Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. Е. Бритвина, О некоторых полисвертках, порожденных преобразованием Ханкеля, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 1, 20–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm85>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 15:43:41

УДК 517.9

О НЕКОТОРЫХ ПОЛИСВЕРТКАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ХАНКЕЛЯ

Л. Е. Бритвина

В статье конструируются две полисвертки (обобщенные свертки) с весом $\gamma = x^{-\nu}$, порожденные преобразованием Ханкеля, обладающие факторизационными равенствами

$$H_{\nu}[h_1](x) = x^{-\nu} H_{\mu}[f](x) H_{\mu}[g](x), \quad H_{\mu}[h_2](x) = x^{-\nu} H_{\nu}[f](x) H_{\mu}[g](x).$$

Здесь H_{μ} – оператор преобразования Ханкеля порядка μ . Найдены некоторые условия существования построенных полисверток. На их основе с использованием дифференциальных свойств преобразования Ханкеля получены еще две полисвертки. Построенные конструкции позволяют решить новые классы интегральных и интегро-дифференциальных уравнений и систем уравнений.

Библиография: 16 названий.

1. Введение. Наиболее изученным из всех преобразований Бесселя является интегральное преобразование Ханкеля. Оно применяется для решения многих задач математической физики (см., например, [1]–[3]) и определяется посредством интеграла [1]

$$F_{\nu}(x) = \int_0^{\infty} f(t) t J_{\nu}(xt) dt = H_{\nu}[f(t)](x), \quad (1)$$

где $J_{\nu}(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка ν , $\operatorname{Re} \nu > -1/2$.

Данная статья посвящена построению и изучению некоторых сверточных конструкций, порожденных преобразованием (1).

Для этого воспользуемся определением полисвертки или обобщенной свертки, которое было впервые введено В. А. Какичевым в 1967 году [4] (см., также, [5]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть A_1 , A_2 и A_3 – операторы некоторых интегральных преобразований, $\gamma(x)$ – весовая функция (вес). *Полисверткой* функций $f(t)$ и $g(t)$, порожденной интегральными преобразованиями A_1 , A_2 и A_3 , с весом $\gamma(x)$ будем называть функцию $h(t)$, обозначаемую символом $(f_{A_1} \overset{\gamma}{*} g_{A_2})_{A_3}(t)$, для которой справедливо факторизационное равенство

$$A_3[h(t)](x) = A_3[(f_{A_1} \overset{\gamma}{*} g_{A_2})_{A_3}](x) = \gamma(x) A_1[f](x) A_2[g](x). \quad (2)$$

Познакомиться с различными приложениями конструкций, обладающих свойством (2), можно в работах [4], [6]–[8].

Если $A_1 = H_\mu$, $A_2 = H_\eta$, $A_3 = H_\nu$ и $\gamma(x) = x^\alpha$, то полисвертку $h(t)$ будем обозначать $(f_\mu \overset{\alpha}{*} g_\eta)_\nu(t)$. При $\mu = \eta = \nu$ и $\alpha = -\nu$ получаем классическую свертку преобразования Ханкеля [6], [9], впервые встречающуюся в [10].

Нахождение явных выражений для полисверток интегральных преобразований, ядра которых являются специальными функциями, связано со значительными трудностями. Ряд сверточных конструкций с участием преобразования Ханкеля был построен Н. Х. Тхао и Н. Х. Хай [7].

Некоторые полисвертки, полученные автором с использованием подхода В. А. Какичева, представлены в [11].

2. Полисвертки, порожденные двумя операторами преобразования Ханкеля различного порядка. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} h_1(t) = & t^{-\nu} \iint_{|u-v| < t < u+v} u^\nu f(u) g(v) P_1(t; u, v) du dv \\ & - t^{-\nu} \int_0^\infty du \int_0^{t-u} u^\nu f(u) g(v) Q_1(t; u, v) dv \end{aligned} \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned} h_2(t) = & t^{\nu-1} \int_0^\infty dv \int_{|t-v|}^{t+v} u^{-\nu+1} f(u) g(v) P_2(t; u, v) du \\ & - t^{\nu-1} \int_0^\infty dv \int_{t+v}^\infty u^{-\nu+1} f(u) g(v) Q_2(t; u, v) du, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$P_i(t; u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v^\nu P_{\mu-1/2}^{1/2-\nu}(\cos s_i) \sin^{\nu-1/2} s_i, \quad (5)$$

$$Q_i(t; u, v) = \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} \sin[(\mu - \nu)\pi] e^{(2\nu-1)\pi/(2i)} v^\nu Q_{\mu-1/2}^{1/2-\nu}(\operatorname{ch} r_i) \operatorname{sh}^{\nu-1/2} r_i, \quad (6)$$

$P_\mu^\nu(x)$, $Q_\mu^\nu(x)$ – присоединенные функции Лежандра первого и второго рода соответственно, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} 2uv \cos s_1 &= u^2 + v^2 - t^2, & 2uv \operatorname{ch} r_1 &= t^2 - u^2 - v^2, \\ 2tv \cos s_2 &= t^2 + v^2 - u^2, & 2tv \operatorname{ch} r_2 &= u^2 - t^2 - v^2. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\sqrt{t} f(t), \sqrt{t} g(t) \in L(0, \infty)$ и $\operatorname{Re} \nu > 1/2$, $\operatorname{Re} \mu > (2 \operatorname{Re} \nu - 3)/4$. Тогда функция $h_1(t)$ существует и справедливо факторизационное равенство

$$H_\nu[h_1](x) = x^{-\nu} H_\mu[f](x) H_\mu[g](x). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что [12]

$$\int_0^\infty x^{1-\nu} J_\nu(xt) J_\mu(xu) J_\mu(xv) dx = I, \quad (8)$$

где

$$I = \begin{cases} 0, & 0 < t < |u - v|, \quad u, v > 0, \quad \operatorname{Re} \mu > -1, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2, \\ \frac{u^{\nu-1}}{vt^\nu} P_1(t; u, v), & |u - v| < t < u + v, \quad u, v > 0, \quad \operatorname{Re} \mu > -1, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2, \\ -\frac{u^{\nu-1}}{vt^\nu} Q_1(t; u, v), & t > u + v, \quad u, v > 0, \quad \operatorname{Re} \mu > -1, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2, \end{cases}$$

функции $P_1(t; u, v)$, $Q_1(t; u, v)$ определяются равенствами (5) и (6) соответственно.

Опираясь на асимптотическое разложение функций Бесселя первого рода (см., например, [13]), нетрудно показать, что существует положительное C_1 , не зависящее от $t \in (0, \infty)$, такое, что

$$|\sqrt{t} J_\nu(t)| < C_1 \quad \forall t \in (0, \infty) \quad (9)$$

и $t^{-\nu} J_\nu(t) \in L(0, \infty)$, когда $\operatorname{Re} \nu > 1/2$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^N x^{1-\nu} J_\nu(xt) J_\mu(xu) J_\mu(xv) dx \right| &\leq \frac{C_1^2}{\sqrt{uv}} \int_0^N |x^{-\nu} J_\nu(xt)| dx \\ &\leq \frac{C_1^2 t^{\operatorname{Re} \nu - 1}}{\sqrt{uv}} \int_0^\infty |x^{-\nu} J_\nu(x)| dx \leq \frac{C t^{\operatorname{Re} \nu - 1}}{\sqrt{uv}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где C не зависит от t, u, v и N .

Учитывая, что $\sqrt{t} f(t), \sqrt{t} g(t) \in L(0, \infty)$, получаем

$$|h_1(t)| \leq C t^{\operatorname{Re} \nu - 1} \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{uv} f(u) g(v) du dv < \infty. \quad (11)$$

Таким образом, функция $h_1(t)$, определяемая выражением (3), существует. Докажем теперь справедливость факторизационного равенства (7).

Из (10) и (11) следует, что в нашем случае применима теорема Лебега о сходимости под знаком интеграла и

$$\begin{aligned} h_1(t) &= \int_0^\infty \int_0^\infty uv f(u) g(v) \int_0^\infty x^{1-\nu} J_\nu(xt) J_\mu(xu) J_\mu(xv) dx du dv \\ &= \int_0^\infty x J_\nu(xt) x^{-\nu} H_\mu[f](x) H_\mu[g](x) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь мы воспользовались также теоремой о существовании преобразования Ханкеля функции $f(t)$, принадлежащей $L(0, \infty)$ с весом $\sqrt{t}$ (см. [14]). Известно, что

$$H_\mu[f](x) = O(x^\mu), \quad x \rightarrow +0,$$

для $\sqrt{t} f(t)$, принадлежащей $L(0, \infty)$ (см. [15]). Поэтому

$$H(x) = x^{-\nu} H_{\mu}[f](x) H_{\mu}[g](x) = O(x^{2\mu-\nu}), \quad x \rightarrow +0. \quad (13)$$

С другой стороны, применяя неравенство (9) и учитывая, что $\sqrt{t} f(t) \in L(0, \infty)$, получим

$$|H_{\mu}[f](x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} |\sqrt{t} f(t)| |\sqrt{xt} J_{\mu}(xt)| dt \leq \frac{C_1}{\sqrt{x}}, \quad x \in (0, \infty),$$

где C_1 не зависит от x, μ . Аналогично, $H_{\mu}[g](x) = O(x^{-1/2})$.

Таким образом, $H(x) = O(x^{-\nu-1}) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$. В частности,

$$H(x) = O(x^{-\nu-1}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (14)$$

Итак, при $\operatorname{Re} \nu > 1/2$ и $\operatorname{Re} \mu > (2 \operatorname{Re} \nu - 3)/4$ из (13) и (14) следует, что $\sqrt{x} H(x) \in L(0, \infty)$; формулу (12) можно переписать в виде $h_1(t) = H_{\nu}^{-1}[H(x)](t)$.

Далее, применяя теорему обращения преобразования Ханкеля в классе $L(0, \infty)$ с весом $\sqrt{x}$ (см. [14]), функцию $H(x)$ можно записать так

$$H(x) = H_{\nu}[h_1(t)](x). \quad (15)$$

Из формул (13) и (15) следует факторизационное равенство (7). Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\operatorname{Re} \nu > 1/2$, $\operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu - 1$ и $\sqrt{t} f(t), \sqrt{t} g(t) \in L(0, \infty)$. Тогда функция $h_2(t)$ существует и справедливо факторизационное равенство

$$H_{\mu}[h_2](x) = x^{-\nu} H_{\nu}[f](x) H_{\mu}[g](x). \quad (16)$$

Как и в доказательстве теоремы 1 необходимо воспользоваться значением интеграла (8).

3. Полисвертки преобразования Ханкеля и дифференциальные операторы. Используя метод, предложенный автором в [16], на основе сверточных конструкций (3) и (4) можно построить полисвертки

$$(f_{\mu}^{\lambda} * g_{\mu \pm m})_{\nu}, \quad (f_{\nu}^{\lambda} * g_{\mu \pm m})_{\mu}, \quad m, l \in \mathbb{N}_0, \quad (17)$$

где $\lambda = -\nu + m + 2l$, $m, l \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Для нахождения выражений (17), как и в [16], введем дифференциальные операторы

$$N_{m, \nu} = t^{\nu} \left(\frac{d}{t dt} \right)^m t^{m-\nu}, \quad S_{m, \nu}^k = [N_{m, -\nu} N_{m, \nu+m}]^k, \quad (18)$$

которые обладают следующими свойствами:

а) $S_{m, \nu}^k = S_{m, -\nu}^k = S_{km, \nu}$, где

$$S_{n, \nu} = S_{n, \nu}^1 = S_{1, \nu}^n = \left[\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{d}{dt} - \frac{\nu^2}{t^2} \right]^n;$$

б) $N_{m, \pm \nu + km} N_{m, \pm \nu + (k-1)m} \cdots N_{m, \pm \nu + m} N_{m, \pm \nu} = N_{m(k+1), \pm \nu + km}$.

Следует отметить, что частные случаи данных операторов встречаются в основных уравнениях математической физики, например, в теории упругости [1]–[3].

Используя свойства а) и б), нетрудно показать, что все известные дифференциальные операторы (см., например, [15]), связанные с преобразованиями Ханкеля, можно выразить через $N_{m,\pm\nu}$ и $S_{m,\nu}$. Поэтому при построении полисверток ограничимся рассмотрением операторов (18).

Пусть $C_\lambda(0, \infty)_\rho$ – множество функций $f(t)$, имеющих непрерывную на интервале $(0, \infty)$ производную, для которых справедливы следующие асимптотические оценки:

$$f(t) = O(t^\lambda), \quad t \rightarrow +0, \quad f(t) = O(t^{-\rho}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Далее $\rho, \lambda \in \mathbb{R}$, $\rho > 3/2$, $\lambda > -1/2$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ. Символом $(N_{k,\pm\mu} f_\mu *^\alpha N_{m,\pm\eta} g_\eta)_\nu$ будем обозначать полисвертку $h(t)$, обладающую факторизационным равенством

$$H_\nu[h(t)](x) = x^\alpha H_\mu[N_{k,\pm\mu} f](x) H_\eta[N_{m,\pm\eta} g](x).$$

В [16] представлены теоремы 1 и 2, которые применительно к данному исследованию могут быть сформулированы так.

ЛЕММА 1. Пусть $\sqrt{t} f(t) \in L(0, \infty)$, $\operatorname{Re} \nu, \operatorname{Re} \eta > -1/2$, $\operatorname{Re} \mu > -1/2 + \max\{0, \mp m\}$, $k = 1, 2, \dots, m$. Если существует и известна полисвертка $(f_\eta *^\alpha g_\mu)_\nu$, то

а) для функции $g(t)$, $\sqrt{t} N_{m,\mp\mu} g(t) \in L(0, \infty)$, $N_{m-k,\mp\mu-k} g(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\rho$, существуют полисвертки

$$(f_\eta *^{\alpha+m} g_{\mu+m})_\nu = (\pm 1)^m (f_\eta *^\alpha N_{m,\mp\mu} g_\mu)_\nu;$$

б) для функции $g(t)$, $\sqrt{t} S_{m,\mu} g(t) \in L(0, \infty)$, $N_{m-k,\mp\mu-k} N_{m,\pm\mu+m} g(t)$, $N_{m-k,\pm\mu+m-k} g(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\rho$, существуют полисвертки

$$(f_\eta *^{\alpha+2m} g_\mu)_\nu = (-1)^m (f_\eta *^\alpha S_{m,\mu} g_\mu)_\nu.$$

ЛЕММА 2. Пусть $\operatorname{Re} \mu, \operatorname{Re} \eta > -1/2$, $\operatorname{Re} \nu > -1/2 + \max\{0, \mp m\}$, существует и известна полисвертка $(f_\eta *^\alpha g_\mu)_\nu$, функция $H(x) = x^\alpha H_\eta[f](x) H_\mu[g](x)$ такова, что $\forall k = 0, 1, \dots, m$ $x^{k+1/2} H(x) \in L(0, \infty)$. Тогда существуют полисвертки

$$(f_\eta *^{\alpha+m} g_\mu)_{\nu \pm m} = (\pm 1)^m N_{m,\mp\nu+m} (f_\eta *^\alpha g_\mu)_\nu.$$

При $m = 2n$

$$(f_\eta *^{\alpha+2n} g_\mu)_\nu = (-1)^n S_{n,\nu} (f_\eta *^\alpha g_\mu)_\nu.$$

Доказательство лемм 1 и 2 основывается на дифференциальных свойствах преобразования Ханкеля, представленных в [16].

Пользуясь данными леммами, полисвертки (17) можно сконструировать различным образом в зависимости от класса функций, которому принадлежат $f(t)$ и $g(t)$.

Следующие теоремы демонстрируют один из возможных способов построения указанных полисверток.

ТЕОРЕМА 3. Пусть

$$\sqrt{t} f(t), \sqrt{t} N_{m, \mp \mu} g(t) \in L(0, \infty), \quad \operatorname{Re} \nu > \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re} \mu > \frac{2 \operatorname{Re} \nu - 3}{4} + \max\{0, \mp m\}$$

и $\forall k = 1, \dots, m \quad N_{m-k, \mp \mu-k} g(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\rho$. Тогда существуют полисвертки

$$(f_\mu^{-\nu+m} * g_{\mu \pm m})_\nu = (\pm 1)^m (f_\mu^{-\nu} * N_{m, \mp \mu} g_\mu)_\nu.$$

Также нетрудно показать, что при выполнении условий теоремы 3 функция

$$H(x) = x^{-\nu+m+1/2} H_\mu[f](x) H_{\mu \pm m}[g](x)$$

принадлежит классу $L(0, \infty)$. Если дополнительно потребовать, чтобы $x^{k+1/2} H(x) \in L(0, \infty) \quad \forall k = 0, 1, \dots, 2l$, то существуют полисвертки

$$(f_\mu^{-\nu+m+2l} * g_{\mu \pm m})_\nu = (-1)^l S_{l, \nu} (f_\mu^{-\nu+m} * g_{\mu \pm m})_\nu.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть

$$\sqrt{t} f(t), \sqrt{t} N_{m, \mp \mu} g(t) \in L(0, \infty), \quad \operatorname{Re} \nu > \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re} \mu > \operatorname{Re} \nu - 1 + \max\{0, \mp m\}$$

и $\forall k = 1, \dots, m \quad N_{m-k, \mp \mu-k} g(t) \in C_\lambda(0, \infty)_\rho$. Тогда функция

$$H(x) = x^{-\nu+m+1/2} H_\nu[f](x) H_{\mu \pm m}[g](x)$$

принадлежит классу $L(0, \infty)$ и

$$(f_\nu^{-\nu+m} * g_{\mu \pm m})_\mu = (\pm 1)^m (f_\nu^{-\nu} * N_{m, \mp \mu} g_\mu)_\mu.$$

Если, кроме этого, $x^{k+1/2} H(x) \in L(0, \infty)$, $k = 0, 1, \dots, l$, то существует полисвертка

$$(f_\nu^{-\nu+m+2l} * g_{\mu \pm m})_\mu = (-1)^l S_{l, \mu} (f_\nu^{-\nu+m} * g_{\mu \pm m})_\mu.$$

При доказательстве теорем 3 и 4 следует воспользоваться теоремами 1, 2 и леммами 1, 2 данной статьи.

Явный вид полисверток (17) здесь не приводится вследствие громоздкости соответствующих выражений.

Построенные в данной статье конструкции, позволяют решать уравнения и системы уравнений, содержащих полисвертки преобразования Ханкеля.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955.
- [2] Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 1971.
- [3] Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Изд-во АН СССР, 1967.
- [4] Какичев В. А. Полисвертки. Определения, примеры, сверточные уравнения. Конспект лекций. Таганрог: ТРТУ, 1997.
- [5] Какичев В. А. О свертках для интегральных преобразований // Изв. АН БССР. Сер. физ. -матем. 1967. № 2. С. 48–57.
- [6] Vu Kim Tuan, Megumi Saigo. Convolutions of Hankel transform and its application to an integral involving Bessel function of first kind // J. Math. Math. Sci. 1995. V. 18. № 2. P. 545–550.
- [7] Nguyen Xuan Thao, Nguyen Thanh Xai. Convolution for Integral Transforms and their Applications. Moscow: Computer Center of the Russian Academy of Sciences, 1997.
- [8] Якубович С. Б., Мошинский О. Н. Интегральные уравнения и свертки, связанные с преобразованиями типа Конторовича–Лебедева // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 7. С. 1272–1284.
- [9] Князев П. Н. Интегральные преобразования. Минск: Высшейш. школа, 1969.
- [10] Житомирский Я. И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя // Матем. сб. 1955. Т. 36. № 2. С. 299–310.
- [11] Какичев В. А., Бритвина Л. Е. О свертках для преобразования Ханкеля // Тезисы докладов международной научно-практич. конференции “Математические методы в образовании, науке и промышленности”. Тирасполь: РИО ПГУ, 1999. С. 35–36.
- [12] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.
- [13] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1966.
- [14] Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.: ОГИЗ, 1948.
- [15] Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977.
- [16] Бритвина Л. Е. Полисвертки преобразования Ханкеля и дифференциальные операторы // Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 3. С. 1–3.