Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Колесников, Глобальные гёльдеровы оценки для оптимальной транспортировки, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 5, 708–728

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8493>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 16:20:14

Глобальные гёльдеровы оценки для оптимальной транспортировки

А. В. Колесников

В работе обобщается известный результат Л. Каффарелли о липшицевых оценках для оптимальной транспортировки T логарифмически вогнутых вероятностных мер. Пусть $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ – оптимальная транспортировка, отображающая $\mu = e^{-V} dx$ в $\nu = e^{-W} dx$. Предположим, что вторая дифференциальная разность V оценивается сверху степенной функцией, и что модуль выпуклости W оценивается снизу функцией $A_q|x|^{1+q}$, $q \geq 1$. Доказано, что при этих предположениях отображение T глобально гёльдерово, с константой Гёльдера, не зависящей от размерности. Кроме этого, в работе изучается оптимальное отображение T меры μ в меру Лебега на выпуклом ограниченном множестве $K \subset \mathbb{R}^d$. Получены оценки константы Липшица отображения T в терминах d , $\text{diam}(K)$ и DV , D^2V .

Библиография: 23 названия.

1. Введение. Согласно известному результату Каффарелли оптимальное отображение стандартной гауссовской меры γ в вероятностную меру $e^{-W} \cdot \gamma$, где W – выпуклая функция, является 1-липшицевым. Это замечательное наблюдение влечет многие интересные результаты об аналитических свойствах равномерно выпуклых мер. Среди них – условие Бакри–Эмери для логарифмического неравенства Соболева (в случае линейного пространства) [1], теорема сравнения Бакри–Леду [2], корреляционные неравенства [3], [4]. Некоторые обобщения результата Каффарелли [3] были недавно получены в [5].

Оценки такого вида были впервые получены в работе Погорелова [6] (см. также “лемму Погорелова” в [7]). Погореловым было доказано, что гладкое решение уравнения $\det D^2\varphi = 1$ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ удовлетворяет неравенству

$$C_1(\Omega, \Omega') \leq D^2\varphi(x) \leq C_2(\Omega, \Omega'),$$

$x \in \Omega'$, где $\Omega' \subseteq \Omega$ – некоторая другая область. Гёльдеровы оценки играют фундаментальную роль в теории регулярности уравнений в частных производных. Обзор результатов для так называемых “полностью нелинейных уравнений” можно найти в [8], [9]. Более специальный случай уравнения Монжа–Ампера можно найти в [7], [10], [11].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00536), а также грантов Президента РФ (грант № МД-764.2008.1), GFEN-06-01-39003 и DFG Grant 436 RUS 113/343/0(R).

С другой стороны, метод оптимальной транспортировки широко используется в теории вероятностей для доказательства различных изопериметрических неравенств, а также неравенств концентрации. Пусть задана мера μ с известными изопериметрическими свойствами (гауссова, продакт-мера) и некоторая другая мера ν . Иногда оказывается возможным описать аналитические свойства меры ν , построив отображение T , отображающее μ в ν . При этом, как правило, искомые свойства ν следуют из свойств μ и липшицевых (гёльдеровых) оценок на T . Опишем типичные ситуации:

- 1) μ – гауссовская, а ν – некоторая продакт-мера (см. [12], [13]);
- 2) ν – нормированная мера Лебега (равномерное распределение) на равномерно выпуклом множестве, а μ – логарифмически вогнутая мера с таким же модулем выпуклости (см. [13]–[15] и цитируемую библиографию в этих работах);
- 3) μ – гауссовская, $D^2W \geq C$ (ситуация теоремы Каффарелли).

Приведем краткое содержание работы. В п. 2 рассмотрена оптимальная транспортировка T , отображающая $e^{-V} dx$ в $e^{-W} dx$. Предположим, что V и W удовлетворяют

$$\begin{aligned} V(x+y) + V(x-y) - 2V(x) &\leq A_p |y|^{p+1}, \\ W(x+y) + W(x-y) - 2W(x) &\geq A_q |y|^{q+1} \end{aligned}$$

с $0 \leq p \leq 1 \leq q$ и некоторыми положительными константами A_p, A_q . При этих условиях доказано, что T – глобально $(p+1)/(q+1)$ -гёльдерово отображение:

$$|T(x) - T(y)| \leq C |x - y|^{(p+1)/(q+1)},$$

с константой C , зависящей только от p, q, A_p, A_q .

В частности, отсюда вытекает следующий результат. Пусть $\nu = e^{-W} dx$ – вероятностная мера, удовлетворяющая

$$W(x+y) + W(x-y) - 2W(x) \geq C_\beta |y|^{2\beta}$$

с $\beta \geq 1$. Тогда существует такая константа C , зависящая только от β, C_β , что ν удовлетворяет следующему неравенству концентрации:

$$\nu(B_r) \geq 1 - e^{-C|r|^{2\beta}},$$

для любого $B \subset \mathbb{R}^d$, $\nu(B) \geq 1/2$, $B_r = \{y : |x - y| \leq r, x \in B\}$. Этот результат – следствие модифицированного неравенства Соболева, доказанного ранее Бобковым и Леду в [14]. Результат Бобкова и Леду был обобщен в [16] методами оптимальной транспортировки. В работе [15] с помощью техники локализации были получены соответствующие изопериметрические неравенства.

В пп. 3–4 доказаны оценки следующего вида:

$$\|D^2\varphi\| \leq f(\nabla\varphi),$$

где f – неотрицательная функция, а $\nabla\varphi$ – оптимальная транспортировка μ в $\nu = \lambda|_K/\lambda(K)$, где $K \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклое множество, а λ – мера Лебега. В частности, доказано, что любое равномерное распределение ν на ограниченном выпуклом множестве K является липшицевым образом стандартной гауссовой меры и константа Липшица не превосходит $C \cdot \sqrt{d} \cdot \text{diam}(K)$ с некоторой универсальной константой C .

После публикации онлайн предварительной версии работы автор получил комментарий от участников семинара по выпуклому анализу в университете Тель-Авива. Ими было замечено, что доказательство предложения 2.7 может быть значительно упрощено для случая выпуклых функций. Это доказательство приведено в дополнении. В частности, доказано, что логарифмически вогнутая мера $\nu = e^{-W} dx$, удовлетворяющая

$$W(x+y) + W(x-y) - W(x) \geq \delta(|y|)$$

с неотрицательной возрастающей функцией δ является образом стандартной гауссовской меры при оптимальном отображении $T = \nabla \varphi$, удовлетворяющем

$$|\nabla \varphi(x) - \nabla \varphi(y)| \leq 8\delta^{-1}(4|x-y|^2).$$

Отсюда следует, что ν удовлетворяет следующему свойству концентрации (не зависящему от размерности):

$$\nu(B_r) \geq 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{8} \delta\left(\frac{r}{8}\right)\right)$$

для любого $B \subset \mathbb{R}^d$ с $\nu(B) \geq 1/2$, $B_r = \{y : |x-y| \leq r, x \in B\}$.

2. Глобальные гёльдеровы оценки. Всюду мы имеем дело со стандартным конечномерным евклидовым пространством.

Напомним, что для любой пары вероятностных мер $\mu_1 = \rho_1 dx$, $\mu_2 = \rho_2 dx$ существует отображение $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, отображающее μ_1 в μ_2 и имеющее вид $T = \nabla \varphi$, где φ – выпуклая функция (см. [11]). Для гладкого отображения T выполнена следующая формула замены переменных (уравнение Монжа–Ампера):

$$\rho_2(\nabla \varphi) \det D^2 \varphi = \rho_1.$$

Всюду далее рассматриваются вероятностные меры с выпуклым носителем положительной лебеговой меры.

Напомним, что вероятностная мера μ называется *логарифмически вогнутой*, если она имеет вид $\mu = e^{-V} dx$, где V – выпуклая функция. Наконец, напомним, что отображение $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ называется *M-липшицевым*, если

$$\frac{|T(x) - T(y)|}{|x - y|} \leq M.$$

По теореме Радемахера T почти всюду дифференцируемо, причем $\|DT\| \leq M$. Отображение T называется *α -гёльдеровым*, если существует такое $0 < \alpha \leq 1$, что

$$\frac{|T(x) - T(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq M.$$

Рассмотрим сначала одномерный случай. Пусть $T = \varphi'$ – оптимальная транспортировка, отображающая $\mu = e^{-V} dx$ в $\nu = e^{-W} dx$ с $\text{supp}(\nu) = [a, b]$, где $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $W: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют

$$|V'(x) - V'(y)| \leq C_p |x - y|^p, \quad (1)$$

$$(x - y)(W'(x) - W'(y)) \geq C_q |x - y|^{q+1} \quad (2)$$

для некоторых $0 < p \leq 1$, $1 \leq q$.

Меры μ и ν считаются вероятностными. Рассмотрим точку максимума (t_0, x_0) следующего функционала:

$$F(t, x) = \frac{\varphi'(x+t) - \varphi'(x)}{|t|^\alpha} \operatorname{sign}(t), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Рассуждения, приведенные ниже, не являются строгими, но могут быть аккуратно обоснованы. Более общую версию результата (со строгим доказательством) см. в следствии 2.9.

Положив $t'_0 = -t_0$ и $x' = x_0 - t_0$, если необходимо, можно предполагать, что $t > 0$. Дифференцируя по x в точке максимума, получаем

$$\varphi''(x_0 + t_0) = \varphi''(x_0), \quad \varphi'''(x_0 + t_0) \leq \varphi'''(x_0).$$

Таким образом,

$$\frac{\varphi'''(x_0 + t_0)}{\varphi''(x_0 + t_0)} - \frac{\varphi'''(x_0)}{\varphi''(x_0)} \leq 0. \quad (3)$$

Дифференцируя по t , получаем

$$\varphi''(x_0 + t_0) = \frac{\alpha}{t_0}(\varphi'(x_0 + t_0) - \varphi'(x_0)).$$

Продифференцируем формулу замены переменных:

$$\frac{\varphi'''}{\varphi''} - W'(\varphi')\varphi'' = -V'.$$

Используя (3), получим

$$\begin{aligned} V'(x_0 + t_0) - V'(x_0) &\geq (W'(\varphi(x_0 + t_0)) - W'(\varphi'(x_0)))\varphi''(x_0 + t) \\ &= \frac{\alpha}{t}[W'(\varphi(x_0 + t_0)) - W'(\varphi'(x_0))](\varphi'(x_0 + t_0) - \varphi'(x_0)). \end{aligned}$$

Из предположений (1), (2) следует

$$C_p t_0^{p+1} \geq \alpha C_q |\varphi'(x_0 + t_0) - \varphi'(x_0)|^{q+1}.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{C_p}{\alpha C_q}\right)^{1/(q+1)} \geq |\varphi'(x_0 + t_0) - \varphi'(x_0)| \cdot t_0^{-(p+1)/(q+1)}.$$

Получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.2. *Предположим, что $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $W: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие (1) и (2) для некоторых $0 \leq p \leq 1$, $q \geq 1$. Положим*

$$0 < \alpha := \frac{p+1}{q+1} \leq 1.$$

Тогда

$$|\varphi'(x+t) - \varphi'(x)| \leq \left(\frac{(q+1)C_p}{(p+1)C_q}\right)^{1/(q+1)} |t|^\alpha.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Близкий результат был получен в [17]: оптимальное отображение одномерного показательного распределения $\nu = (1/2)e^{-|x|} dx$ в $e^{-V} \cdot \nu$, где $|V'| \leq 1 - c$, $c > 0$, является $(1/c)$ -липшицевым.

Предположим, что V и W удовлетворяют

$$V(x+y) + V(x-y) - 2V(x) \leq A_p |y|^{p+1}, \quad (4)$$

$$W(x+y) + W(x-y) - 2W(x) \geq A_q |y|^{q+1}, \quad (5)$$

для некоторых $0 \leq p \leq 1$, $1 \leq q$, $A_p > 0$, $A_q > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Нетрудно видеть, что предположения (4), (5) имеют смысл только в случае $0 \leq p \leq 1$, $1 \leq q$. Действительно, при других значениях p , q , из (4), (5) следует, что вторые производные W , V либо всюду равны нулю, либо всюду бесконечны.

ТЕОРЕМА 2.5. Пусть μ и ν удовлетворяют (4), (5) для некоторых $0 \leq p \leq 1$, $1 \leq q$. Тогда φ удовлетворяет

$$\varphi(x+th) + \varphi(x-th) - 2\varphi(x) \leq 2 \left(\frac{A_p}{A_q} \right)^{1/(q+1)} t^{1+\alpha} \quad (6)$$

для любого единичного вектора $h \in \mathbb{R}^d$ и $\alpha = (p+1)/(q+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве многомерного случая мы используем аргументы Каффарелли из [3]. Рассмотрим дифференциальную разность

$$\delta_2 \varphi(x) = \varphi(x+th) + \varphi(x-th) - 2\varphi(x) \geq 0$$

для некоторого единичного вектора $h \in \mathbb{R}^d$. Без потери общности можно предположить, что носитель ν сосредоточен на ограниченном выпуклом множестве. Функция φ дважды непрерывно дифференцируема (это следует из результатов [18]). Кроме того, из аргументов [3] следует, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta_2 \varphi(x) = 0$. Таким образом, существует точка максимума x_0 функции $\delta_2 \varphi(x)$. Дифференцируя в x_0 , получаем

$$\begin{aligned} \nabla \varphi(x_0+th) + \nabla \varphi(x_0-th) &= 2\nabla \varphi(x_0), \\ D^2 \varphi(x_0+th) + D^2 \varphi(x_0-th) &\leq 2D^2 \varphi(x_0). \end{aligned} \quad (7)$$

Из вогнутости определителя следует, что

$$\begin{aligned} \det D^2 \varphi(x_0) &\geq \det \left(\frac{D^2 \varphi(x_0+th) + D^2 \varphi(x_0-th)}{2} \right) \\ &\geq \left(\det D^2 \varphi(x_0+th) \det D^2 \varphi(x_0-th) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Из формулы замены переменной $\det D^2 \varphi = e^{W(\nabla \varphi) - V}$ вытекает

$$\begin{aligned} V(x_0+th) + V(x_0-th) - 2V(x_0) \\ \geq W(\nabla \varphi(x_0+th)) + W(\nabla \varphi(x_0-th)) - 2W(\nabla \varphi(x_0)). \end{aligned} \quad (8)$$

Из (7) получаем, что

$$v := \nabla\varphi(x_0 + th) - \nabla\varphi(x_0) = \nabla\varphi(x_0) - \nabla\varphi(x_0 - th).$$

Следовательно, согласно (8)

$$A_p t^{p+1} \geq A_q |\nabla\varphi(x_0 + th) - \nabla\varphi(x_0)|^{q+1} = A_q |\nabla\varphi(x_0 - th) - \nabla\varphi(x_0)|^{q+1} = A_q |v|^{q+1}.$$

В силу выпуклости φ

$$\begin{aligned} & \varphi(x_0 + th) + \varphi(x_0 - th) - 2\varphi(x_0) \\ & \leq t \langle \nabla\varphi(x_0 + th) - \nabla\varphi(x_0 - th), h \rangle = 2t \langle v, h \rangle \leq 2t|v|. \end{aligned}$$

В конечном итоге

$$A_p t^{p+1} \geq A_q \left(\frac{\delta_2 \varphi}{2t} \right)^{q+1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Для случая $p = q = 1$ известна более сильная оценка:

$$\varphi(x + th) + \varphi(x - th) - 2\varphi(x) \leq \left(\frac{A_p}{A_q} \right)^{1/2} t^2.$$

Наша следующая цель – доказать непрерывность по Гёльдеру отображения $\nabla\varphi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – дифференцируемая функция, удовлетворяющая

$$|u(x + y) + u(x - y) - 2u(x)| \leq C|y|^{\alpha+1},$$

причем $\alpha > 0$. Предположим, что u , $|\nabla u|$ интегрируемы по любой гауссовской мере. Существует такая константа C' , зависящая только от α , C и d , что

$$|u_v(x + y) - u_v(x)| \leq C'|y|^\alpha$$

для любого единичного вектора $v \in \mathbb{R}^d$ и всех $x, y \in \mathbb{R}^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что любая ограниченная функция f , удовлетворяющая

$$|f(x + y) + f(x - y) - 2f(x)| \leq C|y|^{\alpha+1},$$

обладает непрерывной по Гёльдеру производной: $|\nabla f(x + y) - \nabla f(x)| \leq A|y|^\alpha$ (см. [19; гл. 5(4), предложение 9]). Ниже мы дадим модификацию доказательства из [19].

Рассмотрим полугруппу теплопроводности, действующую на u :

$$P_t u = \int_{\mathbb{R}^d} u(x - y) p_t(y) dy, \quad p_t(y) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-y^2/2t}.$$

Зафиксируем ортогональный базис $\{e_i\}$. Достаточно проверить утверждение для

$$|u_{x_i}(x + he_j) - u_{x_i}(x)|$$

с произвольными $1 \leq i, j \leq d$ и фиксированным $h > 0$. Заметим, что величина $|u_{x_i}(x + he_j) - u_{x_i}(x)|$ не превосходит

$$|P_t u_{x_i}(x + he_j) - P_t u_{x_i}(x)| + |u_{x_i}(x + he_j) - P_t u_{x_i}(x + he_j)| + |u_{x_i}(x) - P_t u_{x_i}(x)|$$

для любого $t > 0$.

Первое слагаемое оценивается через

$$\begin{aligned}
 & P_t u_{x_i}(x + h e_j) - P_t u_{x_i}(x) \\
 &= \int_0^h \int_{\mathbb{R}^d} u_{x_i x_j}(x + r e_j - y) p_t(y) dy dr \\
 &= \int_0^h \int_{\mathbb{R}^d} u(x + r e_j - y) p_t(y)_{y_i y_j} dy dr \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^h \int_{\mathbb{R}^d} (u(x + r e_j - y) + u(x + r e_j + y) - u(x + r e_j)) p_t(y)_{y_i y_j} dy dr \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_0^h \int_{\mathbb{R}^d} |u(x + r e_j - y) + u(x + r e_j + y) - u(x + r e_j)| |p_t(y)_{y_i y_j}| dy dr.
 \end{aligned}$$

Очевидно,

$$p_t(y)_{y_i y_j} = \frac{1}{t} \left(\frac{y_i y_j}{t} - \delta_{ij} \right) p_t(y).$$

Таким образом,

$$|P_t u_{x_i}(x + h e_j) - P_t u_{x_i}(x)| \leq \frac{C}{2t} \int_0^h \int_{\mathbb{R}^d} |y|^{1+\alpha} \left| \frac{y_i y_j}{t} - \delta_{ij} \right| p_t(y) dy dr.$$

Применяя масштабирование по t , получаем, что правая часть не превосходит

$$C_1(C, \alpha, d) h \cdot t^{(\alpha-1)/2}.$$

В частности, для $t = h^2$ имеем

$$|P_t u_{x_i}(x + h e_j) - P_t u_{x_i}(x)| \leq C_1(C, \alpha, d) h^\alpha.$$

Оценим остальные слагаемые. Для этой цели рассмотрим $(P_t u)_t$. Имеем

$$\begin{aligned}
 (P_t u)_t(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x - y) \left[\frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{-y^2/2t} \right]_t dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} u(x - y) \left(\frac{y^2}{2t^2} - \frac{d}{2t} \right) p_t(y) dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} (u(x - y) + u(x + y) - 2u(x)) \left(\frac{y^2}{2t^2} - \frac{d}{2t} \right) p_t(y) dy.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|(P_t u)_t(x)| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |y|^{\alpha+1} \left| \frac{y^2}{2t^2} - \frac{d}{2t} \right| p_t(y) dy \leq C_2(C, \alpha, d) \cdot t^{(\alpha-1)/2}. \quad (9)$$

Интегрируя (9), получаем

$$|P_t u(x) - u(x)| \leq C_3(C, \alpha, d) \cdot t^{(\alpha+1)/2}. \quad (10)$$

Заметим, что

$$u_{x_i}(x) - P_t u_{x_i}(x) = - \int_0^t (P_s u)_{s x_i} ds, \quad P_s u = P_{s/2} u * p_{s/2}.$$

Дифференцирование свертки дает следующую формулу:

$$\begin{aligned} P_t u_{x_i}(x) - u_{x_i}(x) &= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} (P_{s/2} u(y))_s (p_{s/2}(x-y))_{x_i} dy \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} P_{s/2} u(y) (p_{s/2}(x-y))_{x_i s} dy \right) ds. \end{aligned}$$

Нетрудно доказать, что

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} P_{s/2} u(y) (p_{s/2}(x-y))_{x_i s} dy \right) ds \\ &= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} (P_{s/2} u - u)(y) (p_{s/2}(x-y))_{x_i s} dy \right) ds + P_{t/2} u_{x_i}(x) - u_{x_i}(x). \end{aligned}$$

Для случая $t = h^2$ получаем

$$\begin{aligned} P_t u_{x_i}(x) - P_{t/2} u_{x_i}(x) &= \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} (P_{s/2} u)_s(y) (p_{s/2}(x-y))_{x_i} dy \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} (P_{s/2} u - u)(y) (p_{s/2}(x-y))_{x_i s} dy \right) ds. \end{aligned}$$

Тогда из (10), (9) следует, что

$$\begin{aligned} &|P_t u_{x_i}(x) - P_{t/2} u_{x_i}(x)| \\ &\leq C_4 \left(\int_0^t s^{(\alpha-1)/2} \int_{\mathbb{R}^d} |p_{s/2}(x-y))_{x_i}| dy ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t s^{(\alpha+1)/2} \int_{\mathbb{R}^d} |p_{s/2}(x-y))_{x_i s}| dy ds \right). \end{aligned}$$

Применяя те же аргументы, что и выше, получаем

$$|P_t u_{x_i}(x) - P_{t/2} u_{x_i}(x)| \leq C_5 \int_0^t s^{(\alpha-2)/2} ds = C_6 t^{\alpha/2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} &|P_t u_{x_i}(x) - u_{x_i}(x)| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |P_{t/2^k} u_{x_i}(x) - P_{t/2^{k+1}} u_{x_i}(x)| \leq C_6 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{2^k} \right)^{\alpha/2} = C_7 t^{\alpha/2} = C_7 h^{\alpha}. \end{aligned}$$

Такая же оценка выполнена для третьего слагаемого. Доказательство закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Утверждение неверно для $\alpha = 0$ (см. [19; 4.3.1]).

СЛЕДСТВИЕ 2.9. В условиях теоремы 2.5 оптимальная транспортировка $\nabla \varphi$ непрерывна по Гёльдеру:

$$|\nabla \varphi(x) - \nabla \varphi(y)| \leq C |x - y|^{\alpha}$$

с константой C , зависящей только от p, q, A_p, A_q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяем ν мерой $\nu|_A/\nu(A)$ с ограниченным выпуклым множеством A . Очевидно, новый потенциал также удовлетворяет условиям теоремы. Таким образом, используя стандартные приближения, можно ограничиться случаем меры ν с компактным носителем и предположить без ограничения общности, что $|\nabla\varphi| \leq K$. По теореме 2.5

$$\varphi(x+th) + \varphi(x-th) - 2\varphi(x) \leq C|t|^\alpha \quad (11)$$

для любого единичного вектора h . Из предложения 2.7 следует, что $\nabla\varphi$ – гёльдерово отображение. Покажем, что константа Гёльдера не зависит от размерности. Зафиксируем $x, h \in \mathbb{R}^d$ и $v \in \mathbb{R}^d$ с $|h| = |v| = 1$. Рассмотрим сужение φ на аффинную гиперплоскость $A_{x,v,h} = \{x+th+sv : s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$. Это сужение удовлетворяет (11). Таким образом, из двумерной версии леммы 2.7 следует, что

$$|\langle \nabla\varphi(x+th) - \nabla\varphi(x), v \rangle| = |\varphi_v(x+th) - \varphi_v(x)| \leq C'|t|^\alpha,$$

где C' (соответствующая “двумерная” константа) не зависит от d и направлений h, v . Так как те же рассуждения можно повторить для любых x, h, v с той же константой C' , получаем

$$|\nabla\varphi(x+th) - \nabla\varphi(x)| = \sup_{|v|=1} |\langle \nabla\varphi(x+th) - \nabla\varphi(x), v \rangle| \leq C'|t|^\alpha.$$

Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10. Более общее утверждение см. ниже (следствие 5.2).

3. Оценки второй производной: одномерный случай. Мы начнем с эвристических оценок в одномерном случае. Рассмотрим такую выпуклую функцию φ , что φ' отображает

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

в вероятностную меру $e^{-W} dx$. Мы предполагаем, что W – достаточно гладкая функция.

По формуле замены переменной

$$-\frac{\log 2\pi}{2} - \frac{x^2}{2} = -W(\varphi') + \log \varphi''. \quad (12)$$

Пусть f – гладкая функция и $\varphi''/f(\varphi')$ достигает максимума в точке x_0 . В этой точке

$$\frac{\varphi^{(3)}}{f(\varphi')} - \frac{(\varphi'')^2 f'(\varphi')}{f^2(\varphi')} = 0, \quad \frac{\varphi^{(4)}}{f(\varphi')} - \frac{3\varphi^{(3)}\varphi''f'(\varphi')}{f^2(\varphi')} - (\varphi'')^3 \left[\frac{f'}{f^2} \right]'(\varphi') \leq 0. \quad (13)$$

Таким образом,

$$\varphi^{(3)} = \frac{(\varphi'')^2 f'(\varphi')}{f(\varphi')}. \quad (14)$$

Применяя (14), находим

$$\varphi^{(4)} \leq (\varphi'')^3 \left[\frac{f''}{f} + \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \right](\varphi'). \quad (15)$$

Продифференцируем дважды (12):

$$0 = 1 - W''(\varphi')(\varphi'')^2 - W'(\varphi')\varphi^{(3)} + \frac{\varphi^{(4)}}{\varphi''} - \left(\frac{\varphi^{(3)}}{\varphi''}\right)^2.$$

Из (14) и (15) следует

$$-(\varphi'')^2 \frac{f''(\varphi')}{f(\varphi')} + W''(\varphi')(\varphi'')^2 + W'(\varphi') \frac{(\varphi'')^2 f'(\varphi')}{f(\varphi')} \leq 1.$$

Предположим, что f удовлетворяет

$$-\frac{f''}{f} + W'' + W' \frac{f'}{f} \geq \frac{1}{f^2}.$$

Таким образом, в точке x_0

$$\left[\frac{\varphi''}{f(\varphi')} \right]^2 \leq 1.$$

Так как x_0 – точка максимума для $\varphi''/f(\varphi')$, получаем формальное доказательство следующего утверждения.

Пусть f и W удовлетворяют

$$-\frac{f''}{f} + W'' + W' \frac{f'}{f} \geq \frac{1}{f^2}.$$

Тогда

$$\varphi'' \leq f(\varphi').$$

Приведенные выше аргументы не являются строгими. Тем не менее, они дают верный результат в некоторых ситуациях.

ПРИМЕР 3.1. Для случая $W'' \geq K$ и $f \equiv 1/\sqrt{K}$ получаем следующую версию результата Каффарелли:

$$\varphi'' \leq \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

ПРИМЕР 3.2. Предположим, что

$$e^{-W} = \frac{1}{2a} I_{[-a, a]}.$$

Применяя аргументы, приведенные выше, получаем оценку

$$\varphi'' \leq f(\varphi'),$$

где $f: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^+$ – вогнутая четная функция, убывающая на $[0, a]$, причем $f(a) = f(-a) = 0$ и

$$-ff'' = 1.$$

Функция f имеет вид

$$f(t) = f(0) \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{\sqrt{\pi/2}f(0) - t}{f(0)}\right),$$

где $\Phi: [0, 1] \rightarrow [0, \sqrt{\pi/2}]$ определена формулой

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{-2 \ln s}} = \int_{\sqrt{-2 \ln x}}^{\infty} e^{-s^2/2} ds.$$

Кроме того, a и $f(0)$ связаны соотношением

$$f(0) = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Таким образом,

$$\varphi'' \leq a\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Phi^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{a - \varphi'}{a}\right).$$

Заметим, что этот результат можно вывести из теоремы Каффарелли. Положим

$$G(x) = \int_0^x \frac{ds}{f(s)} = -f'(x).$$

Нетрудно убедиться, что G отображает меру $(1/2a)I_{[-a,a]}$ в $\nu = \gamma|_{[-b,b]}/\gamma([-b,b])$, где $b = G(a)$. Заметим, что $T = G(\varphi')$ – оптимальная транспортировка γ в ν . Следовательно, по теореме Каффарелли T – липшицево отображение с константой 1: $T' \leq 1$. Таким образом $\varphi''/f(\varphi') \leq 1$.

4. Оценки второй производной: многомерный случай. В дальнейшем ν обозначает нормированную вероятностную меру Лебега на ограниченном выпуклом множестве K (равномерное распределение на K). Потенциал V предполагается как минимум дважды непрерывно дифференцируемым с непрерывной по Гёльдеру второй производной.

Заметим, что предположение выпуклости K важно для гладкости φ . Хорошо известно, что для невыпуклых множеств потенциал φ в общем случае не является гладкой функцией. Тем не менее, в нашем случае теория регулярности Каффарелли влечет гладкость φ (см. [18], [20]). Действительно, возьмем такую гладкую выпуклую область $K' \subset K$, что $\partial K'$ лежит на положительном расстоянии от K . Положим $K_0 = T^{-1}K'$. Нетрудно проверить, что K_0 ограничено (в противном случае получаем противоречие с монотонностью T). Применяя результат Каффарелли [18], немедленно получаем, что отображение T дифференцируемо внутри K_0 , причем производные T гёльдеровы. Дифференцируемость более высокого порядка выводится из гладкости V классическими методами (см. [18], [11; замечание 4.15]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Для $a > 0$ и $p \in \mathbb{R}$ пусть $f(t) := f_{p,a}(t): [-a,a] \rightarrow \mathbb{R}^+$ – функция, удовлетворяющая условиям

- 1) $ff'' + p(f')^2 = -1$;
- 2) f четная и $f(a) = 0$.

Предположения 1), 2) определяют единственным образом функцию f , убывающую на $[0,a]$. Предположим, что $p > 0$. Принимая f за новую переменную и интегрируя 1), получаем

$$f' = -\frac{1}{\sqrt{p}} \sqrt{\left(\frac{f(0)}{f}\right)^{2p} - 1}.$$

Отсюда вытекает следующее выражение для f :

$$f(t) = f(0) \sqrt[p]{\Psi^{-1}\left(\sqrt{p} \frac{t}{f(0)}\right)},$$

где $\Psi: [0, 1] \rightarrow [0, \int_0^{\pi/2} \sin^{1/p} x \, dx]$,

$$\Psi(t) = \int_t^1 \frac{r^{1/p} \, dr}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Величины a и $f(0)$ связаны соотношением

$$a\sqrt{p} = f(0) \int_0^1 \frac{r^{1/p} \, dr}{\sqrt{1-r^2}} = f(0) \int_0^{\pi/2} \sin^{1/p} x \, dx.$$

Случай $p = 0$ был рассмотрен в примере 3.2. В случае $p < 0$ получаем

$$f(t) = f(0) \sqrt[p]{\Psi^{-1}\left(\sqrt{-p} \frac{t}{f(0)}\right)},$$

где $\Psi: [1, \infty] \rightarrow [0, \int_0^{\pi/2} \sin^{-1-1/p} x \, dx]$,

$$\Psi(t) = \int_1^t \frac{r^{1/p} \, dr}{\sqrt{r^2-1}}.$$

Кроме того, a и $f(0)$ связаны соотношением

$$a\sqrt{-p} = f(0) \int_1^\infty \frac{r^{1/p} \, dr}{\sqrt{r^2-1}} = f(0) \int_0^{\pi/2} \sin^{-1-1/p} x \, dx.$$

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$, $d > 1$, – ограниченное выпуклое множество положительного объема. Рассмотрим оптимальную транспортировку $\nabla\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow K$ вероятностной меры $\mu = e^{-V} dx$ с гладким потенциалом V в меру $\lambda|_K/\lambda(K)$. Предположим, что $V_{hh} \leq \Lambda$ для некоторого единичного вектора $h \in \mathbb{R}^d$. Тогда выполнено следующее неравенство

$$\varphi_{hh} \leq \sqrt{\Lambda} \cdot f_{(d-1)/4,a}(\varphi_h - t_0),$$

где t_0 выбрано таким образом, что

$$L_1 = \{x : \langle x, h \rangle = t_0 - a\}, \quad L_2 = \{x : \langle x, h \rangle = t_0 + a\}$$

являются касательными плоскостями к K .

Если, кроме того, $|V_h| \leq M$, то выполнена следующая оценка:

$$\varphi_{hh} \leq \sqrt{\Lambda + \frac{M^2}{4(1+p)}} \cdot f_{p,a}(\varphi_h - t_0)$$

для любого $p > -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что оценки теоремы инвариантны относительно сдвигов пространства. Сдвинем K таким образом, чтобы K содержало начало координат. Поэтому можно считать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = +\infty$. Нас будет интересовать точка максимума $\varphi_{hh}(x)e^{\psi(\varphi_h(x))}$, $x \in \mathbb{R}^d$, где ψ – некоторая функция, которая будет найдена позже. Однако, чтобы применить принцип максимума, ниже мы будем иметь дело с другой функцией, обладающей компактным носителем

$$F_\varepsilon(x) = (1 - \varepsilon\varphi)_+ \varphi_{hh}(x) e^{\psi(\varphi_h(x))}.$$

Рассмотрим формулу замены переменной для φ :

$$C(K) + \log \det D^2\varphi = -V.$$

Пусть y – точка максимума F_ε . Все вычисления ниже сделаны в этой точке. Сначала поменяем систему координат таким образом, чтобы было выполнено

- 1) $h = e_1$;
- 2) $D^2\varphi(y)$ – диагональная матрица.

Первое требование достигается путем выбора нужного ортогонального преобразования. Кроме того, можно считать, что матрица $(D^2\varphi)_{i,j}$, $i, j \geq 2$, диагональна. Чтобы обеспечить второе требование, применим следующее неортогональное преобразование:

$$x'_1 = x_1 + \frac{\varphi_{x_2x_1}(y)}{\varphi_{x_1x_1}(y)}x_2 + \dots + \frac{\varphi_{x_dx_1}(y)}{\varphi_{x_1x_1}(y)}x_d, \quad x'_i = x_i, \quad i \in \{2, \dots, d\}.$$

Здесь $(x'_1, \dots, x'_d)$ – новая координатная система, а $(x_1, \dots, x_d)$ – старая. Нетрудно видеть, что $\varphi_{x'_1x'_i} = 0$ для $i \geq 2$. Так как преобразование представляется унимодальной матрицей, формула замены переменных выглядит в новых координатах следующим образом:

$$C(K) + \log \det D^2_{x'}\varphi = -V \left(x'_1 - \frac{\varphi_{x_2x_1}(y)}{\varphi_{x_1x_1}(y)}x'_2 - \dots - \frac{\varphi_{x_dx_1}(y)}{\varphi_{x_1x_1}(y)}x'_d, x'_2, \dots, x'_d \right), \quad (16)$$

где $D^2_{x'}\varphi$ – матрица вторых производных в новой системе координат. Далее положим

$$x'_1 - \frac{\varphi_{x_2x_1}(y)}{\varphi_{x_1x_1}(y)}x'_2 - \dots - \frac{\varphi_{x_dx_1}(y)}{\varphi_{x_1x_1}(y)}x'_d = Ox'$$

и будем писать для простоты x_i вместо x'_i .

Продифференцируем тождество (16). Для этой цели удобно использовать стандартную формулу для определителя

$$\det D^2\varphi = \sum_{\sigma \in S(d)} \text{sign}(\sigma) \varphi_{x_1x_{\sigma(1)}} \cdots \varphi_{x_dx_{\sigma(d)}}.$$

Принимая во внимание, что $\varphi_{x_ix_j}(y) = 0$, если $i \neq j$, получаем в точке y

$$-V_{x_1}(Ox) = \frac{(\det D^2\varphi)_{x_1}}{\det D^2\varphi} = \sum_i \frac{\varphi_{x_ix_ix_1}}{\varphi_{x_ix_i}}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} -V_{x_1x_1}(Ox) &= \frac{(\det D^2\varphi)_{x_1x_1}}{\det D^2\varphi} - \left(\frac{(\det D^2\varphi)_{x_1}}{\det D^2\varphi} \right)^2 \\ &= \sum_i \frac{\varphi_{x_ix_ix_1x_1}}{\varphi_{x_ix_i}} + \sum_{i \neq j} \frac{\varphi_{x_ix_ix_1}}{\varphi_{x_ix_i}} \frac{\varphi_{x_jx_jx_1}}{\varphi_{x_jx_j}} - \sum_{i \neq j} \frac{\varphi_{x_ix_jx_1}^2}{\varphi_{x_ix_i}\varphi_{x_jx_j}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Дифференцируя (16) дважды по x_1 , получаем

$$-\Lambda \leq -V_{x_1 x_1}(Ox) = [\log \det D^2 \varphi]_{x_1 x_1} = \frac{(\det D^2 \varphi)_{x_1 x_1}}{\det D^2 \varphi} - \left(\frac{(\det D^2 \varphi)_{x_1}}{\det D^2 \varphi} \right)^2.$$

Из (17), (18) следует, что

$$-\Lambda \leq \sum_i \frac{\varphi_{x_i x_i x_1 x_1}}{\varphi_{x_i x_i}} - \sum_{i,j} \frac{\varphi_{x_i x_j x_1}^2}{\varphi_{x_i x_i} \varphi_{x_j x_j}}. \quad (19)$$

Так как $\log F_\varepsilon$ достигает максимума в точке y , мы получаем, что в этой точке

$$-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\varphi} \varphi_{x_1} + \frac{\varphi_{x_1 x_1 x_1}}{\varphi_{x_1 x_1}} + \psi'(\varphi_{x_1}) \varphi_{x_1 x_1} = 0, \quad (20)$$

$$-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\varphi} \varphi_{x_i} + \frac{\varphi_{x_1 x_1 x_i}}{\varphi_{x_1 x_1}} = 0, \quad i \geq 1. \quad (21)$$

Продифференцируем $\log F_\varepsilon$ дважды по x_1 :

$$\begin{aligned} & -\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\varphi} \varphi_{x_i x_i} - \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon\varphi)^2} \varphi_{x_i}^2 + \frac{\varphi_{x_1 x_1 x_i x_i}}{\varphi_{x_1 x_1}} - \left(\frac{\varphi_{x_1 x_1 x_i}}{\varphi_{x_1 x_1}} \right)^2 \\ & + \psi''(\varphi_{x_1}) \varphi_{x_1 x_i}^2 + \psi'(\varphi_{x_1}) \varphi_{x_1 x_i x_i} \leq 0. \end{aligned}$$

Умножим это неравенство на $\varphi_{x_1 x_1} / \varphi_{x_i x_i}$, просуммируем по i и применим (19). Получим

$$\begin{aligned} & -\frac{d\varepsilon}{1-\varepsilon\varphi} \varphi_{x_1 x_1} - \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon\varphi)^2} \varphi_{x_1 x_1} \left(\frac{\varphi_{x_1}^2}{\varphi_{x_1 x_1}} + \dots + \frac{\varphi_{x_d}^2}{\varphi_{x_d x_d}} \right) + \sum_{i,j} \frac{\varphi_{x_i x_j x_1}^2}{\varphi_{x_i x_i} \varphi_{x_j x_j}} \\ & - \sum_i \frac{\varphi_{x_1 x_1 x_i}^2}{\varphi_{x_1 x_1} \varphi_{x_i x_i}} + \psi''(\varphi_{x_1}) \varphi_{x_1 x_1}^2 + \psi'(\varphi_{x_1}) \left[\sum_i \frac{\varphi_{x_1 x_i x_i}}{\varphi_{x_i x_i}} \right] \varphi_{x_1 x_1} \leq \Lambda. \end{aligned} \quad (22)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \frac{\varphi_{x_i x_j x_1}^2}{\varphi_{x_i x_i} \varphi_{x_j x_j}} - \sum_i \frac{\varphi_{x_1 x_1 x_i}^2}{\varphi_{x_1 x_1} \varphi_{x_i x_i}} &= \sum_{i \in \{2, \dots, d\}} \sum_{j \in \{1, \dots, d\}} \frac{\varphi_{x_i x_j x_1}^2}{\varphi_{x_i x_i} \varphi_{x_j x_j}} \\ &\geq \sum_{j \in \{2, \dots, d\}} \frac{\varphi_{x_j x_j x_1}^2}{\varphi_{x_j x_j}^2} + \sum_{i \in \{2, \dots, d\}} \frac{\varphi_{x_i x_1 x_1}^2}{\varphi_{x_i x_i} \varphi_{x_1 x_1}}. \end{aligned}$$

Из (21) следует

$$\sum_{i,j} \frac{\varphi_{x_i x_j x_1}^2}{\varphi_{x_i x_i} \varphi_{x_j x_j}} - \sum_i \frac{\varphi_{x_1 x_1 x_i}^2}{\varphi_{x_1 x_1} \varphi_{x_i x_i}} \geq \sum_{j \in \{2, \dots, d\}} \frac{\varphi_{x_j x_j x_1}^2}{\varphi_{x_j x_j}^2} + \sum_{i \in \{2, \dots, d\}} \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon\varphi)^2} \frac{\varphi_{x_1 x_1}}{\varphi_{x_i x_i}} \varphi_{x_i}^2.$$

Тогда из (22) вытекает

$$\begin{aligned} & -\frac{d\varepsilon}{1-\varepsilon\varphi} \varphi_{x_1 x_1} - \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon\varphi)^2} \varphi_{x_1}^2 + \sum_{j \in \{2, \dots, d\}} \frac{\varphi_{x_j x_j x_1}^2}{\varphi_{x_j x_j}^2} + \psi''(\varphi_{x_1}) \varphi_{x_1 x_1}^2 \\ & + \psi'(\varphi_{x_1}) \left[\sum_{i \in \{2, \dots, d\}} \frac{\varphi_{x_1 x_i x_i}}{\varphi_{x_i x_i}} \right] \varphi_{x_1 x_1} + \psi'(\varphi_{x_1}) \varphi_{x_1 x_1 x_1} \leq \Lambda. \end{aligned}$$

В силу (20)

$$\varphi_{x_1 x_1 x_1} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon \varphi} \varphi_{x_1} \varphi_{x_1 x_1} - \psi'(\varphi_{x_1}) \varphi_{x_1 x_1}^2.$$

По неравенству Коши

$$\sum_{j \in \{2, \dots, d\}} \frac{\varphi_{x_j x_j x_1}^2}{\varphi_{x_j x_j}^2} + \psi'(\varphi_{x_1}) \left[\sum_{i \in \{2, \dots, d\}} \frac{\varphi_{x_1 x_i x_i}}{\varphi_{x_i x_i}} \right] \varphi_{x_1 x_1} \geq -\frac{(d-1)}{4} (\psi'(\varphi_{x_1}))^2 \varphi_{x_1 x_1}^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & -\frac{d\varepsilon}{1 - \varepsilon \varphi} \varphi_{x_1 x_1} - \frac{\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon \varphi)^2} \varphi_{x_1}^2 + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon \varphi} \psi'(\varphi_{x_1}) \varphi_{x_1} \varphi_{x_1 x_1} \\ & + \left[\psi''(\varphi_{x_1}) - \frac{d+3}{4} (\psi'(\varphi_{x_1}))^2 \right] \varphi_{x_1 x_1}^2 \leq \Lambda. \end{aligned}$$

Применим неравенство Коши:

$$\left[\psi'' - \left(\frac{d+3}{4} + \varepsilon \right) (\psi')^2 - d^2 \varepsilon^2 \right] \circ \varphi_{x_1} \cdot \varphi_{x_1 x_1}^2 (1 - \varepsilon \varphi)^2 \leq \Lambda (1 - \varepsilon \varphi)^2 + (2\varepsilon^2 \varphi_{x_1}^2 + \varepsilon).$$

Пусть ψ_ε – гладкая функция на $[\inf_{y \in K} \langle x_1, y \rangle, \sup_{y \in K} \langle x_1, y \rangle]$, удовлетворяющая

$$\psi_\varepsilon'' \geq \left(\frac{d+3}{4} + \varepsilon \right) (\psi_\varepsilon')^2 + d^2 \varepsilon^2 + e^{2\psi_\varepsilon}. \quad (23)$$

В силу принципа максимума

$$e^{\psi_\varepsilon(\varphi_{x_1})} \varphi_{x_1 x_1} (1 - \varepsilon \varphi)_+ \leq \max_{x \in \mathbb{R}^d} (e^{\psi_\varepsilon(\varphi_{x_1})} \varphi_{x_1 x_1} (1 - \varepsilon \varphi)_+) \leq \sqrt{\Lambda + \varepsilon + 2\varepsilon^2 \sup_{y \in K} \langle y, x_1 \rangle^2}.$$

Положим $f_\varepsilon := e^{-\psi_\varepsilon}$. Дифференциальное неравенство для ψ_ε можно переписать в следующем виде:

$$-f_\varepsilon f_\varepsilon'' \geq \left(\frac{d-1}{4} + \varepsilon \right) (f_\varepsilon')^2 + 1 + \varepsilon^2 d^2 f_\varepsilon^2. \quad (24)$$

Следующее простое наблюдение завершает доказательство: существует последовательность неотрицательных функций $\{f_\varepsilon\}$ на $[-a, a]$, удовлетворяющая (24), причем $f_\varepsilon \rightarrow f_{(d-1)/4, a}$ равномерно на $[-a, a]$. В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ неравенство (23) влечет $\varphi_{x_1 x_1} \leq \sqrt{\Lambda} f_{(d-1)/4, a}(\varphi_{x_1})$. Доказательство первого утверждения завершено.

Для доказательства второго утверждения используем (17) и (22). Получаем неравенство

$$\begin{aligned} & -\frac{d\varepsilon}{1 - \varepsilon \varphi} \varphi_{x_1 x_1} - \frac{\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon \varphi)^2} \varphi_{x_1 x_1} \left(\frac{\varphi_{x_1}^2}{\varphi_{x_1 x_1}} + \dots + \frac{\varphi_{x_d}^2}{\varphi_{x_d x_d}} \right) + \sum_{i, j} \frac{\varphi_{x_i x_j x_1}^2}{\varphi_{x_i x_i} \varphi_{x_j x_j}} \\ & - \sum_i \frac{\varphi_{x_1 x_1 x_i}^2}{\varphi_{x_1 x_1} \varphi_{x_i x_i}} + \psi''(\varphi_{x_1}) \varphi_{x_1 x_1}^2 + \psi'(\varphi_{x_1}) V_{x_1}(Ox) \varphi_{x_1 x_1} \leq \Lambda. \end{aligned}$$

Так как $|V_{x_i}| \leq M$, применяя те же аргументы, что и выше, и переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем искомое неравенство для ψ :

$$\psi''(\varphi_{x_1})\varphi_{x_1x_1}^2 - M|\psi'(\varphi_{x_1})|\varphi_{x_1x_1} \leq \Lambda.$$

Положим $f = -\log \psi$ и применим неравенство Коши. Для функции f , удовлетворяющей

$$-ff'' + \left(1 - \frac{\delta}{2}M^2\right)(f')^2 \geq 1,$$

имеем $\varphi_{x_1x_1} \leq f(\varphi_{x_1})\sqrt{\Lambda + 1/2\delta}$. Положим $-p = 1 - (\delta/2)M^2$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. 1) Пусть $\mu = \gamma$ – стандартная гауссовская мера. Тогда

$$\|D^2\varphi\| \leq \sqrt{d-1} \frac{\text{diam}(K)}{4 \int_0^{\pi/2} \sin^{4/(d-1)} x \, dx}.$$

2) Пусть $\mu = \prod_{i=1}^d \mu_i$, где μ_i – копия меры μ_0 на прямой, удовлетворяющей

а) $\mu_0 = e^{-V} dx$, V – гладкая функция;

б) $|V'| \leq 1$, $V'' \leq 1$.

Например, можно выбрать $V(x)$ равной $|x|$ для больших значений $|x|$ и квадратичной для малых значений. Тогда

$$\|D^2\varphi\| \leq \sqrt{-p \left(1 + \frac{d}{4(1+p)}\right)} \cdot \frac{\text{diam}(K)}{2 \int_0^{\pi/2} \sin^{-1/1+p} x \, dx}$$

для всех $-1 < p < 0$.

5. Дополнение: применения к функциональным неравенствам. Доказательство следующей леммы было сообщено автору Сашей Содиным. Оказывается, условие выпуклости позволяет не использовать технику полугрупп, а также значительно обобщить и упростить доказательство предложения 2.7.

ЛЕММА 5.1. Для любой выпуклой функции f и единичного вектора h выполнена оценка

$$|\nabla f(x + th) - f(x)| \leq \frac{2}{t} \sup_{v: |v|=1} (f(x + 2tv) + f(x - 2tv) - 2f(x)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d = 1$. Заметим, что

$$f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t) - 2f(x_0) = \int_{-2t}^0 (f'(x_0 + s + 2t) - f'(x_0 + s)) \, ds.$$

Так как f' возрастает, то

$$f'(x_0 + s + 2t) - f'(x_0 + s) \geq f'(x_0 + t) - f'(x_0)$$

выполнено для любого $-t \leq s \leq 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} f(x_0 + 2t) + f(x_0 - 2t) - 2f(x_0) &\geq \int_{-t}^0 (f'(x_0 + s + 2t) - f'(x_0 + s)) \, ds \\ &\geq \int_{-t}^0 (f'(x_0 + t) - f'(x_0)) \, ds = t(f'(x_0 + t) - f'(x_0)). \end{aligned}$$

Для одномерного случая утверждение доказано. Пусть $d \geq 2$. Для любой пары единичных векторов u, h и $t > 0$ в силу циклической монотонности (см. [11])

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x+tu), th \rangle + \langle \nabla f(x), tu \rangle + \langle \nabla f(x+th), 0 \rangle \\ \leq \langle \nabla f(x+th), th \rangle + \langle \nabla f(x), 0 \rangle + \langle \nabla f(x+tu), tu \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\langle \nabla f(x+tu) - \nabla f(x), th \rangle \leq \langle \nabla f(x+th) - \nabla f(x), th \rangle + \langle \nabla f(x+tu) - \nabla f(x), tu \rangle.$$

В силу одномерного случая

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x+tu) - \nabla f(x), th \rangle \\ \leq \frac{1}{t}(f(x+2th) + f(x-2th) - 2f(x)) + \frac{1}{t}(f(x+2tu) + f(x-2tu) - 2f(x)). \end{aligned}$$

Остается взять верхнюю грань по всем единичным векторам h, u .

Полученная оценка влечет обобщенную непрерывность оптимальной транспортировки для разных видов равномерной выпуклости.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Предположим, что W удовлетворяет неравенству*

$$W(x+y) + W(x-y) - W(x) \geq \delta(|y|)$$

для некоторой возрастающей неотрицательной функции δ . Тогда

$$|\nabla \varphi(x) - \nabla \varphi(y)| \leq 8\delta^{-1}(4|x-y|^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя доказательству теоремы 2.5 нетрудно видеть, что

$$\varphi(x+th) + \varphi(x-th) - 2\varphi(x) \leq 2t\delta^{-1}(t^2).$$

Результат следует из леммы 5.1.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. *В условия следствия 5.2 мера $\nu = e^{-W} dx$ удовлетворяет*

$$\nu(A_r) \geq \Phi\left(\Phi^{-1}(\nu(A)) + \frac{1}{2}\sqrt{\delta\left(\frac{r}{8}\right)}\right),$$

где $\Phi(t) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^t e^{-s^2/2} ds$. В частности, ν обладает свойством концентрации, не зависящем от размерности

$$\nu(A_r) \geq 1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{1}{8} \delta\left(\frac{r}{8}\right)\right)$$

с $\nu(A) \geq 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оптимальное отображение T , отображающее стандартную гауссовскую меру $\gamma = (1/(2\pi)^{d/2})e^{-|x|^2/2} dx$ в ν . Утверждение следует из следствия 5.2 и гауссовского изопериметрического неравенства (см. [21]) и оценки $\Phi(t) \geq 1 - e^{-t^2/2}/2$.

Наконец, отметим, что близкие результаты о неравенствах концентрации и функциональных неравенствах можно получить с помощью так называемой “леммы о касательной” (above-tangent lemma). Детальное описание, ссылки и различные приложения этой техники можно найти в [11], ниже мы упомянем некоторые отдельные результаты. Лемма о касательной появилась в работе Талаграна [22] в доказательстве транспортного неравенства для стандартной гауссовской меры. Позже выяснилось, что похожие аргументы могут быть использованы для доказательства неравенств типа Соболева. В частности, результат Бобкова и Леду был обобщен этим путем в [16] (см. также [23]). Соответствующие изопериметрические неравенства были доказаны в [15] с помощью локализационной леммы. Наконец, транспортный подход к функциональным неравенствам для мер, не являющихся логарифмически вогнутыми, был развит в [17].

Помимо модуля выпуклости существует другая мера выпуклости функции, которую особенно удобно использовать в доказательствах, основанных на применении леммы о касательной.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Всюду ниже мы имеем дело с некоторой *произвольной* (неевклидовой) нормой $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^d$.

Для выпуклой функции W и нормы $\|\cdot\|$ определим $\delta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ и $b: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta(t) &= \inf\{W(x+y) + W(x-y) - 2W(x) : \|y\| \geq t\}, \\ b(t) &= \inf\{W(x+y) - W(x) - \langle \nabla W(x), y \rangle : \|y\| \geq t\}.\end{aligned}\quad (25)$$

Эти величины являются в некотором смысле эквивалентными.

ЛЕММА 5.5. *Выполнены неравенства*

$$b(2t) - 2b(t) \geq \delta(t) \geq 2b(t).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отношение $\delta(t) \geq 2b(t)$ следует из

$$\begin{aligned}W(x+y) + W(x-y) - 2W(x) \\ = (W(x+y) - W(x) - \langle \nabla W(x), y \rangle) + (W(x-y) - W(x) - \langle \nabla W(x), -y \rangle).\end{aligned}$$

Далее, заметим, что

$$W\left(x + \frac{y}{2}\right) - W(x) - \left\langle \nabla W(x), \frac{y}{2} \right\rangle \geq b\left(\frac{t}{2}\right),$$

где $t = \|y\|$. Кроме того,

$$\delta\left(\frac{t}{2}\right) \leq W(x+y) + W(x) - 2W\left(x + \frac{y}{2}\right) \leq W(x+y) - W(x) - \langle \nabla W(x), y \rangle - 2b\left(\frac{t}{2}\right).$$

Отсюда, очевидно, следует $\delta(t/2) + 2b(t/2) \leq b(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.6. В дальнейшем используются следующие обозначения:

- 1) $\tilde{b}$ – максимальная выпуклая функция, меньшая b ;

2) b^* – соответствующая выпуклая сопряженная функция:

$$b^*(t) = \sup_{s>0} \{ts - b(s)\}.$$

Результат следующего предложения хорошо известен (см., например, [16]). Для удобства читателей приведем сокращенное доказательство пункта 2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. Пусть W – такая выпуклая функция, что $\nu = e^{-W} dx$ – вероятностная мера. Рассмотрим норму $\|\cdot\|$ на $\mathbb{R}^d$ и определим b формулой (25). Пусть $f \cdot \nu$ – вероятностная мера, а $T = \nabla\varphi$ – оптимальная транспортировка ν в $f \cdot \nu$. Тогда верны следующие неравенства:

1) неравенство типа Талаграна:

$$\int_{\mathbb{R}^d} b(\|\nabla\varphi(x) - x\|) d\nu \leq \int_{\mathbb{R}^d} f \log f d\nu;$$

2) модифицированное логарифмическое неравенство Соболева:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \log f d\nu \leq \int_{\mathbb{R}^d} b^* \left(\left\| \frac{\nabla f(x)}{f(x)} \right\|_* \right) f d\nu,$$

где $\|\cdot\|_*$ – соответствующая сопряженная норма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем использовать аргументы леммы о касательной. Пусть $T = \nabla\varphi$ – оптимальная транспортировка $f \cdot \nu$ в ν . По формуле замены переменных

$$0 = W(x) - W(\nabla\varphi) + \log \det D_a^2 \varphi - \log f(x),$$

где $D_a^2 \varphi$ – вторая производная φ в смысле Александрова (см. детали в [11]). Следовательно,

$$\begin{aligned} \log f &= W(x) - W(\nabla\varphi) + \log \det D_a^2 \varphi \\ &= W(x) - W(\nabla\varphi) - \langle \nabla W(x), x - \nabla\varphi \rangle + \langle \nabla W(x), x - \nabla\varphi \rangle + \log \det D_a^2 \varphi \\ &\leq -b(\|\nabla\varphi(x) - x\|) + \langle \nabla W(x), x - \nabla\varphi \rangle + \log \det D_a^2 \varphi. \end{aligned}$$

Проинтегрируем полученную формулу относительно $f \cdot \nu$. Из интегрирования по частям и свойств выпуклости φ следует

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f \log f d\nu &\leq - \int_{\mathbb{R}^d} b(\|\nabla\varphi(x) - x\|) f d\nu + \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f(x), x - \nabla\varphi \rangle d\nu \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^d} (\text{Tr } D_a^2 \varphi - d - \log \det D_a^2 \varphi) d\mu. \end{aligned}$$

Хорошо известно (и легко проверяемо), что $\text{Tr } D_a^2 \varphi - d - \log \det D_a^2 \varphi \geq 0$. Результат следует из

$$\left\langle \frac{\nabla f(x)}{f(x)}, x - \nabla\varphi \right\rangle \leq \|x - \nabla\varphi(x)\| \cdot \left\| \frac{\nabla f(x)}{f(x)} \right\|_*$$

и неравенства Юнга.

Наконец, следующее неравенство концентрации:

$$\nu(A_r) \geq 1 - 2e^{-\tilde{b}(r/2)},$$

$$\nu(A) \geq \frac{1}{2}, \quad A_r = \{y : \|x - y\| \geq r\},$$

нетрудно доказать модификацией аргументов, принадлежащих К. Мартон. Пусть $T_1 = \nabla\varphi_1$, $T_2 = \nabla\varphi_2$ – пара оптимальных транспортировок, отображающих ν в $\nu_1 = \nu|_A/\nu(A)$ и $\nu_2 = \nu|_{A_r^c}/\nu(A_r^c)$ соответственно. Тогда $T = T_2 \circ T_1^{-1}$ отображает ν_1 в ν_2 . Имеем

$$\tilde{b}\left(\frac{r}{2}\right) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{b}\left(\frac{1}{2}\|x - T(x)\|\right) d\nu_1 = \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{b}\left(\frac{1}{2}\|T_1 - T_2\|\right) d\nu.$$

В силу выпуклости $\tilde{b}$ и предыдущего предложения

$$\begin{aligned} \tilde{b}\left(\frac{r}{2}\right) &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{b}(\|T_1(x) - x\|) d\nu + \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{b}(\|T_2(x) - x\|) d\nu \\ &\leq \log\left(\frac{1}{\nu(A)}\right) + \log\left(\frac{1}{\nu(A_r^c)}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$e^{2\tilde{b}(r/2)} \leq \frac{1}{\nu(A)\nu(A_r^c)}.$$

Автор приносит благодарность коллегам из университета Тель-Авива, в особенности Ронену Элдану и Саше Содину за доказательство леммы 5.1 и Эмануэлю Мильману за нахождение ошибки в первоначальной версии работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Bakry, M. Émery, “Diffusions hypercontractives”, *Séminaire de Probabilités, XIX*, 1983/84, Lecture Notes in Math., **1123**, Springer-Verlag, Berlin, 1985, 177–206.
- [2] D. Bakry, M. Ledoux, “Lévy–Gromov’s isoperimetric inequality for an infinite-dimensional diffusion generator”, *Invent. Math.*, **123**:2 (1996), 259–281.
- [3] L. A. Caffarelli, “Monotonicity properties of optimal transportation and the FKG and related inequalities”, *Comm. Math. Phys.*, **214**:3 (2000), 547–563.
- [4] G. Hargé, “A convex/log-concave correlation inequality for Gaussian measure and an application to abstract Wiener spaces”, *Probab. Theory Related Fields*, **130**:3 (2004), 415–440.
- [5] S. I. Valdimarsson, “On the Hessian of the optimal transport potential”, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (5), **6**:3 (2007), 441–456.
- [6] А. В. Погорелов, “О регулярности обобщенных решений уравнения $\det(\partial^2 u / \partial x^i \partial x^j) = \varphi(x^1, x^2, \dots, x^n) > 0$ ”, *Докл. АН СССР*, **200**:5 (1971), 534–537.
- [7] C. E. Gutiérrez, *The Monge–Ampère Equation*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **44**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001.
- [8] N. V. Krylov, “Fully nonlinear second order elliptic equations: recent development”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **24**:3-4 (1997), 569–595.
- [9] L. A. Caffarelli, X. Cabré, *Fully Nonlinear Elliptic Equations*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **43**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
- [10] J. Urbas, *Mass transfer problems*, Lecture Notes, Univ. of Bonn, Bonn, 1998.
- [11] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Grad. Stud. Math., **58**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

- [12] M. Talagrand, “A new isoperimetric inequality and the concentration of measure phenomenon”, *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Math., **1469**, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 91–124.
- [13] M. Ledoux, *The Concentration of Measure Phenomenon*, Math. Surveys Monogr., **89**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [14] S. G. Bobkov, M. Ledoux, “From Brunn–Minkowski to Brascamp–Lieb and to logarithmic Sobolev inequalities”, *Geom. Funct. Anal.*, **10**:5 (2000), 1028–1052.
- [15] E. Milman, S. Sodin, “An isoperimetric inequality for uniformly log-concave measures and uniformly convex bodies”, *J. Funct. Anal.*, **254**:5 (2008), 1235–1268, arXiv:math.PR/0703857.
- [16] D. Cordero-Erausquin, W. Gangbo, C. Houdré, “Inequalities for generalized entropy and optimal transportation”, *Recent Advances in the Theory and Applications of Mass Transport*, Contemp. Math., **353**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, 73–94.
- [17] F. Barthe, A. V. Kolesnikov, “Mass transport and variants of the logarithmic Sobolev inequality”, *J. Geom. Anal.*, **18**:4 (2008), 921–979.
- [18] L. A. Caffarelli, “The regularity of mappings with a convex potential”, *J. Amer. Math. Soc.*, **5**:1 (1992), 99–104.
- [19] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.
- [20] L. A. Caffarelli, “Boundary regularity of maps with a convex potentials. II”, *Ann. of Math. (2)*, **144**:3 (1996), 453–496.
- [21] В. И. Богачев, *Гауссовские меры*, Наука, М., 1997.
- [22] M. Talagrand, “Transportation cost for Gaussian and other product measures”, *Geom. Funct. Anal.*, **6**:3 (1996), 587–600.
- [23] A. V. Kolesnikov, “Convexity inequalities and optimal transport of infinite-dimensional measures”, *J. Math. Pures Appl. (9)*, **83**:11 (2004), 1373–1404.

А. В. Колесников

Московский государственный университет печати
E-mail: sascha77@mail.ru

Поступило

23.03.2009