Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Галахов, Об отсутствии локальных решений некоторых эволюционных задач, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 337–349

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8498>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 17:07:14

Об отсутствии локальных решений некоторых эволюционных задач

Е. И. Галахов

Рассматривается проблема существования локальных по времени решений квазилинейных эволюционных дифференциальных уравнений и неравенств в частных производных с сингулярными коэффициентами и начальными условиями. Получены достаточные условия мгновенного разрушения решений. Показана неулучшаемость полученных результатов в рассматриваемом функциональном классе.

Библиография: 13 названий.

В настоящей работе рассматриваются нелинейные эволюционные дифференциальные уравнения в частных производных, такие как

$$u_t^{(j)} - Au = g(x, t)u^q, \quad (x, t) \in Q = (\Omega \setminus S) \times \mathbb{R}_+, \quad (0.1)$$

с начальными условиями

$$u^{(i)}(x, 0) = u_i(x), \quad i = 0, \dots, j-1, \quad x \in \Omega \setminus S, \quad (0.2)$$

где Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, S – его замкнутое подмножество, геометрические свойства которого будут уточнены ниже, $j \in \mathbb{N}$, $q > 1$ и A – дифференциальный оператор по переменной x , причем $g \in c(Q)$, $u_i \in c(\Omega \setminus S)$, $i = 0, \dots, j-1$, и, кроме того, $u_{j-1} \in L^r(\Omega \setminus S)$ с $r > 1$. Это означает, что как коэффициент g , так и начальные функции могут иметь особенности на S . Хорошо известно, что такие особенности могут приводить к мгновенному разрушению неотрицательных решений задачи (0.1), (0.2). Мы установим достаточные условия для отсутствия неотрицательных решений этой задачи (иными словами, необходимые условия их локального по времени существования) в окрестности S в терминах соотношения между показателями роста функций g и u_{j-1} .

В случае полулинейного уравнения теплопроводности ($j = 1$ и $A = \Delta$) версия задачи (0.1), (0.2) с $g(x, t) \equiv 1$ (таким образом, особенностью на $S = \{0\}$ может обладать только начальная функция, но не коэффициент при нелинейном слагаемом)

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00441), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-3810.2008.1) и программы “Современные проблемы теоретической математики” ОМН РАН.

и граничными условиями Дирихле, а именно

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |u|^{q-1}u, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (0.3)$$

рассматривалась Вайсслером в [1], [2], а позднее Брезисом и Казенавом в [3]. В частности, ими было установлено, что задача (0.3) имеет в точности одно решение $u \in C([0, t], L^r(\Omega))$ с конечным временем жизни $t > 0$, если либо $r > n(q-1)/2$ и $r \geq 1$, либо $r = n(q-1)/2$ и $r > 1$. Отсутствие неотрицательных решений задачи (0.3) для некоторых $u_0 \in L^r(\Omega)$ при $r < n(q-1)/2$ или $r = n(q-1)/2 = 1$ было доказано соответственно Барасом и Коэном в [4] и Брезисом и Казенавом в [3]. Вопросы существования решений этой задачи и ее обобщений в пространствах Соболева, весовых пространствах и классах мер рассматривались, в частности, в [5] и [6]–[8]. Тем не менее, ряд проблем, сформулированных в [3], остаются открытыми, включая следующие.

- 1) Возможно ли построить последовательность начальных функций $\{u_0^k\}_{k \in \mathbb{N}}$, ограниченную в $L^1(\Omega)$ и такую, чтобы для времен жизни соответствующих решений выполнялось $t_{\max}(u_0^k) \rightarrow 0$?
- 2) Что происходит в случае $r < n(q-1)/2$? Есть ли конкретные примеры начальных функций $u_0 \in L^r(\Omega)$ с $r < n(q-1)/2$, для которых задача (0.1), (0.2) не имеет глобального по времени решения?

Ответ на эти вопросы является одной из целей настоящей работы. Фактически утвердительный ответ на первый из них был дан в [9], хотя и без оценки для $T_{\max}(u_0^k)$. Однако техника, предложенная там, основывается на принципе сравнения и поэтому не поддается непосредственному обобщению на операторы, для которых он не выполняется, такие как операторы высокого порядка по t или x . Это же относится к известным результатам об отсутствии решений, полученным методом сравнения в [4] для другого частного случая задачи (0.1), (0.2):

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^2|x|^{-2}, & (x, t) \in \Omega \setminus \{0\} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (0.4)$$

Поэтому наши рассуждения основываются на методе нелинейной емкости, развитом в работах Митидиери и Похожаева (см. [10] и особенно монографию [11], а также библиографию там). Этот метод заключается в получении априорных оценок для задачи в слабой формулировке, основанных на специальном выборе пробных функций, обычно в виде $\chi(x) = \varphi_R(x)u^\gamma(x)$, где u – предполагаемое решение, φ_R – гладкая аппроксимация характеристической функции множества, размер которого зависит от параметра $R > 0$, а $\gamma \in \mathbb{R}$. Последующий переход к пределу при $R \rightarrow \infty$ (в неограниченных областях) или $R \rightarrow 0$ (в ограниченных) приводит к противоречию с определением решения. В эволюционных задачах пробные функции зависят также от временной переменной, но общая структура рассуждений аналогична. Наш метод представляет собой видоизменение этого подхода применительно к рассматриваемой задаче. В частности, мы обобщаем на нее результаты, полученные в [12].

Статья состоит из трех пунктов. В первом мы вводим обозначения и формулируем рассматриваемую задачу и центральные результаты настоящей работы. Второй пункт посвящен доказательству результатов для скалярного полулинейного дифференциального неравенства, а третий – для систем таких неравенств.

1. Обозначения и формулировка результатов. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – гладкая ограниченная область, а $S \subset \Omega$ – ее замкнутое подмножество. Обозначим $\Omega' := \Omega \setminus S$, $\rho(x) := \text{dist}(x, S)$ и $S^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) \leq \varepsilon\}$ при $\varepsilon > 0$.

Наложим геометрическое условие на структуру множества S в виде

$$\frac{|S^{4\varepsilon} \setminus S^\varepsilon|}{|S^{3\varepsilon} \setminus S^{2\varepsilon}|} \leq c \quad (1.1)$$

с некоторой константой $c > 0$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Здесь $|Q|$ – лебегова мера измеримого множества $Q \subset \mathbb{R}^n$. Буква c обозначает здесь и далее различные положительные константы.

ПРИМЕР 1.1. Если $S = \{0\}$, для $\varepsilon < (1/4) \text{dist}(0, \partial\Omega)$ имеем

$$\frac{|S^{4\varepsilon} \setminus S^\varepsilon|}{|S^{3\varepsilon} \setminus S^{2\varepsilon}|} = \frac{|B_{4\varepsilon}(0) \setminus B_\varepsilon(0)|}{|B_{3\varepsilon}(0) \setminus B_{2\varepsilon}(0)|} = \frac{(4^n - 1)|B_\varepsilon(0)|}{(3^n - 2^n)|B_\varepsilon(0)|} = \frac{4^n - 1}{3^n - 2^n},$$

т.е. условие (1.1) выполнено с константой $c_1 = (4^n - 1)/(3^n - 2^n)$.

ПРИМЕР 1.2. Если $S = S_\eta(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \eta\}$ и

$$\varepsilon < \frac{1}{4} \min\{\eta, \text{dist}(S_\eta(0), \partial\Omega)\},$$

то

$$\begin{aligned} |S^{4\varepsilon} \setminus S^\varepsilon| &= |B_{\eta-\varepsilon}(0) \setminus B_{\eta-4\varepsilon}(0)| + |B_{\eta+4\varepsilon}(0) \setminus B_{\eta+\varepsilon}(0)| \\ &= |B_1(0)| \cdot ((\eta - \varepsilon)^n - (\eta - 4\varepsilon)^n + (\eta + 4\varepsilon)^n - (\eta + \varepsilon)^n) \\ &= 3n|B_1(0)|(\theta_1^{n-1} + \theta_2^{n-1})\eta^{n-1}\varepsilon, \end{aligned}$$

где $1 < \theta_1, \theta_2 < 4$, и аналогично

$$|S^{3\varepsilon} \setminus S^{2\varepsilon}| = n|B_1(0)|(\theta_3^{n-1} + \theta_4^{n-1})\eta^{n-1}\varepsilon$$

с $2 < \theta_3, \theta_4 < 3$. Отсюда

$$\frac{|S^{4\varepsilon} \setminus S^\varepsilon|}{|S^{3\varepsilon} \setminus S^{2\varepsilon}|} = \frac{3(\theta_1^{n-1} + \theta_2^{n-1})}{\theta_3^{n-1} + \theta_4^{n-1}} \leq \frac{3}{2^{n-1}},$$

т.е. условие (1.1) выполнено с константой $c_1 = 3/2^{n-1}$. Аналогичные оценки справедливы для множеств S , имеющих вид сфер или гомеоморфных им поверхностей меньшей размерности.

Мы будем также предполагать, что существует семейство пробных функций, зависящих от параметра $\varepsilon > 0$:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \xi_\varepsilon^\lambda(x), \quad (1.2)$$

где $\lambda > 0$ достаточно велико (его значение можно уточнить в зависимости от характера задачи), а ξ_ε и φ_ε принадлежат $c_0^\infty(\Omega'; [0, 1])$ с носителем в тонком слое вокруг множества S , не пересекающимся с ним самим:

$$\xi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \in S^\varepsilon \cup (\Omega \setminus S^{4\varepsilon}), \\ 1, & x \in S^{3\varepsilon} \setminus S^{2\varepsilon}, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $\varepsilon > 0$ так мало, что $S^{4\varepsilon} \subset \Omega$, причем справедлива оценка

$$|D^\beta \xi_\varepsilon(x)| \leq c\varepsilon^{-|\beta|}, \quad x \in \Omega, \quad (1.4)$$

для любого мультииндекса β с $|\beta| \leq l$.

Введем пробные функции по времени $T_\tau \in c^\infty([0, \tau]; [0, 1])$ такие, что $T_\tau(t) = 1$ при $0 \leq t \leq \tau/2$, $T_\tau(\tau) = 0$ при $3\tau/4 \leq t \leq \tau$ и

$$\int_{\tau/2}^{3\tau/4} \frac{|T_\tau^{(j)}|^{r'}}{|T_\tau|^{r'-1}} dt \leq c\tau^{1-r'j} \quad (1.5)$$

с некоторыми $r > 1$ и $c > 0$, не зависящим от τ . Легко показать, что такие функции существуют (см. [11; приложение Б]).

Пусть теперь $j, k, l \in \mathbb{N}$ и $u_i \in c(\Omega')$, $i = 0, \dots, j-1$, $g \in L_{1,\text{loc}}(\Omega' \times \mathbb{R}_+)$. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_t^{(j)} - \sum_{k \leq |\beta| \leq l} (-1)^{|\beta|} D^\beta (A_\beta(x, t, u)) \geq g(x, t) u^q, & (x, t) \in Q := \Omega' \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, t) \geq 0, & (x, t) \in \overline{Q}, \\ u_t^{(i)}(x, 0) = u_i(x), & x \in \Omega', \quad i = 0, \dots, j-1, \end{cases} \quad (1.6)$$

где $u_t^{(i)} = \partial^i u / \partial t^i$ и

$$g(x, t) \geq c_0 \rho^{-\alpha}(x), \quad x \in \Omega', \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.7)$$

с некоторым $c_0 > 0$, а функции Каратеодори $A_\beta \in L_{1,\text{loc}}(\Omega' \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$ удовлетворяют

$$|A_\beta(x, t, s)| \leq c_\beta s^{p-1} \quad \text{для п.в. } x \in \Omega', \quad t, s \in \mathbb{R}_+ \quad (1.8)$$

с некоторыми $c_\beta > 0$, $p \geq 0$. Предположим также, что

$$(-1)^{j-1} u_{j-1}(x) \geq 0 \quad \text{для п.в. } x \in \Omega'. \quad (1.9)$$

Определим множество пробных функций

$$X^{j,l}(Q) := \{\psi \in C^{l,j-1}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}_+) : \text{supp } \psi(\cdot, t) \subset \Omega' \text{ для любого } t \in \mathbb{R}_+\} \quad (1.10)$$

таких, что $\psi(x, t) = 0$ для почти всех x в некоторой окрестности S и $\partial\Omega$.

Теперь мы можем определить слабое решение задачи (1.6).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Неотрицательная функция $u \in C^{0,j-1}(Q)$ такая, что $gu^q \in L_{1,\text{loc}}(Q)$, называется *слабым решением* задачи (1.6), если и только если $u^{(i)}(x, 0) = u_i(x)$ ($x \in \Omega'$, $i = 0, \dots, j-1$) и для некоторого числа $t_* > 0$, любых $0 < t_1 < t_*$ и

любой неотрицательной функции $\psi \in X^{j,l}(Q)$ выполняется интегральное неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} \int_{\Omega'} g(x, t) u^q(x) \psi \, dx \, dt \\ & \leq \int_0^{t_1} \int_{\Omega'} u((-1)^j \psi_t^{(j)} + \sum_{k \leq |\beta| \leq l} (-1)^{|\beta|} A_\beta(x, t, u) D^\beta \psi) \, dx \, dt + \int_0^{t_1} \int_{\partial\Omega} u \psi_n \, dx \, dt \\ & \quad + \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \int_{\Omega'} (u^{(i)}(x, t_1) \psi^{(j-1-i)}(x, t_1) - u^{(i)}(x, 0) \psi^{(j-1-i)}(x, 0)) \, dx. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Точная верхняя грань всех возможных значений t_1 называется *временем жизни* решения u . Если она бесконечна, решение называется *глобальным*, если конечна – *локальным*.

Особый интерес представляет случай *мгновенного разрушения* решения, когда не существует решений со сколь угодно малым временем жизни t_1 . В [3] было показано, что этот случай имеет место для сингулярного полулинейного уравнения теплопроводности со строго положительной начальной функцией u_0 . В [11] можно найти более тонкие достаточные условия мгновенного разрушения решения такого уравнения или неравенства. Мы обобщаем их на случай операторов высокого порядка как по x , так и по t . Более того, стационарный оператор не обязан быть эллиптическим, а коэффициенты его главной части сами могут быть нелинейными по u .

Итак, справедлива

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $p > 0$, $q > \max\{p, 1\}$, $j, k, l \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ таковы, что

$$l(q-1) - \alpha(p-1) > 0, \quad (1.12)$$

и пусть $u_{j-1} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega')$ удовлетворяет

$$(-1)^{j-1} u_{j-1}(x) \geq c \rho^\delta, \quad x \in \Omega', \quad (1.13)$$

с некоторым $c > 0$, где

$$\delta(p-1) < l, \quad (1.14)$$

$$\delta < \frac{\alpha((j-1)p+1) - l((j-1)q+p)}{j(q-p)}. \quad (1.15)$$

Предположим также, что выполняются условия (1.1) и (1.7)–(1.9).

Тогда задача (1.6) не имеет локальных решений, неотрицательных в какой-либо окрестности 0.

В частности, если параметры неравенства таковы, что

$$\alpha((j-1)p+1) - l((j-1)q+p) > 0, \quad (1.16)$$

подставляя $\delta = 0$ в (1.15), немедленно получаем

СЛЕДСТВИЕ 1.1. В предположениях теоремы 1.1 с параметрами, удовлетворяющими (1.16), задача (1.6) не имеет локальных решений со сколь угодно малым временем жизни, если выполнено

$$(-1)^{j-1}u_{j-1}(x) \geq c$$

с некоторыми константами $c, \varepsilon_0 > 0$ в множестве S^{ε_0} .

Мы рассматриваем также системы нелинейных эволюционных неравенств:

$$\begin{cases} u_t^{(j_1)} - \sum_{k_1 \leq |\beta| \leq l_1} (-1)^{|\beta|} D^\beta (A_\beta(x, t, u, v)) \geq g_1(x, t) v^{q_1}, & (x, t) \in Q := \Omega' \times \mathbb{R}_+, \\ v_t^{(j_2)} - \sum_{k_2 \leq |\beta| \leq l_2} (-1)^{|\beta|} D^\beta (B_\beta(x, t, u, v)) \geq g_2(x, t) u^{q_2}, & (x, t) \in Q, \\ u(x, t) \geq 0, & (x, t) \in Q, \\ v(x, t) \geq 0, & (x, t) \in Q, \\ u_t^{(i)}(x, 0) = u_i(x), & x \in \Omega', \quad i = 0, \dots, j_1 - 1, \\ v_t^{(i)}(x, 0) = v_i(x), & x \in \Omega', \quad i = 0, \dots, j_2 - 1. \end{cases} \quad (1.17)$$

Здесь мы предполагаем, что $j_i, k_i, l_i \in \mathbb{N}$, $k_i \leq l_i$, $i = 1, 2$,

$$g_i(x, t) \geq c_0 \rho^{-\alpha_i}(x), \quad i = 1, 2, \quad x \in \Omega', \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.18)$$

с некоторыми $c_0 > 0$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, а функции $A_\beta, B_\beta \in L_{1, \text{loc}}(\Omega' \times \mathbb{R}_+^2)$ удовлетворяют оценкам

$$|A_\beta(x, t, s)| \leq c_\beta \quad \text{для п.в. } x \in \Omega', \quad t, s \in \mathbb{R}_+, \quad (1.19)$$

с некоторыми $c_\beta > 0$ и $\delta_2 \in \mathbb{R}$.

В дополнение к (1.9) с $j = j_1$ и $\delta = \delta_1$

$$(-1)^{j_1-1}u_{j_1-1}(x) \geq c\rho^{\delta_1}, \quad x \in \Omega'; \quad (1.20)$$

мы предполагаем также, что

$$(-1)^{j_2-1}v_{j_2-1}(x) \geq c\rho^{\delta_2}, \quad x \in \Omega', \quad (1.21)$$

с некоторым $c > 0$.

Решение задачи (1.17) можно определить аналогично определению 1.1. Введем также обозначения

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \left(\frac{\alpha_1 - l_1 q_1}{q_1 - 1} + \frac{l_1}{j_1} \right) \cdot \frac{q_1 - 1}{q_1 q_2} + \left(\frac{\alpha_2}{q_2 - 1} - \max \left\{ l_2, l_1 \frac{j_2}{j_1} \right\} \cdot \frac{q_2}{q_2 - 1} + \frac{l_1}{j_1} \right) \cdot \frac{q_2 - 1}{q_2}, \\ \gamma_2 &= \left(\frac{\alpha_1 - l_1 q_1}{q_1 - 1} + \frac{l_1}{j_1} \right) \cdot \frac{q_1 - 1}{q_1} + \left(\frac{\alpha_2}{q_2 - 1} - \max \left\{ l_2, l_1 \frac{j_2}{j_1} \right\} \cdot \frac{q_2}{q_2 - 1} + \frac{l_1}{j_1} \right) \cdot \frac{q_2 - 1}{q_1 q_2}, \\ \gamma_3 &= \left(\frac{\alpha_2 - l_2 q_2}{q_2 - 1} + \frac{l_2}{j_2} \right) \cdot \frac{q_2 - 1}{q_2} + \left(\frac{\alpha_1}{q_1 - 1} - \max \left\{ l_1, l_2 \frac{j_1}{j_2} \right\} + \frac{l_2}{j_2} \right) \cdot \frac{q_1 - 1}{q_1 q_2}, \\ \gamma_4 &= \left(\frac{\alpha_2 - l_2 q_2}{q_2 - 1} + \frac{l_2}{j_2} \right) \cdot \frac{q_2 - 1}{q_1 q_2} + \left(\frac{\alpha_1}{q_1 - 1} - \max \left\{ l_1, l_2 \frac{j_1}{j_2} \right\} \frac{q_1}{q_1 - 1} + \frac{l_2}{j_2} \right) \cdot \frac{q_1 - 1}{q_1}, \\ \theta &= \frac{q_1 q_2}{q_1 q_2 - 1}. \end{aligned}$$

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $q_1, q_2 > 1$, выполнены условия (1.18)–(1.21) и либо

$$\theta \cdot \max\{\gamma_1, \gamma_3\} > \delta_1, \quad (1.22)$$

либо

$$\theta \cdot \max\{\gamma_2, \gamma_4\} > \delta_2. \quad (1.23)$$

Тогда задача (1.17) не имеет нетривиальных решений.

2. Доказательство теоремы 1.1. Для доказательства нам прежде всего потребуется следующая оценка.

ЛЕММА 2.1. Для $s > 1$ и φ_ε , удовлетворяющего условиям (1.2)–(1.4) с $\lambda > |\beta|s$, справедливо

$$|D^\beta \varphi_\varepsilon(x)|^s \varphi_\varepsilon^{1-s} \leq c \varepsilon^{-|\beta|s}, \quad x \in \Omega. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу правила Лейбница и по индукции получаем

$$D^\beta(\xi_\varepsilon^\lambda) = \sum_{k=0}^{|\beta|} \xi_\varepsilon^{\lambda-k} \prod_{|\gamma|=0}^{\gamma_k} c_k(\lambda, \gamma) D^\gamma \xi_\varepsilon, \quad \text{где } \gamma_k \text{ таковы, что } \sum_{|\gamma|=0}^{\gamma_k} |\gamma| = k.$$

Вследствие (1.4) это приводит к

$$\begin{aligned} |D^\beta(\xi_\varepsilon^\lambda)|^s \xi_\varepsilon^{\lambda(1-s)} &\leq c(\lambda) \sum_{k=0}^{|\beta|} \left(\xi_\varepsilon^{\lambda-k} \prod_{|\gamma|=0}^{\gamma_k} |D^\gamma \xi_\varepsilon| \right)^s \cdot \xi_\varepsilon^{\lambda(1-s)} \\ &\leq c(\lambda) \sum_{k=0}^{|\beta|} \xi_\varepsilon^{\lambda-ks} \varepsilon^{-ks} \leq c(\lambda) \varepsilon^{-|\beta|s} \end{aligned}$$

и доказательство завершено.

Зафиксируем теперь $t_1 = \tau > 0$ и введем двухпараметрическое семейство пробных функций $\psi_{\varepsilon, \tau}(x, t) = \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t)$, где φ_ε удовлетворяют (1.2)–(1.4), а для T_τ выполнено (1.5) с $r = q$. Очевидно, функции $\psi_{\varepsilon, \tau}$ принадлежат пространству $X^{j,l}(Q)$, определенному в (1.10).

Подставляя эти пробные функции в неравенство (1.11), с учетом (1.8) получаем

$$\begin{aligned} c_0 \int_0^\tau \int_{\Omega'} u^q \rho^{-\alpha} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt + (-1)^{j-1} \int_{\Omega'} u_{j-1} \varphi_\varepsilon(x) dx \\ \leq c \int_0^\tau \int_{\Omega'} u^p \cdot \sum_{k \leq |\beta| \leq l} |D^\beta \varphi_\varepsilon(x)| T_\tau(t) dx dt - \int_0^\tau \int_{\Omega'} u \varphi_\varepsilon(x) T_\tau^{(j)}(t) dx dt \\ \leq c \int_0^\tau \int_{\Omega'} u^p \cdot \sum_{k \leq |\beta| \leq l} |D^\beta \varphi_\varepsilon(x)| T_\tau(t) dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega'} u \varphi_\varepsilon(x) |T_\tau^{(j)}(t)| dx dt. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Применение неравенства Юнга к обоим интегралам в правой части (2.2) дает

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_{\Omega'} u^p \cdot \sum_{k \leq |\beta| \leq l} |D^\beta \varphi_\varepsilon(x)| T_\tau(t) dx dt \\ & \leq \frac{c_0}{4} \int_0^\tau \int_{\Omega'} u^q \rho^{-\alpha} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt \\ & \quad + c \int_0^\tau \int_{\Omega'} \sum_{k \leq |\beta| \leq l} |D^\beta \varphi_\varepsilon(x)|^{q/(q-p)} \rho^{\alpha p/(q-p)} \varphi_\varepsilon^{-p/(q-p)}(x) T_\tau(t) dx dt, \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\tau \int_{\Omega'} u \varphi_\varepsilon(x) |T_\tau^{(j)}(t)| dx dt \\ & \leq \frac{c_0}{4} \int_0^\tau \int_{\Omega'} u^q \rho^{-\alpha} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt + c \int_0^\tau \int_{\Omega'} \frac{|T_\tau^{(j)}(t)|^{q'}}{T_\tau^{q'-1}(t)} \rho^{\alpha/(q-1)} \varphi_\varepsilon(x) dx dt, \quad (2.4) \end{aligned}$$

что приводит к

$$\begin{aligned} & \frac{c_0}{2} \int_0^\tau \int_{\Omega'} u^q \rho^{-\alpha} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt + (-1)^{j-1} \int_{\Omega'} u_{j-1} \varphi_\varepsilon(x) dx \\ & \leq c \int_0^\tau \int_{\Omega'} \left(\sum_{k \leq |\beta| \leq l} |D^\beta \varphi_\varepsilon(x)|^{q/(q-p)} \varphi_\varepsilon^{-p/(q-p)}(x) \rho^{\alpha p/(q-p)} T_\tau(t) \right. \\ & \quad \left. + \frac{|T_\tau^{(j)}(t)|^{q'}}{T_\tau^{q'-1}(t)} \rho^{\alpha/(q-1)} \varphi_\varepsilon(x) \right) dx dt. \quad (2.5) \end{aligned}$$

Теперь можно оценить первое слагаемое в правой части (2.5) по лемме 2.1 с $s = q/(q-p) > 1$, а второе – с помощью (1.5). Тогда из (2.5) вытекает

$$\begin{aligned} & \frac{c_0}{2} \int_0^\tau \int_{\Omega'} u^q \rho^{-\alpha} \varphi_\varepsilon T_\tau dx dt \\ & \leq c |S^{4\varepsilon} \setminus S^\varepsilon| (\varepsilon^{(\alpha p - lq)/(q-p)} \tau + \tau^{1-jq'} \varepsilon^{\alpha/(q-1)}) - (-1)^{j-1} \int_{\Omega'} u_{j-1} \varphi_\varepsilon dx. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Очевидно, если правая часть (2.6) становится неположительной при некотором $\tau = \tau_1$, время жизни никакого ненулевого решения (1.6) не может превзойти τ_1 . Простые вычисления показывают, что это выражение достигает минимума при τ_1 таком, что

$$\varepsilon^{(\alpha p - lq)/(q-p) - \alpha/(q-1)} + (1 - jq') \tau_1^{-jq'} = 0,$$

откуда следует

$$\tau_1(\varepsilon) = c_1 \varepsilon^{(l(q-1) - \alpha(p-1))/j(q-p)}, \quad (2.7)$$

где $c_1 = (jq' - 1)^{-1/(jq')}$. Отметим, что $\tau_1(\varepsilon) \rightarrow 0_+$ при $\varepsilon \rightarrow 0_+$ в силу (1.12).

Подставляя (2.7) в (2.6), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{c_0}{2} \int_0^{\tau_1} \int_{\Omega'} u^q \rho^{-\alpha} \varphi_\varepsilon(x) t_{\tau_1}(t) dx dt \\ & \leq c_1 |S^{4\varepsilon} \setminus S^\varepsilon| \varepsilon^{(\alpha((j-1)p+1) - l((j-1)q+p))/(j(q-p))} - (-1)^{j-1} \int_{\Omega'} u_{j-1}(x) \varphi_\varepsilon(x) dx. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Вследствие положительности u и (1.13) имеем

$$(-1)^{j-1} \int_{\Omega'} u_{j-1}(x) \varphi_\varepsilon(x) dx \geq c\varepsilon^\delta |S^{3\varepsilon} \setminus S^{2\varepsilon}|,$$

так что в силу (1.1) правая часть (2.8) становится отрицательной для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ при условии (1.15). Предположение (1.14) гарантирует, что интервал допустимых значений α , определенный формулами (1.15) и (1.12), непуст. Это завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если выполняются все предположения теоремы 1.1, но (1.15) заменено равенством

$$\delta = \frac{\alpha((j-1)p+1) - l((j-1)q+p)}{j(q-p)}, \quad (2.9)$$

эти рассуждения также доказывают отсутствие локальных решений (1.6) при условии, что константа c в (1.13) достаточно велика.

ПРИМЕР 2.1. Пусть $j = 1$, $\alpha = 0$ и $A = \Delta$. В этом случае имеем нелинейное уравнение теплопроводности с заданным начальным условием:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^q, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.10)$$

Тогда неравенство (1.15) принимает вид

$$\delta < -\frac{2}{q-1}, \quad (2.11)$$

а предположения (1.12) и (1.14) выполняются автоматически. Поэтому мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.1. При условии (2.11) задача (2.10) не имеет локальных положительных решений.

Следующее замечание показывает, что для задачи (2.10) условия (1.15)–(2.9) неулучшаемы в рассматриваемом классе функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если $S = \{0\}$ и $u_0(x) = |x|^\delta$, где $\delta > -2/(q-1)$, имеем $u_0 \in L^r(\Omega)$ с $r \in (-n/\delta, n(q-1)/2]$, и решение $u \in c([0, T]; L^r(\Omega))$ существует по теореме 1 [3].

Аналогично, известно (см., в частности, [5]), что задача (2.10) разрешима в $c([0, t]; W_\theta^{1,r}(\Omega))$ для некоторого $T > 0$ и всех $q \leq q_{\text{cr}}$, если $u_0 \in W_\theta^{1,r}(\Omega)$, где

$$q_{\text{cr}} := \frac{n + \theta}{n + \theta - r}, \quad (2.12)$$

$$W_\theta^{1,r}(\Omega) := \left\{ u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega) : \int_\Omega \sum_{|\beta| \leq 1} |D^\beta u|^r |x|^\theta dx < \infty \right\}.$$

Если $u_0(x) = |x|^\delta$ с $\delta > -2/(q-1)$, имеем $u_0 \in W_\theta^{1,r}(\Omega)$ для всех θ , для которых выполнено (2.12). Поэтому решение $u \in c([0, t]; W_\theta^{1,r}(\Omega))$ существует.

Таким образом, мы видим, что диапазон допустимых значений δ , заданный формулой (2.11) (включая случай $\delta = -2/(q-1)$ с малой константой в (1.13), в соответствии с замечанием 2.1), оптимален как для $c([0, t]; L^r(\Omega))$, так и для $c([0, t]; W_\theta^{1,r}(\Omega))$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Из доказательства теоремы 1.1 следует, что при ее предположениях существуют последовательности начальных функций u_0^k , ограниченные в $L^1(\Omega)$ и такие, что времена жизни соответствующих решений задачи (0.1), (0.2) стремятся к нулю. Например, при $n = 1$, $\Omega = (-1, 1)$ и $S = \{0\}$ таковы функции

$$u_0^k(x) = \begin{cases} ck^\beta, & x \in [-k^{-\beta}, k^{-\beta}], \\ 0, & x \in (-1, -2k^{-\beta}) \cup (2k^{-\beta}, 1), \end{cases}$$

линейные на $[-2k^{-\beta}, -k^\beta] \cup [k^{-\beta}, 2k^{-\beta}]$, где

$$\beta := \frac{l(q(j-1)+1)}{j(q-1)},$$

а константа c больше $c/2$, где c взято из (2.8). А именно, при этих условиях имеем $\tau_1 \sim k^{-l/j}$ в силу (2.7). Эта оценка дополняет положительный ответ на Орег Problem 1 из [5], полученный в [2] другими методами.

ПРИМЕР 2.2. В полигармоническом случае, т.е.

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^k u = u^q, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (2.13)$$

условие (1.15) принимает вид

$$\delta < -\frac{2k}{q-1}, \quad (2.14)$$

и мы получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.2. При условии (2.14) задача (2.13) не имеет локальных положительных решений.

ПРИМЕР 2.3. В случае регулярных начальных данных мгновенное разрушение решения может произойти из-за сингулярности в нелинейном члене, как, например, в задаче

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^k u = \frac{u^q}{|x|^\alpha}, & (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.15)$$

Применяя следствие 1.1, получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $u_0 \geq c > 0$ и $\alpha > 2k$. Тогда задача (2.15) не имеет локальных положительных решений.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Отсутствие таких решений (2.15) было показано для $k = 1$ в [13] и для произвольного $k \in \mathbb{N}$ в [12], включая случай $\alpha = 2k$ без ограничений на величину константы c в (1.13). С другой стороны, при $\alpha < 2k$ и достаточно большом n легко получить стационарное решение $u(x, t) \equiv u_0(x)$ задачи (2.15), если, например, положить

$$u_0(x) = c|x|^{(\alpha-2k)/(q-1)},$$

где константа $c > 0$ выбрана так, что u_0 удовлетворяет уравнению

$$(-\Delta)^k u_0 = \frac{u_0^q}{|x|^\alpha}.$$

Простые вычисления показывают, что такое $c > 0$ существует, в частности, при $k = 1$ и $n > (2q - \alpha)/(q - 1)$. Таким образом, наш результат оказывается точным и в этом случае.

3. Доказательство теоремы 1.2. При выборе пробных функций $\psi = \psi_{\varepsilon, \tau}$ по формулам (1.3)–(1.5), где $r = \max\{q'_1, q'_2\}$, из неравенств (1.17) следует

$$\begin{aligned} c_0 \int_0^\tau \int_{\Omega'} v^{q_1} \rho^{-\alpha_1} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt + (-1)^{j_1-1} \int_{\Omega'} u_{j_1-1} \varphi_\varepsilon(x) dx \\ \leq c \int_0^\tau \int_{\Omega'} u \cdot \sum_{k_1 \leq |\beta| \leq l_1} |D^\beta \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t)| dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega'} u |\varphi_\varepsilon(x) T_\tau^{(j_1)}(t)| dx dt, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} c_0 \int_0^\tau \int_{\Omega'} u^{q_2} \rho^{-\alpha_2} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt + (-1)^{j_2-1} \int_{\Omega'} v_{j_2-1} \varphi_\varepsilon(x) dx \\ \leq c \int_0^\tau \int_{\Omega'} v \cdot \sum_{k_2 \leq |\beta| \leq l_2} |D^\beta \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t)| dx dt + \int_0^\tau \int_{\Omega'} v \varphi_\varepsilon(x) |T_\tau^{(j_2)}(t)| dx dt. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Применяя неравенство Гёльдера к правым частям (3.1) и (3.2), получаем

$$\begin{aligned} c_0 \int_0^\tau \int_{\Omega'} v^{q_1} \rho^{-\alpha_1} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt + (-1)^{j_1-1} \int_{\Omega'} u_{j_1-1} \varphi_\varepsilon(x) dx \\ \leq \left(\int_0^\tau \int_{\Omega'} u^{q_2} \rho^{-\alpha_2} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt \right)^{1/(q_2)} \\ \times \left(\int_0^\tau \int_{\Omega'} \left(\left| \sum_{k_2 \leq |\beta| \leq l_2} D^\beta \varphi_\varepsilon(x) \right|^{q'_2} \varphi_\varepsilon^{-q'_2} + |T_\tau^{(j_2)}(t)|^{q'_2} T_\tau^{-q'_2} \right) \rho^{\alpha_2 q_2 / q'_2} \varphi_\varepsilon T_\tau dx dt \right)^{1/(q'_2)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} c_0 \int_0^\tau \int_{\Omega'} u^{q_2} \rho^{-\alpha_2} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt + (-1)^{j_2-1} \int_{\Omega'} v_{j_2-1} \varphi_\varepsilon(x) dx \\ \leq c \left(\int_0^\tau \int_{\Omega'} v^{q_1} \rho^{-\alpha_1} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt \right)^{1/(q_1)} \\ \times \left(\int_0^\tau \int_{\Omega'} \left(\left| \sum_{k_1 \leq |\beta| \leq l_1} D^\beta \varphi_\varepsilon(x) \right|^{q'_1} \varphi_\varepsilon^{-q'_1} + |T_\tau^{(j_1)}(t)|^{q'_1} T_\tau^{-q'_1} \right) \rho^{\alpha_1 q_1 / q'_1} \varphi_\varepsilon T_\tau dx dt \right)^{1/(q'_1)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Применение (1.3)–(1.5) с $|\beta| \leq \max\{l_1, l_2\}$ и леммы 2.1 дает

$$\begin{aligned} c_0 \int_0^\tau \int_{\Omega'} v^{q_1} \rho^{-\alpha_1} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt + (-1)^{j_1-1} \int_{\Omega'} u_{j_1-1} \varphi_\varepsilon(x) dx \\ \leq c_{\varepsilon,1} \left(\int_0^\tau \int_{\Omega'} u^{q_2} \rho^{-\alpha_2} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt \right)^{1/(q_2)} \\ \times (\varepsilon^{(\alpha_2 - l_2 q_2)/(q_2 - 1)} \tau + \tau^{1 - j_2 q'_2} \varepsilon^{\alpha_2/(q_2 - 1)})^{1/(q'_2)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} c_0 \int_0^\tau \int_{\Omega'} u^{q_2} \rho^{-\alpha_2} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt + (-1)^{j_2-1} \int_{\Omega'} v_{j_2-1} \varphi_\varepsilon(x) dx \\ \leq c_{\varepsilon,2} \left(\int_0^\tau \int_{\Omega'} v^{q_1} \rho^{-\alpha_1} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt \right)^{1/(q_1)} \end{aligned}$$

$$\times (\varepsilon^{(\alpha_1 - l_1 q_1)/(q_1 - 1)} \tau + \tau^{1 - j_1 q'_1} \varepsilon^{\alpha_1/(q_1 - 1)})^{1/(q'_1)}, \quad (3.6)$$

где

$$c_{\varepsilon,1} = c|S^{4\varepsilon} \setminus S^\varepsilon|^{1/(q'_2)}, \quad c_{\varepsilon,2} = c|S^{4\varepsilon} \setminus S^\varepsilon|^{1/(q'_1)}.$$

Аналогично разделу 2 минимизируем правые части (3.5) и (3.6), выбирая τ либо в виде

$$\tau = \tau_1 = c\varepsilon^{l_1/j_1}, \quad (3.7)$$

либо как

$$\tau = \tau_2 = c\varepsilon^{l_2/j_2}. \quad (3.8)$$

Подставляя (3.6) с такими τ в (3.5) и наоборот, а затем применяя неравенство Юнга с соответствующими параметрами, получаем

$$\frac{c_0}{2} \int_0^\tau \int_{\Omega'} v^{q_1} \rho^{-\alpha_1} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt + (-1)^{j_1-1} \int_{\Omega'} u_{j_1-1} \varphi_\varepsilon(x) dx \leq c_{\varepsilon,1} \varepsilon^{\max\{\gamma_1, \gamma_3\}\theta+m}, \quad (3.9)$$

$$\frac{c_0}{2} \int_0^\tau \int_{\Omega'} u^{q_2} \rho^{-\alpha_2} \varphi_\varepsilon(x) T_\tau(t) dx dt + (-1)^{j_2-1} \int_{\Omega'} v_{j_2-1} \varphi_\varepsilon(x) dx \leq c_{\varepsilon,2} \varepsilon^{\max\{\gamma_2, \gamma_4\}\theta+m}. \quad (3.10)$$

Так как u и v положительны, с учетом (1.22), (1.23) мы завершаем доказательство аналогично теореме 1.1.

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = v^{q_1}, & (x, t) \in Q := \Omega' \times \mathbb{R}_+, \\ v_t - \Delta v = u^{q_2}, & (x, t) \in Q, \\ u(x, t) \geq 0, & (x, t) \in Q, \\ v(x, t) \geq 0, & (x, t) \in Q, \\ u_t^{(i)}(x, 0) = u_i(x), & x \in \Omega', \quad i = 0, \dots, j_1 - 1, \\ v_t^{(i)}(x, 0) = v_i(x), & x \in \Omega', \quad i = 0, \dots, j_2 - 1, \end{cases} \quad (3.11)$$

где $(-1)^{j_1-1} u_{j_1-1} \geq 0$, $(-1)^{j_2-1} v_{j_2-1} \geq 0$. Применяя к этой задаче теорему 1.2 с $j_1 = j_2 = 1$, $l_1 = l_2 = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если для всех $x \in \Omega'$ и некоторого $c > 0$ выполнено либо

$$u_0(x) \geq c|x|^{\delta_1}, \quad (3.12)$$

где

$$\delta_1 < -\frac{2(q_1 + 1)}{q_1 q_2 - 1}, \quad (3.13)$$

либо

$$v_0(x) \geq c|x|^{\delta_2}, \quad (3.14)$$

где

$$\delta_2 < -\frac{2(q_2 + 1)}{q_1 q_2 - 1}, \quad (3.15)$$

то задача (3.11) не имеет решений.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Очевидно, при $q_1 = q_2$ условия (3.13), (3.15) совпадают с (2.11).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Неулучшаемость условий (3.13), (3.15) в рассматриваемом функциональном классе может быть проверена аналогично замечанию 2.4.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] F. B. Weissler, “Semilinear evolution equations in Banach spaces”, *J. Funct. Anal.*, **32**:3 (1979), 277–296.
- [2] F. B. Weissler, “Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p ”, *Indiana Univ. Math. J.*, **29**:1 (1980), 79–102.
- [3] H. Brezis, T. Cazenave, “A nonlinear heat equation with singular initial data”, *J. Anal. Math.*, **68**:1 (1996), 277–304.
- [4] P. Baras, L. Cohen, “Complete blow-up after $T_{\max}$ for the solution of a semilinear heat equation”, *J. Funct. Anal.*, **71**:1 (1987), 142–174.
- [5] J. M. Arrieta, A. N. Carvalho, “Abstract parabolic problems with critical nonlinearities and applications to Navier–Stokes and heat equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:1 (2000), 285–310.
- [6] H. Brezis, T. Cazenave, Y. Martel, A. Ramiandrisoa, “Blow up for $u_t - \Delta u = g(u)$ revisited”, *Adv. Differential Equations*, **1**:1 (1996), 73–90.
- [7] H. Brezis, A. Friedman, “Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **62**:1 (1983), 73–97.
- [8] M. Fila, Ph. Souplet, F. B. Weissler, “Linear and nonlinear heat equations in L^q_δ spaces and universal bounds for global solutions”, *Math. Ann.*, **320**:1 (2001), 87–113.
- [9] J. M. Arrieta, A. Rodríguez-Bernal, “Non well posedness of parabolic equations with supercritical nonlinearities”, *Commun. Contemp. Math.*, **6**:5 (2004), 733–764.
- [10] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в $\mathbb{R}^N$ ”, *Исследования по теории дифференцируемых функций многих переменных и ее приложениям. Часть 18*, Тр. МИАН, **227**, Наука, М., 1999, 192–222.
- [11] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 1–383.
- [12] Е. И. Галахов, “Положительные решения некоторых дифференциальных неравенств и систем”, *Дифференц. уравнения*, **40**:5 (2004), 662–672.
- [13] H. Brezis, X. Cabré, “Some simple nonlinear PDE’s without solutions”, *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.* (8), **1**:2 (1998), 223–262.

Е. И. Галахов

Математический институт РАН им. В. А. Стеклова

E-mail: galakhov@mi.ras.ru

Поступило

27.10.2008