Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Атамуратов, О мероморфном продолжении вдоль фиксированного направления, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 323–327

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8497>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:10:11

О мероморфном продолжении вдоль фиксированного направления

А. А. Атамуратов

В работе доказывается локальный граничный вариант известной леммы Ротштейна о мероморфном продолжении по одному из комплексных переменных. Формулировка простая, доказательство основано на известных формулах Адамара для радиусов мероморфности, недавних результатах Имомкулова о граничных свойствах последовательностей плюрисубгармонических функций и на лемме Ротштейна.

Библиография: 11 названий.

Основным результатом данной работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ – область с гладкой границей ∂D . Если функция $f(z, w)$ голоморфна в поликруговой области

$$D \times V = D \times \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\},$$

непрерывна на $\overline{D} \times V$ и при каждом фиксированном ξ из некоторого множества $E \subset \partial D$ положительной меры на ∂D , $\text{mes}(E) > 0$, функция $f(\xi, w)$ переменного w мероморфна в $\mathbb{C}_w$, то $f(z, w)$ мероморфно продолжается в $D \times \mathbb{C}$.

Известная теорема Гартогса (см. [1]) утверждает, что если $f(z, w)$ голоморфна в области $D \times V$ и при каждом фиксированном $z^0 \in D$ функция $f(z^0, w)$ голоморфно продолжается в круг $\{|w| < R\}$, $R > 1$, то $f(z, w)$ голоморфно продолжается в область $D \times \{w \in \mathbb{C} : |w| < R\}$. Этот классический факт справедлив и для мероморфных функций ([2], см. также [3], [4]).

ЛЕММА РОТШТЕЙНА. Пусть функция $f(z, w)$ мероморфна в области $D \times V = D \times \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ из $\mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w$. Если при каждом фиксированном $z^0 \in D$ функция $f(z^0, w)$ мероморфно продолжается в круг $\{|w| < R\}$, $R > 1$, то $f(z, w)$ мероморфно продолжается в $D \times \{|w| < R\}$.

Таким образом, теорема 1 является граничным аналогом этого результата. В доказательстве теоремы существенно используются граничные свойства плюрисубгармонических функций, разработанные в [5], и формула Адамара для радиуса мероморфности функции $f(z, w)$.

1. N -множества. Предел равномерно сходящейся или монотонно убывающей последовательности плюрисубгармонических функций плюрисубгармоничен. Иначе обстоит дело с предельной функцией $u = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} u_k$ для локально равномерно

но ограниченной сверху последовательности плюрисубгармонических функций u_k , $k = 1, 2, \dots$. В этом случае u не обязана быть полунепрерывной сверху, однако, ее верхняя регуляризация $u^*(z) = \overline{\lim}_{w \rightarrow z} u(w)$ является плюрисубгармонической функцией в D . Более того, множества вида $\{z \in D : u(z) < u^*(z)\}$, названные в свое время Лелоном N -множествами, являются плюриполярными (см. [6], [7]).

Пусть D – область с гладкой границей ∂D и u – плюрисубгармоническая в D функция. Доопределим ее до границы области по формуле

$$\tilde{u}(\xi) = \sup_{\alpha > 1} \overline{\lim}_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in A_\alpha(\xi)}} u(z), \quad \xi \in \partial D, \quad (1)$$

где $A_\alpha(\xi)$ представляет собой пересечение области D и конуса с вершиной в точке ξ :

$$A_\alpha(\xi) = \{z \in D : |z - \xi| < \alpha \rho(z, T_\xi)\}.$$

(Здесь $\rho(z, T_\xi)$ – расстояние от точки z до касательной плоскости T_ξ к ∂D в точке ξ .)

Граничное N -множество определяется следующим образом: пусть $u_k(z)$, $z \in D$, – монотонно возрастающая последовательность равномерно ограниченных сверху плюрисубгармонических в D функций. Рассмотрим предел

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} u_k(z) = u(z), \quad z \in D,$$

и регуляризацию $u^*(z) = \overline{\lim}_{w \rightarrow z} u(w)$, $z \in D$. Тогда из неравенства

$$u_k(z) \leq u(z) \leq u^*(z), \quad z \in D,$$

вытекает $\tilde{u}_k(\xi) \leq \tilde{u}(\xi) \leq \tilde{u}^*(\xi)$, $\xi \in \partial D$, и, следовательно, всюду на ∂D имеет место неравенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_k(\xi) \leq \tilde{u}^*(\xi)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (Имомкулов [5]). Подмножества множеств вида

$$\left\{ \xi \in \partial D : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_k(\xi) < \tilde{u}^*(\xi) \right\}$$

называются граничными N -множествами.

В многомерном случае вопрос о плюриполярности граничного N -множества остается открытым. В данной работе мы используем следующее утверждение из работы [5]:

ЛЕММА 1. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ – область с гладкой границей ∂D . Если $\{u_k(z)\}$ – последовательность равномерно ограниченных сверху функций, плюрисубгармонических в области D , и

$$u(z) = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} u_k(z),$$

то множество

$$E = \left\{ \xi \in \partial D : \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_k(\xi) < \tilde{u}^*(\xi) \right\}$$

является N -множеством и его $(2n - 1)$ -мера равна нулю.

2. Радиус мероморфности. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в некоторой окрестности нуля в $\mathbb{C}$; тогда радиус $R(f)$ наибольшего круга, куда $f(z)$ продолжается мероморфно, называется *радиусом мероморфности* функции $f(z)$. Радиус мероморфности функций в терминах коэффициентов ряда Тейлора был описан в конце 19-го века Адамаром. Обозначим через $R_m(f)$ радиус наибольшего круга, в который функция f мероморфно продолжается и имеет там не более m (включая кратности) полюсов. Тогда верна следующая

ТЕОРЕМА (Адамар [8]). Пусть функция $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ аналитическая в некоторой окрестности точки $z = 0$. Тогда для любого $m \geq 0$

$$R_m(f) = \frac{l_m}{l_{m+1}},$$

где $l_0 = 1$ и $l_m = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |A_{j,m}|^{1/j}$,

$$A_{j,m} = \begin{vmatrix} a_{j-m+1} & a_{j-m+2} & \cdots & a_j \\ a_{j-m+2} & a_{j-m+3} & \cdots & a_{j+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_j & a_{j+1} & \cdots & a_{j+m-1} \end{vmatrix}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad j \geq m-1$$

(здесь условно предполагается, что $0/0 = \infty$).

Из этой теоремы следует, что

$$R(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} R_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{l_m}{l_{m+1}} = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} l_{m+1}/l_m}.$$

Последнюю формулу можно также изменить следующим образом: так как

$$l_m = \frac{1}{R_0} \frac{1}{R_1} \frac{1}{R_2} \cdots \frac{1}{R_{m-1}},$$

для предела получим

$$\frac{1}{R(f)} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{R_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\frac{1}{R_0} \frac{1}{R_1} \cdots \frac{1}{R_{m-1}}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{l_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{j \rightarrow \infty} |A_{j,m}|^{1/(jm)}. \quad (2)$$

3. Доказательство теоремы 1. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ – область с гладкой границей ∂D , функция $f(z, w)$ голоморфна в области $D \times V$ и непрерывна в $\overline{D} \times V$. Разложим $f(z, w)$ в ряд Гартогса по степеням w :

$$f(z, w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z) w^k. \quad (3)$$

При каждом фиксированном $z \in \overline{D}$ составим определители Адамара

$$A_{j,m}(z) = \begin{vmatrix} c_{j-m+1}(z) & c_{j-m+2}(z) & \cdots & c_j(z) \\ c_{j-m+2}(z) & c_{j-m+3}(z) & \cdots & c_{j+1}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_j(z) & c_{j+1}(z) & \cdots & c_{j+m-1}(z) \end{vmatrix}, \quad j, m = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Функции $A_{j,m}(z)$ являются голоморфными в области D и непрерывными в замыкании $\bar{D}$. Рассмотрим последовательность плюрисубгармонических в области D функций $u_{j,m}(z) = (1/(jm)) \ln |A_{j,m}(z)|$. Ясно, что семейство $\{u_{j,m}(z)\}$ равномерно ограничено сверху в D . Следовательно, если берем верхние пределы

$$u(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} u_{j,m}(z),$$

то регуляризация $u^*(z)$ будет плюрисубгармонической в D . Из формулы Адамара и соотношения (2) вытекает, что при каждом $z \in D$, $u(z) = -\ln R(z)$. Следовательно, $u^*(z) = -\ln R_*(z)$ плюрисубгармонична в области D , где $R_*(z)$ – нижняя регуляризация радиуса $R(z)$. Из условия теоремы следует, что функция $u(\xi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} u_{j,m}(\xi)$ в граничных точках $\xi \in E \subset \partial D$ обращается в $-\infty$. Для функций $u_{j,m}(z) = \ln |A_{j,m}(z)|/jm$ при любом $\xi \in \partial D$ имеем $\tilde{u}_{j,m}(\xi) = u_{j,m}(\xi)$, так как они непрерывны в $\bar{D}$. Согласно лемме 1 множество

$$\{\xi \in \partial D : u(\xi) < \tilde{u}^*(\xi)\}$$

имеет $(2n-1)$ -меру нуль, где $\tilde{u}^*(\xi)$ – граничное значение функции $u^*(z)$.

Таким образом, для плюрисубгармонической функции $u^*(z)$ в каждой точке граничного подмножества $E \setminus \{\xi \in \partial D : u(\xi) < \tilde{u}^*(\xi)\}$ некасательные предельные значения равны $-\infty$. Согласно граничной теореме единственности (см. [9]) отсюда имеем, что $u^*(z) \equiv -\infty$. Так как $u(z) \leq u^*(z)$, получим $u(z) \equiv -\infty$ в D , т.е. при каждом $z \in D$ имеет место равенство $R(z) = \infty$. Итак мы доказали, что при каждом фиксированном $z^0 \in D$ функция $f(z^0, w)$ мероморфно продолжается в $\mathbb{C}$, откуда из леммы Ротштейна следует утверждение теоремы 1.

4. Хорошо известно что, если $f(z, w) \in \mathcal{O}(D \times \{|w| < r\})$ и для подмножества $E \subset D$ функция $f(z^0, w)$ голоморфно продолжается в больший круг $|w| < R$, $R > r$, то $f(z, w)$ голоморфно продолжается в область

$$D \times \{|w| < R^{-\omega^*(z, E, D)} \cdot r^{1+\omega^*(z, E, D)}\}.$$

Здесь $\omega^*(z, E, D)$ – известная P -мера множества $E \subset D$ относительно области D .

Используя методы доказательства теоремы 1, легко получить

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f(z, w) \in \mathcal{O}(D \times \{|w| < r\}) \cap C(\bar{D} \times \{|w| < r\})$. Если $E \subset \partial D$ и при каждом фиксированном $\xi \in E$ функция $f(\xi, w)$ мероморфно продолжается в большой круг $|w| < R$, $R > r$, то $f(z, w)$ мероморфно продолжается в область

$$D \times \{|w| < R^{-\omega_{in}^*(z, E, D)} \cdot r^{1+\omega_{in}^*(z, E, D)}\}.$$

Здесь $\omega_{in}^*(z, E, D)$ – внутренняя P -мера граничного множества E , определяющаяся следующим образом:

$$\omega_{in}^*(z, E, D) = \left(\sup \left\{ \lim_{j \rightarrow \infty} \omega^*(z, E_j, D) \right\} \right)^*,$$

где супремум берется по всем последовательностям $\{E_j\}$ таким, что $E_j \subset E_{j+1} \subset E$, $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ (см. [10]).

Отметим, что для внутренних множеств $E \subset D$ теорема 1 и теорема 2 были доказаны в работе Казаряна [11].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. Hartogs, “Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten”, *Math. Ann.*, **62**:1 (1906), 1–88.
- [2] W. Rothstein, “Ein neuer Beweis des Hartogsschen Hauptsatzes und seine Ausdehnung auf meromorphe Funktionen”, *Math. Z.*, **53** (1950), 84–95.
- [3] E. Sakai, “A note on meromorphic functions in several complex variables”, *Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. Ser. A. Math.*, **11** (1957), 75–80.
- [4] E. Sakai, “Meromorphic or holomorphic completion of a Reinhardt domain”, *Nagoya Math. J.*, **38** (1970), 1–12.
- [5] С. А. Имомкулов, “О голоморфном продолжении функций, заданных на граничном пучке комплексных прямых”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:2 (2005), 125–144.
- [6] E. Bedford, B. A. Taylor, “A new capacity for plurisubharmonic functions”, *Acta Math.*, **149**:1–2 (1982), 1–40.
- [7] А. С. Садуллаев, “Рациональные аппроксимации и плюриполярные множества”, *Матем. сб.*, **119**:1 (1982), 96–118.
- [8] J. Hadamard, “Essai sur l’étude des fonctions données par leur développement de Taylor”, *J. Math.* (4), **8** (1892), 101–186.
- [9] А. С. Садуллаев, “Граничная теорема единственности в $\mathbb{C}^n$ ”, *Матем. сб.*, **101**:4 (1976), 568–583.
- [10] А. С. Садуллаев, С. А. Имомкулов, “Продолжение сепаратно-аналитических функций, заданных на части границы области”, *Матем. заметки*, **79**:2 (2006), 234–243.
- [11] М. В. Казарян, “Мероморфное продолжение по группам переменных”, *Матем. сб.*, **125**:3 (1984), 384–397.

А. А. Атамуратов

Ургенчский государственный университет им. Аль-Хорезми,

Узбекистан

E-mail: alimardon01@mail.ru

Поступило

07.12.2007

Исправленный вариант

19.01.2009