуждения доказательства упомянутой теоремы из [25] и используя полученные там оценки, получаем, что

$$\begin{aligned} & \int_u^{2u} \sum_{2,\rho}^2(x, X) dx \\ & \ll u^{2-2\rho} \sum_{m \leq u} \sigma_{1-2\rho}^2(m) m^{2\rho-2} + u^{1-2\rho} \sum_{m \leq u} \sigma_{1-2\rho}^2(m) m^{2\rho-2} (u + m \log u). \end{aligned} \quad (12)$$

В [23; с. 370–371], было получено, что

$$\sum_{m \leq u} \sigma_{1-2\rho}^2(m) \ll u.$$

Отсюда, суммируя по частям, находим, что

$$\sum_{m \leq u} \sigma_{1-2\rho}^2(m) m^{2\rho-2} \ll u^{2\rho-1}, \quad \sum_{m \leq u} \sigma_{1-2\rho}^2(m) m^{2\rho-1} \ll u^{2\rho}.$$

Эти оценки вместе с (12) доказывают лемму.

ЛЕММА 6. При $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$ и $u \geq 2$

$$s \int_{2t}^{\infty} x^{-s-1} \sum_{2,\rho}(x, X) dx \ll_{\sigma_0} t^{1-\sigma} (\log t)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу неравенства Коши и леммы 5

$$\int_u^{2u} x^{-s-1} \sum_{2,\rho}(x, X) dx \ll \left(\int_u^{2u} \sum_{2,\rho}^2(x, X) dx \int_u^{2u} x^{-2\sigma-2} dx \right)^{1/2} \ll u^{-\sigma} (\log u)^{1/2}.$$

Следовательно, при $\sigma \geq \sigma_0$

$$s \int_{2t}^{\infty} x^{-s-1} \sum_{2,\rho}(x, X) dx \ll t \sum_{j=1}^{\infty} (t \cdot 2^j)^{-\sigma} (\log t \cdot 2^j)^{1/2} \ll_{\sigma_0} t^{1-\sigma} (\log t)^{1/2}.$$

Через $R(T)$ обозначим остаточный член в формуле леммы 1, т.е. $R(T) = O(\log T)$.

ЛЕММА 7. При $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$ и $u \geq 2$

$$s \int_{2t}^{\infty} R(x) x^{-s-1} dx \ll_{\sigma_0} t^{1-\sigma} \log t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что при $\sigma \geq 0$ и $u \geq 2t$

$$\int_u^{2u} R(x) x^{-s-1} dx \ll u^{-\sigma} \log u.$$

Таким образом, при $0 < \sigma_0 \leq \sigma \leq 1$

$$s \int_{2t}^{\infty} R(x) x^{-s-1} dx \ll_{\sigma_0} t^{1-\sigma} \log t.$$

Из лемм 6 и 7 следует, что остается оценить при $u \geq 2t$ интеграл

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \int_u^{2u} \sum_{1,\rho} (x, X) x^{-s-1} dx.$$

ЛЕММА 8. При $0 \leq \sigma \leq 1$ и $t \geq 2$ имеют место оценки

$$s \int_{2t^2}^{\infty} \sum_{1,\rho} (x, X) x^{-s-1} dx \ll \begin{cases} t^{3/2-2\rho-2\sigma}, & \text{если } \frac{1}{2} < \rho < \frac{3}{4}, \\ t^{3/2-2\rho-2\sigma} \log t, & \text{если } \rho = \frac{3}{4}, \\ t^{-2\sigma}, & \text{если } \frac{3}{4} < \rho < 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения суммы $\sum_{1,\rho} (x, X)$ имеем

$$\begin{aligned} J &= \int_u^{2u} x^{-1/4-\rho-\sigma} e(x, m) (\exp\{i(f(x, m) - t \log x)\} + \exp\{-i(f(x, m) + t \log x)\}) dx \\ &\quad \times \frac{\sqrt{2}}{2} (2\pi)^{\rho-3/4} \sum_{m \leq c_1 u} (-1)^m \sigma_{1-2\rho}(m) m^{\rho-5/4}. \end{aligned}$$

Функция $x^{-1/4-\rho-\sigma} e(x, m)$ монотонна; кроме того,

$$x^{-1/4-\rho-\sigma} e(x, m) = x^{-1/4-\rho-\sigma} + O(mx^{-5/4-\rho-\sigma}).$$

Ясно, что вместо J мы можем рассматривать его комплексно сопряженный $\bar{J}$. Поэтому более удобно работать с функцией

$$F_{\pm}(x, m) = f(x, m) \pm t \log x.$$

При $u \geq 2t^2$, $x \in [u, 2u]$ и $m \leq c_1 u$ имеем

$$\begin{aligned} F'_{\pm}(x, m) &= 2 \log \left(\sqrt{\frac{\pi m}{2x}} + \sqrt{1 + \frac{\pi m}{2x}} \right) \pm \frac{t}{x} \\ &\geq 2 \log \left(\sqrt{\frac{\pi m}{4u}} + \sqrt{1 + \frac{\pi m}{4u}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2u}} \gg \sqrt{\frac{m}{u}}, \end{aligned}$$

если константа c_1 достаточно мала. Применяя лемму 4 с $r = 1$, получаем оценку

$$J \ll u^{1/4-\rho-\sigma} \sum_{m \leq c_1 u} \sigma_{1-2\rho}(m) m^{\rho-7/4}.$$

Поскольку [23]

$$\sum_{m \leq c_1 u} \sigma_{1-2\rho}(m) \ll u,$$

отсюда вытекает, что

$$J \ll \begin{cases} u^{1/4-\rho-\sigma}, & \text{если } \frac{1}{2} < \rho < \frac{3}{4}, \\ u^{1/4-\rho-\sigma} \log u, & \text{если } \rho = \frac{3}{4}, \\ u^{-1/2-\sigma}, & \text{если } \frac{3}{4} < \rho < 1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$s \int_{2t^2}^{\infty} \sum_{1,\rho} (x, X) x^{-s-1} dx \ll t \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{t^2 2^j}^{t^2 2^{j+1}} \sum_{1,\rho} (x, X) x^{-s-1} dx \right|$$

$$\ll \begin{cases} t^{3/2-2\rho-2\sigma}, & \text{если } \frac{1}{2} < \rho < \frac{3}{4}, \\ t^{3/2-2\rho-2\sigma} \log t, & \text{если } \rho = \frac{3}{4}, \\ t^{-2\sigma}, & \text{если } \frac{3}{4} < \rho < 1. \end{cases}$$

Случай $2t \leq u \leq 2t^2$ является самым сложным, поскольку появляется возможность для седловых точек: $F'_{\pm}(x, m) = 0$. Такое возможно только в случае функции $F_{-}(x, m)$, так как $F'_{+}(x, m) > t/x$ для всех m .

ЛЕММА 9. При $0 \leq \sigma \leq 1$ и $t \geq 2$ имеет место оценка

$$s \int_{2t}^{2t^2} \sum_{1,\rho} (x, X) x^{-s-1} dx \ll t^{1-\sigma} \log t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $\sum_{1,\rho}^{(1)}(x)$ обозначим часть суммы $\sum_{1,\rho}(x, X)$ с $c_2 t^2 u^{-1} \leq m \leq c_1 u$, где c_2 – достаточно большая положительная постоянная. Для таких m и $x \in [u, 2u]$, $2t \leq u \leq 2t^2$, опять имеет место оценка

$$F'_{\pm}(x, m) \gg \sqrt{\frac{m}{u}}.$$

Поэтому лемма 4 с $r = 1$ опять приводит к оценке

$$\int_u^{2u} \sum_{1,\rho}^{(1)} (x) x^{-s-1} dx \ll u^{1/4-\rho-\sigma} \sum_{c_2 t^2 u^{-1} \leq m \leq c_1 u} \sigma_{1-2\rho}(m) m^{\rho-7/4}$$

$$\ll \begin{cases} u^{1/4-\rho-\sigma}, & \text{если } \frac{1}{2} < \rho < \frac{3}{4}, \\ u^{1/4-\rho-\sigma} \log u, & \text{если } \rho = \frac{3}{4}, \\ u^{-1/2-\sigma}, & \text{если } \frac{3}{4} < \rho < 1. \end{cases}$$

Отсюда находим, что

$$s \int_{2t}^{2t^2} \sum_{1,\rho}^{(1)} (x) x^{-s-1} dx \ll \begin{cases} t^{5/4-\rho-\sigma}, & \text{если } \frac{1}{2} < \rho < \frac{3}{4}, \\ t^{5/4-\rho-\sigma} \log t, & \text{если } \rho = \frac{3}{4}, \\ t^{1/2-\sigma}, & \text{если } \frac{3}{4} < \rho < 1. \end{cases} \quad (13)$$

Теперь рассмотрим часть $\sum_{1,\rho}^{(2)}(x)$ суммы $\sum_{1,\rho}(x, X)$ с $m \leq c_3 t^2 u^{-1}$, где c_3 – достаточно малая положительная постоянная. В этом случае имеем

$$F'_{-}(x, m) < -c_4 \frac{t}{u}$$

с некоторой константой $c_4 > 0$. Поэтому опять по лемме 4

$$\begin{aligned} \int_u^{2u} \sum_{1,\rho}^{(2)}(x)x^{-s-1} dx &\ll t^{-1}u^{3/4-\rho-\sigma} \sum_{m \leq c_3 t^2 u^{-1}} \sigma_{1-2\rho}(m)m^{\rho-5/4} \\ &\ll t^{-1}u^{3/4-\rho-\sigma}(t^2 u^{-1})^{\rho-1/4} = t^{-3/2+2\rho}u^{1-2\rho-\sigma} \ll u^{1/4-\rho-\sigma}, \\ s \int_{2t}^{2t^2} \sum_{1,\rho}^{(2)}(x)x^{-s-1} dx &\ll t^{5/4-\rho-\sigma}. \end{aligned} \quad (14)$$

Пусть $\sum_{1,\rho}^{(3)}(x)$ – оставшаяся часть суммы $\sum_{1,\rho}(x, X)$ с $c_3 t^2 u^{-1} \leq m \leq c_2 t^2 u^{-1}$, $2t \leq u \leq 2t^2$. В этом случае возможна седловая точка интеграла

$$\int_u^{2u} \sum_{1,\rho}^{(3)}(x)x^{-s-1} dx.$$

Это означает, что $F'_-(x_0, m) = 0$ для некоторой точки $x_0 \in [u, 2u]$ или же $|F'_-(x_0, m)|$ намного меньше, чем t/u . В оставшейся части интервала $[u, 2u]$ имеем

$$c_5 \frac{t}{u} \leq |F'_-(x, m)| \leq c_6 \frac{t}{u} \quad (15)$$

с некоторыми положительными константами $c_5 < c_6$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_u^{2u} \sum_{1,\rho}^{(3)}(x)x^{-s-1} dx &\ll t^{-1}u^{3/4-\rho-\sigma} \sum_{c_3 t^2 u^{-1} \leq m \leq c_2 t^2 u^{-1}} \sigma_{1-2\rho}(m)m^{\rho-5/4} \\ &\ll \begin{cases} u^{1/4-\rho-\sigma}, & \text{если } \frac{1}{2} < \rho \leq \frac{3}{4}, \\ u^{-1/2-\sigma}, & \text{если } \frac{3}{4} < \rho < 1, \end{cases} \end{aligned}$$

где знак “ $'$ ” означает, что интегрируется в подинтервале интервала $[u, 2u]$, в котором выполняется (15). Отсюда следует, что

$$s \int_{2t}^{2t^2} \sum_{1,\rho}^{(3)}(x)x^{-s-1} dx \ll \begin{cases} t^{5/4-\rho-\sigma}, & \text{если } \frac{1}{2} < \rho \leq \frac{3}{4}, \\ t^{1/2-\sigma}, & \text{если } \frac{3}{4} < \rho < 1. \end{cases} \quad (16)$$

В окрестности точки x_0 воспользуемся второй производной $F''_-(x, m)$. Имеем, что

$$F''_-(x, m) = -\frac{1}{x} \frac{\sqrt{xm/(2x)}}{\sqrt{1 + \pi m/(2x)}} + \frac{t}{x^2}.$$

Если

$$|F'_-(x, m)| \leq c_7 \frac{t}{u} \quad (17)$$

с достаточно малой $c_7 > 0$, то

$$|F''_-(x, m)| \gg \frac{t}{u^2},$$

и лемма 4 с $r = 2$ приводит к оценке

$$\begin{aligned} \int_u^{''2u} \sum_{1,\rho}^{(3)} (x) x^{-s-1} dx &\ll t^{-1/2} u^{3/4-\rho-u} \sum_{c_3 t^2 u^{-1} \leq m \leq c_2 t^2 u^{-1}} \sigma_{1-2\rho}(m) m^{\rho-5/4} \\ &\ll t^{-1/2} u^{3/4-\rho-\sigma} (t^2 u^{-1})^{\rho-1/4} \ll u^{-\sigma}, \end{aligned}$$

где знак “''” означает, что в области интегрирования выполняется (17). Из этой оценки получаем, что

$$s \int_{2t}^{''2t^2} \sum_{1,\rho}^{(3)} (x) x^{-s-1} dx \ll t^{1-\sigma} \log t. \quad (18)$$

Собирая оценки (13), (14), (16) и (18), получаем оценку леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Утверждение теоремы является следствием результатов (3) и (7), оценки (10) и лемм 6–9.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Ivić, “The Mellin transforms and the Riemann zeta-function”, *Proceedings of the Conference on Analytic and Elementary Number Theory* (Vienna, 1996), Univ. of Vienna, Vienna, 1996, 112–127.
- [2] A. Ivić, “On some conjectures and results for the Riemann zeta-function and Hecke series”, *Acta Arith.*, **99**:2 (2001), 115–145.
- [3] A. Ivić, “On the estimation of $\mathcal{Z}_2(s)$ ”, *Analytic and probabilistic methods in number theory* (Palanga, 2001), TEV, Vilnius, 2002, 83–98.
- [4] A. Ivić, “The Mellin transform of the square of Riemann’s zeta-function”, *Int. J. Number Theory*, **1**:1 (2005), 65–73.
- [5] A. Ivić, *A modified Mellin transform of powers of the zeta-function*, Preprint, 2005.
- [6] A. Ivić, “On the estimation of some Mellin transforms connected with the fourth moment of $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|$ ”, *Elementare und analytische Zahlentheorie*, Schr. Wiss. Ges. Johann Wolfgang Goethe Univ. Frankfurt am Main, **20**, Franz Steiner Verlag Stuttgart, Stuttgart, 2006, 77–88.
- [7] A. Ivić, M. Jutila, Y. Motohashi, “The Mellin transform of powers of the zeta-function”, *Acta Arith.*, **95**:4 (2000), 305–342.
- [8] M. Jutila, “The Mellin transforms of the square of Riemann’s zeta-function”, *Period. Math. Hungar.*, **42**:1-2 (2001), 179–190.
- [9] M. Jutila, “The Mellin transform of the power of Riemann’s zeta-function”, *Number Theory*, Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser., **1**, Ramanujan Math. Soc., Mysore, 2005, 15–29.
- [10] M. Lükkarinen, *The Mellin transform of the square of Riemann’s zeta-function and Atkinson’s formula*, Dissertation, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. No. 140, Univ. of Turku, Turku, 2005.
- [11] Y. Motohashi, “A relation between the Riemann’s zeta-function and the hyperbolic Laplacian”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **22**:2 (1995), 299–313.
- [12] Y. Motohashi, *Spectral Theory of the Riemann Zeta-Function*, Cambridge Tracts in Math., **127**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
- [13] A. Laurinćikas, “Limit theorems for the Mellin transform of the square of the Riemann zeta-function. I”, *Acta Arith.*, **122**:2 (2006), 173–184.

- [14] A. Laurinćikas, “Limit theorems for the Mellin transform of $|\zeta(\frac{1}{2} + it)|^2$ ”, *Probability and Number Theory – Kanazawa 2005*, Adv. Stud. Pure Math., **49**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2007, 185–198.
- [15] V. Balinskaitė, A. Laurinćikas, “Discrete limit theorems for the Mellin transform of the Riemann zeta-function”, *Acta Arith.*, **131**:1 (2008), 29–42.
- [16] V. Balinskaitė, A. Laurinćikas, “A two-dimensional discrete limit theorem in the space of analytic functions for Mellin transforms of the Riemann zeta-function”, *Nonlinear Anal. Model. Control*, **13**:2 (2008), 159–167.
- [17] A. Laurinćikas, “The Mellin transform of the square of the Riemann zeta-function in the critical strip” (to appear).
- [18] A. Laurinćikas, “The Mellin transform of the Riemann zeta-function in the critical strip. II”, *Voronoi’s Impact on Modern Science*, Book 4, Vol. 1, NAS of Ukraine, Kyiv, 2008, 89–96.
- [19] K. Matsumoto, “The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip”, *Japan. J. Math. (N.S.)*, **15**:1 (1989), 1–13.
- [20] K. Matsumoto, T. Meurman, “The mean square of the Riemann zeta-function in the critical strip. III”, *Acta Arith.*, **64**:4 (1993), 357–382.
- [21] K. Matsumoto, “Recent developments in the mean square theory of the Riemann zeta and other zeta-functions”, *Number Theory*, Trends Math., Basel, Birkhäuser-Verlag, 2000, 241–286.
- [22] A. Ivić, K. Matsumoto, “On the error term in the mean square formula for the Riemann zeta-function in the critical strip”, *Monatsh. Math.*, **121**:3 (1996), 213–229.
- [23] K. Matsumoto, T. Meurman, “The mean square of the square of the Riemann zeta-function in the critical strip. II”, *Acta Arith.*, **68**:4 (1994), 369–382.
- [24] K.-Y. Lam, *Some results on the mean values of certain error terms in analytic number theory*, Thesis, Univ. of Hong Kong, Hong Kong, 1997.
- [25] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function. The Theory of the Riemann Zeta-Function with Applications*, Wiley-Intersci. Publ., John Wiley & Sons, New York, 1985.

А. Лауринчикас

Vilnius University,

Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius, Lithuania

E-mail: antanas.laurincikas@maf.vu.lt

Поступило

30.10.2008