Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Набиев, Кратность и взаимное расположение собственных значений квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 3, 369–381

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm850>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 14:03:06

УДК 517.9

КРАТНОСТЬ И ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

И. М. Набиев

В работе даны критерии кратности и установлен порядок расположения собственных значений краевых задач, порожденных некоторым дифференциальным уравнением второго порядка и регулярными неразделенными граничными условиями.

Библиография: 12 названий.

Введение. Рассмотрим краевую задачу, порожденную на отрезке $[0, \pi]$ дифференциальным уравнением

$$y'' + (\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x))y = 0 \quad (1)$$

и двумя ($i = 1, 2$) общими граничными условиями

$$a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0) + a_{i3}y(\pi) + a_{i4}y'(\pi) = 0, \quad (2)$$

где $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$, $q(x) \in L_2[0, \pi]$ – вещественные функции, a_{ik} – произвольные комплексные числа. Через $W_2^n[0, \pi]$ мы обозначаем пространство С. Л. Соболева, состоящее из заданных на отрезке $[0, \pi]$ комплекснозначных функций, которые имеют $n - 1$ абсолютно непрерывных производных и производную n -го порядка, суммируемую с квадратом на $[0, \pi]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Комплексное число λ_0 называется *собственным значением* краевой задачи (1), (2), если уравнение (1) при $\lambda = \lambda_0$ имеет нетривиальное решение $y_0(x)$, удовлетворяющее граничным условиям (2); при этом $y_0(x)$ называется *собственной функцией* задачи (1), (2), соответствующей собственному значению λ_0 . Число линейно независимых решений задачи (1), (2) при данном собственном значении λ_0 называется *кратностью* собственного значения λ_0 .

Из класса регулярных неразделенных граничных условий выделим следующие два важных типа:

$$y(0) + \omega y(\pi) = 0, \quad \bar{\omega}y'(0) + \alpha y(\pi) + y'(\pi) = 0 \quad (3)$$

и

$$\beta y(0) + y'(0) + \omega y(\pi) = 0, \quad -\bar{\omega}y(0) + \gamma y(\pi) + y'(\pi) = 0, \quad (4)$$

где α, β, γ – произвольные вещественные числа, а $\omega \neq 0$ – произвольное комплексное число. Краевую задачу (1)–(3) будем обозначать через (p, ω, α) , а задачу (1)–(4) через $(p, \omega, \beta, \gamma)$.

Известно [1]–[3], что в случае разделенных граничных условий (т.е. при $\omega = 0$) собственные значения рассматриваемых краевых задач простые (т.е. каждому собственному значению соответствует единственная с точностью до постоянного множителя собственная функция). Кроме того, в этом случае собственные значения двух краевых задач с различными граничными условиями перемежаются.

Заметим, что в случае, когда $\alpha = 0$, $\omega = \mp 1$, условия (3) соответствуют периодической и антипериодической краевым задачам. Для этих задач кратность и взаимное расположение собственных значений исследованы в [4], [5] (при $p(x) \equiv 0$) и в [6] (при $p(x) \not\equiv 0$).

В статьях [7]–[11] установлен порядок расположения собственных значений пар сопряженных краевых задач, порожденных уравнением Штурма–Лиувилля и различными видами неразделенных граничных условий (см. также [12]).

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия для кратности собственных значений краевых задач (p, ω, α) , $(p, \omega, \beta, \gamma)$ и доказаны теоремы о взаимном расположении собственных значений пар краевых задач (p, ω, α_1) , (p, ω, α_2) и $(p, \omega, \beta_1, \gamma)$, $(p, \omega, \beta_2, \gamma)$, где $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\beta_1 \neq \beta_2$.

Работа состоит из пяти пунктов. В п. 1 изложены простейшие спектральные свойства задачи (p, ω, α) . Критерий кратности собственных значений этой задачи приведен в п. 2. Далее, п. 3 посвящен связи условия кратности собственных значений с нулями характеристической функции. Теорема о взаимном расположении собственных значений задач (p, ω, α_1) и (p, ω, α_2) доказана в п. 4. Наконец, в п. 5 приведены результаты, относящиеся к задаче $(p, \omega, \beta, \gamma)$. Основными результатами данной работы являются теоремы 2.1, 3.1, 4.1, 5.1 и 5.2, которые играют важную роль при решении различных вариантов обратных задач спектрального анализа для уравнения (1).

В дальнейшем для краткости будем говорить, что выполняется условие (А) (соответственно условие (В)), если для всех функций $y(x) \in W_2^2[0, \pi]$, $y(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющих условиям (3) (соответственно (4)), выполняется неравенство

$$M + \int_0^\pi (|y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2) dx > 0, \quad (5)$$

где $M = \alpha|y(\pi)|^2$ ($M = \gamma|y(\pi)|^2 - 2 \operatorname{Re}(\omega \overline{y(0)}y(\pi)) - \beta|y(0)|^2$). Заметим, что неравенство (5) заведомо выполняется, если $\alpha \geq 0$ ($\beta \leq 0$, $\gamma \geq 0$, $|\omega| \leq \sqrt{|\beta|\gamma}$), $q(x) > 0$.

В пп. 1–4 всюду предполагается, что выполняется условие (А), а в п. 5 – условие (В).

Выражаю глубокую благодарность И. М. Гусейнову за обсуждение настоящей работы.

1. Вспомогательные предложения. Обозначим через $c(\lambda, x)$ и $s(\lambda, x)$ решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$c(\lambda, 0) = s'(\lambda, 0) = 1, \quad c'(\lambda, 0) = s(\lambda, 0) = 0. \quad (1.1)$$

Вронскиан этих решений тождественно равен единице:

$$c(\lambda, x)s'(\lambda, x) - c'(\lambda, x)s(\lambda, x) = 1. \quad (1.2)$$

Тогда легко убедиться, что характеристической функцией краевой задачи (p, ω, α) будет

$$\Delta(\lambda) = 2 \operatorname{Re} \omega + |\omega|^2 c(\lambda, \pi) + \alpha s(\lambda, \pi) + s'(\lambda, \pi). \quad (1.3)$$

Нули этой функции являются собственными значениями задачи (p, ω, α) .

ЛЕММА 1.1. *Собственные значения краевой задачи (p, ω, α) вещественны и отличны от нуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим линейный оператор L , действующий в гильбертовом пространстве $L_2[0, \pi]$, следующим образом. Область определения $D(L)$ оператора L состоит из всех тех функций $y(x) \in W_2^2[0, \pi]$, которые удовлетворяют граничным условиям (3). При $y \in D(L)$ положим $Ly = -y'' + q(x)y$. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$(Ly, y) = \int_0^\pi Ly \cdot \overline{y(x)} dx = y'(0)\overline{y(0)} - y'(\pi)\overline{y(\pi)} + \int_0^\pi (|y'(x)|^2 + q(x)|y(x)|^2) dx.$$

Согласно граничным условиям (3) имеем

$$y'(0)\overline{y(0)} - y'(\pi)\overline{y(\pi)} = -y'(0)\overline{\omega y(\pi)} + (\overline{\omega}y'(0) + \alpha y(\pi))\overline{y(\pi)} = \alpha|y(\pi)|^2 = M.$$

Поскольку выполняется условие (A), отсюда и из (5) следует, что

$$(Ly, y) > 0. \quad (1.4)$$

Пусть λ_0 – собственное значение задачи (p, ω, α) и $y_0(x)$ – соответствующая собственная функция, нормированная условием $(y_0, y_0) = 1$. Скалярно умножая обе части равенства $y_0''(x) + (\lambda_0^2 - 2\lambda_0 p(x) - q(x))y_0(x) = 0$ на $y_0(x)$, получим $\lambda_0^2 - 2\lambda_0(p y_0, y_0) - (Ly_0, y_0) = 0$, откуда

$$\lambda_0 = (p y_0, y_0) \pm \sqrt{(p y_0, y_0)^2 + (Ly_0, y_0)}.$$

Из этого равенства в силу неравенства (1.4) и вещественности функции $p(x)$ следует утверждение леммы.

ЛЕММА 1.2. *Если $y_0(x)$ – собственная функция задачи (p, ω, α) , соответствующая собственному значению λ_0 , то*

$$\int_0^\pi (\lambda_0 - p(x))|y_0(x)|^2 dx \neq 0.$$

Более того, знак левой части этого неравенства совпадает со знаком числа λ_0 .

Доказательство этой леммы почти текстуально совпадает с доказательством леммы 3.1 работы [6], и мы его опускаем.

Аналогично случаю периодической задачи [6], можно доказать, что задача (p, ω, α) не имеет присоединенных функций к собственным функциям.

В дальнейшем точкой над функцией будем обозначать производную функции по параметру λ .

ЛЕММА 1.3. *Если $\Delta(\lambda_0) = 0$ и $s(\lambda_0, \pi) \neq 0$, то $\dot{\Delta}(\lambda_0) \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (1) и (1.1) имеем

$$\dot{c}''(\lambda, x) + (\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x))\dot{c}(\lambda, x) = 2(p(x) - \lambda)c(\lambda, x), \quad \dot{c}(\lambda, 0) = \dot{c}'(\lambda, 0) = 0,$$

откуда, применяя метод вариации произвольных постоянных, находим

$$\dot{c}(\lambda, x) = \int_0^x h(\lambda, x, t)c(\lambda, t) dt, \quad (1.5)$$

где $h(\lambda, x, t) = 2(c(\lambda, x)s(\lambda, t) - s(\lambda, x)c(\lambda, t))[\lambda - p(t)]$. Аналогично имеем

$$\dot{s}(\lambda, x) = \int_0^x h(\lambda, x, t)s(\lambda, t) dt, \quad (1.6)$$

откуда

$$\dot{s}'(\lambda, x) = \int_0^x h'_x(\lambda, x, t)s(\lambda, t) dt. \quad (1.7)$$

Для упрощения дальнейшей записи часто вместо $c(\lambda, \pi)$, $c'(\lambda, \pi)$, $s(\lambda, \pi)$, $s'(\lambda, \pi)$ будем соответственно писать c , c' , s , s' . Из (1.3) в силу (1.5)–(1.7) получаем

$$\dot{\Delta}(\lambda) = 2 \int_0^\pi ((|\omega|^2 c - \alpha s - s')c(\lambda, t)s(\lambda, t) - |\omega|^2 s c^2(\lambda, t) + (\alpha c + c')s^2(\lambda, t))(\lambda - p(t)) dt. \quad (1.8)$$

Так как $\Delta(\lambda_0) = 0$, λ_0 является собственным значением задачи (p, ω, α) . Пусть $f_0(x)$ есть соответствующая собственная функция. Легко убедиться, что

$$f_0(x) = f_0(0)c(\lambda_0, x) + f'_0(0)s(\lambda_0, x). \quad (1.9)$$

В силу этого равенства имеем

$$\begin{aligned} |f_0(x)|^2 &= f_0(x)\overline{f_0(x)} \\ &= |f_0(0)|^2 c^2(\lambda_0, x) + |f'_0(0)|^2 s^2(\lambda_0, x) + (f_0(0)\overline{f'_0(0)} + \overline{f_0(0)}f'_0(0))c(\lambda_0, x)s(\lambda_0, x). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь использована вещественность функций $c(\lambda_0, x)$ и $s(\lambda_0, x)$, вытекающая из вещественности числа λ_0 и функций $p(x)$ и $q(x)$.

Полагая в (1.9) $x = \pi$ и учитывая, что $f_0(0) = -\omega f_0(\pi)$, получим

$$f_0(0) = -\omega f_0(0)c(\lambda_0, \pi) - \omega f'_0(0)s(\lambda_0, \pi),$$

откуда

$$f'_0(0) = -\frac{1 + \omega c}{\omega s} f_0(0), \quad \overline{f'_0(0)} = -\frac{1 + \overline{\omega} c}{\overline{\omega} s} \overline{f_0(0)}.$$

Пользуясь этими равенствами и соотношениями (1.2), (1.3) и $\Delta(\lambda_0) = 0$, производя надлежащие преобразования, последовательно находим

$$|f'_0(0)|^2 = -\frac{\alpha c + c'}{|\omega|^2 s} |f_0(0)|^2, \quad f_0(0)\overline{f'_0(0)} + \overline{f_0(0)}f'_0(0) = -\frac{|\omega|^2 c - \alpha s - s'}{|\omega|^2 s} |f_0(0)|^2.$$

Поэтому из (1.10) получаем, что

$$|f_0(x)|^2 = (|\omega|^2 s c^2(\lambda_0, x) - (\alpha c + c')s^2(\lambda_0, x) - (|\omega|^2 c - \alpha s - s')c(\lambda_0, x)s(\lambda_0, x)) \frac{|f_0(0)|^2}{|\omega|^2 s}.$$

Умножая обе части этого равенства на $\lambda_0 - p(x)$, а затем интегрируя в пределах $[0, \pi]$ и принимая во внимание равенство (1.8), будем иметь

$$\int_0^\pi (\lambda_0 - p(x))|f_0(x)|^2 dx = -\frac{|f_0(0)|^2}{2|\omega|^2 s(\lambda_0, \pi)} \dot{\Delta}(\lambda_0).$$

Отсюда в силу леммы 1.2 получаем, что $\dot{\Delta}(\lambda_0) \neq 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.4. *Имеет место неравенство $\Delta(0) > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \mu y. \quad (1.11)$$

Обозначим через $\theta(\mu, x)$ и $\varphi(\mu, x)$ решения уравнения (1.11), удовлетворяющие условиям

$$\theta(\mu, 0) = \varphi'(\mu, 0) = 1, \quad \theta'(\mu, 0) = \varphi(\mu, 0) = 0.$$

Очевидно, что собственные значения краевой задачи (1.11), (3) будут совпадать с корнями уравнения

$$\Delta_0(\mu) \equiv 2 \operatorname{Re} \omega + |\omega|^2 \theta(\mu, \pi) + \alpha \varphi(\mu, \pi) + \varphi'(\mu, \pi) = 0.$$

В силу известных асимптотических формул для $\theta(\mu, \pi)$, $\varphi(\mu, \pi)$ и $\varphi'(\mu, \pi)$ (см. [1]) при $|\mu| \rightarrow +\infty$ имеет место

$$\Delta_0(\mu) \sim 2 \operatorname{Re} \omega + (1 + |\omega|^2) \cos \pi \sqrt{\mu}.$$

Отсюда следует, что $\Delta_0(\mu) \rightarrow +\infty$ при $\mu \rightarrow -\infty$. С другой стороны, неравенство (1.4) показывает, что собственные значения задачи (1.11), (3) положительны. Следовательно, $\Delta_0(\mu) > 0$ при $-\infty < \mu \leq 0$; в частности, $\Delta_0(0) > 0$. Поскольку уравнения (1) и (1.11) совпадают при $\lambda = \mu = 0$, то $c(0, x) \equiv \theta(0, x)$, $s(0, x) \equiv \varphi(0, x)$ и, следовательно, $\Delta(0) = \Delta_0(0) > 0$. Лемма доказана.

2. Критерий кратности собственных значений. В отличие от задач для уравнения (1) при разделенных граничных условиях в задачах вида (p, ω, α) собственные значения могут оказаться двукратными.

ТЕОРЕМА 2.1. *Число λ_0 является двукратным собственным значением краевой задачи (p, ω, α) тогда и только тогда, когда число ω вещественно и отлично от нуля и выполняются равенства*

$$s(\lambda_0, \pi) = \alpha c(\lambda_0, \pi) + c'(\lambda_0, \pi) = 0. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ_0 является двукратным собственным значением задачи (p, ω, α) . Тогда при этом значении λ_0 существуют два линейно независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (1), удовлетворяющих граничным условиям (3). Всякое другое решение уравнения (1) как линейная комбинация решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ также будет удовлетворять граничным условиям (3). В частности, это верно для решений $c(\lambda_0, x)$ и $s(\lambda_0, x)$. Поэтому в силу (3) и (1.1) получаем

$$\begin{aligned} 1 + \omega c(\lambda_0, \pi) &= 0, \\ \alpha c(\lambda_0, \pi) + c'(\lambda_0, \pi) &= s(\lambda_0, \pi) = 0, \quad \bar{\omega} + \alpha s(\lambda_0, \pi) + s'(\lambda_0, \pi) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Следовательно, выполняются условия (2.1). Поскольку при вещественных λ функция $c(\lambda, \pi)$ принимает вещественные значения, из равенства (2.2) следует вещественность и отличность от нуля числа ω .

Наоборот, пусть ω – вещественное число, $\omega \neq 0$ и для собственного значения λ_0 задачи (p, ω, α) выполняются равенства (2.1). Докажем, что тогда λ_0 является двукратным собственным значением. Действительно, из тождества (1.2) в силу (2.1) находим, что

$$c(\lambda_0, \pi) s'(\lambda_0, \pi) = 1. \quad (2.3)$$

С другой стороны, из равенства $\Delta(\lambda_0) = 0$ ввиду (1.3), (2.1) и вещественности ω получаем

$$2\omega + \omega^2 c(\lambda_0, \pi) + s'(\lambda_0, \pi) = 0, \quad (2.4)$$

откуда, принимая во внимание (2.3), имеем

$$2\omega + \frac{\omega^2}{s'(\lambda_0, \pi)} + s'(\lambda_0, \pi) = 0$$

или $(s'(\lambda_0, \pi) + \omega)^2 = 0$, т.е.

$$s'(\lambda_0, \pi) + \omega = 0. \quad (2.5)$$

Подставляя в равенство (2.4) $s'(\lambda_0, \pi) = -\omega$, получим

$$\omega c(\lambda_0, \pi) + 1 = 0. \quad (2.6)$$

Равенства (1.1), (2.1), (2.5) и (2.6) показывают, что решения $c(\lambda_0, x)$ и $s(\lambda_0, x)$ уравнения (1) удовлетворяют граничным условиям (3) и поэтому являются собственными функциями задачи (p, ω, α) . Кроме того, эти решения линейно независимы. Следовательно, λ_0 есть двукратное собственное значение задачи (p, ω, α) . Теорема доказана.

3. Кратность нулей характеристической функции. В этом пункте покажем, как условие кратности собственного значения задачи (p, ω, α) связано с нулями характеристической функции $\Delta(\lambda)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Для кратности нуля λ_0 характеристической функции (1.3) задачи (p, ω, α) необходимо и достаточно выполнение условия кратности собственного значения λ_0 , т.е. вещественность и отличность от нуля числа ω и справедливость равенств (2.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть число λ_0 является кратным нулем функции (1.3), т.е. $\Delta(\lambda_0) = \dot{\Delta}(\lambda_0) = 0$. Докажем, что тогда число ω вещественно, $\omega \neq 0$ и выполняются равенства (2.1).

Если $s(\lambda_0, \pi) \neq 0$, то в силу леммы 1.3 имеем $\dot{\Delta}(\lambda_0) \neq 0$, что противоречит нашему условию. Следовательно, $s(\lambda_0, \pi) = 0$. Учитывая это равенство, из тождества (1.2) получаем соотношение (2.3), а из $\Delta(\lambda_0) = 0$ согласно формуле (1.3) – равенство $2 \operatorname{Re} \omega + |\omega|^2 c(\lambda_0, \pi) + s'(\lambda_0, \pi) = 0$. Подставляя в последнее равенство значение $c(\lambda, \pi)$, найденное из (2.3), приходим к равенству

$$(s'(\lambda_0, \pi) + 2 \operatorname{Re} \omega)^2 + (\operatorname{Im} \omega)^2 = 0,$$

из которого следует, что $s'(\lambda_0, \pi) + 2 \operatorname{Re} \omega = 0$, $\operatorname{Im} \omega = 0$. Так как $s'(\lambda_0, \pi) \neq 0$ (это видно из (2.3)), в силу последних двух равенств заключаем, что число ω вещественно,

$\omega \neq 0$ и $s'(\lambda_0, \pi) = -\omega$. Значит, $\omega^2 c - \alpha s - s' = 0$ и поскольку $s(\lambda_0, \pi) = 0, \dot{\Delta}(\lambda_0) = 0$, то из формулы (1.8) имеем

$$(\alpha c + c') \int_0^\pi s^2(\lambda_0, t)(\lambda_0 - p(t)) dt = 0. \quad (3.1)$$

Далее, легко видеть, что $s(\lambda_0, x)$ есть собственная функция задачи (p, ω, α) . Тогда в силу леммы 1.2 выполняется неравенство

$$\int_0^\pi s^2(\lambda_0, t)(\lambda_0 - p(t)) dt \neq 0.$$

Поэтому из (3.1) получаем, что $\alpha c(\lambda_0, \pi) + c'(\lambda_0, \pi) = 0$.

Достаточность. Пусть $\Delta(\lambda_0) = 0$, число ω вещественно, $\omega \neq 0$ и выполняются равенства (2.1). Докажем, что $\dot{\Delta}(\lambda_0) = 0$. Легко показать, что имеет место равенство (2.3). Так как ω – вещественное число, то $\Delta(\lambda_0) = 2\omega + \omega^2 c(\lambda_0, \pi) + s'(\lambda_0, \pi) = 0$. Отсюда

$$s'(\lambda_0, \pi) = -2\omega - \omega^2 c(\lambda_0, \pi). \quad (3.2)$$

Подставляя это значение $s'(\lambda_0, \pi)$ в (2.3), получим $(\omega c(\lambda_0, \pi) + 1)^2 = 0$ и, следовательно, $\omega c(\lambda_0, \pi) + 1 = 0$. Поэтому из (3.2) следует, что $s'(\lambda_0, \pi) = -\omega$. Согласно последним двум равенствам и (2.1) имеем $\omega^2 c(\lambda_0, \pi) - \alpha s(\lambda_0, \pi) - s'(\lambda_0, \pi) = 0$. В силу этого равенства и (2.1) из (1.8) получаем требуемое равенство. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3.2. Если $\Delta(\lambda_0) = \dot{\Delta}(\lambda_0) = 0$, то $\ddot{\Delta}(\lambda_0) \neq 0$, т.е. функция $\Delta(\lambda)$ не может иметь нулей выше второго порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях этой теоремы в предыдущей теореме показали, что при $\lambda = \lambda_0$ справедливы равенства

$$\omega^2 c - \alpha s - s' = \alpha c + c' = s = 0, \quad (3.3)$$

где число ω вещественно и отлично от нуля. Дифференцируя (1.8) по λ , затем полагая $\lambda = \lambda_0$ и учитывая (3.3), получим

$$\ddot{\Delta}(\lambda_0) = 2 \int_0^\pi ((\omega^2 - \alpha \dot{s} - \dot{s}')c(\lambda_0, t)s(\lambda_0, t) - \omega^2 \dot{s}c^2(\lambda_0, t) + (\alpha \dot{c} + \dot{c}')s^2(\lambda_0, t))[\lambda_0 - p(t)] dt.$$

Далее, используя (1.5)–(1.7) и принимая во внимание (3.3), после несложных преобразований придем к формуле

$$\begin{aligned} \ddot{\Delta}(\lambda_0) = & -8\omega \left\{ \left(\int_0^\pi c(\lambda_0, t)s(\lambda_0, t)[\lambda_0 - p(t)] dt \right)^2 \right. \\ & \left. - \int_0^\pi s^2(\lambda_0, t)(\lambda_0 - p(t)) dt \int_0^\pi c^2(\lambda_0, t)(\lambda_0 - p(t)) dt \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Несложно установить, что при любом вещественном m функция $f(x) = s(\lambda_0, x) + mc(\lambda_0, x)$ является собственной функцией задачи (p, ω, α) , соответствующей собственному значению λ_0 . Поэтому в силу леммы 1.3

$$\int_0^\pi f^2(x)(\lambda_0 - p(x)) dx \neq 0,$$

т.е.

$$m^2 \int_0^\pi c^2(\lambda_0, x)(\lambda_0 - p(x)) dx + 2m \int_0^\pi s(\lambda_0, x)c(\lambda_0, x)(\lambda_0 - p(x)) dx + \int_0^\pi s^2(\lambda_0, x)(\lambda_0 - p(x)) dx \neq 0.$$

Мы видим, что стоящий слева квадратный трехчлен относительно m принимает лишь ненулевые значения. Поэтому он не может иметь вещественных корней. Следовательно, его дискриминант должен быть отрицательным:

$$\left(\int_0^\pi s(\lambda_0, x)c(\lambda_0, x)(\lambda_0 - p(x)) dx \right)^2 - \left(\int_0^\pi c^2(\lambda_0, x)(\lambda_0 - p(x)) dx \right) \left(\int_0^\pi s^2(\lambda_0, x)(\lambda_0 - p(x)) dx \right) < 0. \quad (3.5)$$

Так как $\omega \neq 0$, из (3.4) и (3.5) следует, что $\ddot{\Delta}(\lambda_0) \neq 0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Нуль λ_0 функции $\Delta(\lambda)$ является двукратным тогда и только тогда, когда $\Delta(\lambda)$ имеет в точке $\lambda = \lambda_0$ экстремум, а именно, максимум при $\omega < 0$, минимум при $\omega > 0$.

Справедливость этого утверждения вытекает из (3.4), (3.5) и достаточного условия экстремума.

4. Взаимное расположение собственных значений. В этом пункте устанавливается правило расположения собственных значений двух краевых задач (p, ω, α_1) и (p, ω, α_2) , где $\alpha_1 < \alpha_2$. На протяжении всего этого пункта будем считать, что j принимает значения 1 и 2.

Очевидно, что собственные значения краевой задачи (p, ω, α_j) будут совпадать с корнями уравнения $\Delta_j(\lambda) = 0$, где

$$\Delta_j(\lambda) = 2 \operatorname{Re} \omega + |\omega|^2 c(\lambda, \pi) + \alpha_j s(\lambda, \pi) + s'(\lambda, \pi). \quad (4.1)$$

Используя асимптотические формулы для $c(\lambda, \pi)$, $s(\lambda, \pi)$, $s'(\lambda, \pi)$ [6] и теорему Руше, стандартным приемом легко установить, что задача (p, ω, α_j) имеет счетное число собственных значений. В отличие от задач Штурма–Лиувилля собственные значения задачи (p, ω, α_j) , перемещаясь, распространяются в обе стороны до бесконечности. Обозначим (с учетом кратности) отрицательные собственные значения задачи (p, ω, α_j) в порядке их невозрастания через $\mu_0^-(j)$, $\mu_{-1}^+(j)$, $\mu_{-1}^-(j)$, $\mu_{-2}^+(j)$, $\mu_{-2}^-(j)$, ..., а положительные собственные значения в порядке их неубывания через $\mu_0^+(j)$, $\mu_1^-(j)$, $\mu_1^+(j)$, $\mu_2^-(j)$, $\mu_2^+(j)$, ...

ТЕОРЕМА 4.1. Расположение собственных значений $\mu_k^\pm(1)$ и $\mu_k^\pm(2)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) краевых задач (p, ω, α_1) и (p, ω, α_2) , у которых $\alpha_1 < \alpha_2$, при $\operatorname{Im} \omega \neq 0$ определяется неравенствами

$$0 < \mu_0^+(1) < \mu_0^+(2) < \mu_1^-(1) < \mu_1^-(2) < \mu_1^+(1) < \mu_1^+(2) < \mu_2^-(1) < \mu_2^-(2) < \dots, \\ 0 > \mu_0^-(1) > \mu_0^-(2) > \mu_{-1}^+(1) > \mu_{-1}^+(2) > \mu_{-1}^-(1) > \mu_{-1}^-(2) > \mu_{-2}^+(1) > \mu_{-2}^+(2) > \dots, \quad (4.2)$$

при вещественном $\omega < 0$ неравенствами

$$\begin{aligned} 0 < \mu_0^+(1) < \mu_0^+(2) < \mu_1^-(1) \leq \mu_1^-(2) \leq \mu_1^+(1) \leq \mu_1^+(2) < \mu_2^-(1) \leq \mu_2^-(2) \leq \dots, \\ 0 > \mu_0^-(1) > \mu_0^-(2) > \mu_{-1}^+(1) \geq \mu_{-1}^+(2) \geq \mu_{-1}^-(1) \geq \mu_{-1}^-(2) > \mu_{-2}^+(1) \geq \mu_{-2}^+(2) \geq \dots, \end{aligned} \quad (4.3)$$

а при $\omega > 0$ неравенствами

$$\begin{aligned} 0 < \mu_0^+(1) \leq \mu_0^+(2) \leq \mu_1^-(1) \leq \mu_1^-(2) < \mu_1^+(1) \leq \mu_1^+(2) \leq \mu_2^-(1) \leq \mu_2^-(2) < \dots, \\ 0 > \mu_0^-(1) \geq \mu_0^-(2) \geq \mu_{-1}^+(1) \geq \mu_{-1}^+(2) > \mu_{-1}^-(1) \geq \mu_{-1}^-(2) \geq \mu_{-2}^+(1) \geq \mu_{-2}^+(2) > \dots, \end{aligned} \quad (4.4)$$

причем двукратное собственное значение одной из задач (p, ω, α_1) , (p, ω, α_2) , является простым собственным значением другой задачи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $z(\lambda, x)$ решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$z(\lambda, 0) = -\omega s(\lambda, \pi), \quad z'(\lambda, 0) = 1 + \omega c(\lambda, \pi). \quad (4.5)$$

Легко убедиться, что это решение выражается через $c(\lambda, x)$ и $s(\lambda, x)$ следующим образом:

$$z(\lambda, x) = (1 + \omega c(\lambda, \pi))s(\lambda, x) - \omega s(\lambda, \pi)c(\lambda, x). \quad (4.6)$$

Очевидно, что

$$z(\lambda, \pi) = s(\lambda, \pi), \quad z'(\lambda, \pi) = \omega + s'(\lambda, \pi). \quad (4.7)$$

Дифференцируя по λ равенство

$$z''(\lambda, x) + (\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x))z(\lambda, x) = 0, \quad (4.8)$$

а затем переходя к комплексно сопряженному в полученном равенстве, при вещественном λ будем иметь

$$\overline{z''(\lambda, x)} + 2(\lambda - p(x))\overline{z(\lambda, x)} + (\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x))\overline{z(\lambda, x)} = 0.$$

Далее, умножая это равенство на $z(\lambda, x)$, а соотношение (4.8) на $\overline{z(\lambda, x)}$, вычитая второй результат из первого, а затем интегрируя по x в пределах $[0, \pi]$, в силу (4.5), (4.7) и вещественности функций $c(\lambda, \pi)$, $s(\lambda, \pi)$ и $s'(\lambda, \pi)$ получим

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\pi (\lambda - p(x))|z(\lambda, x)|^2 dx \\ = \overline{\dot{z}(\lambda, \pi)}\dot{z}'(\lambda, \pi) - z(\lambda, \pi)\overline{\dot{z}'(\lambda, \pi)} - \overline{\dot{z}(\lambda, 0)}\dot{z}'(\lambda, 0) + z(\lambda, 0)\overline{\dot{z}'(\lambda, 0)} \\ = \dot{s}(\lambda, \pi)(2 \operatorname{Re} \omega + |\omega|^2 c(\lambda, \pi) + s'(\lambda, \pi)) - s(\lambda, \pi)(|\omega|^2 \dot{c}(\lambda, \pi) + \dot{s}(\lambda, \pi)). \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом равенств

$$\begin{aligned} s(\lambda, \pi) &= \frac{\Delta_2(\lambda) - \Delta_1(\lambda)}{\alpha_2 - \alpha_1}, \\ 2 \operatorname{Re} \omega + |\omega|^2 c(\lambda, \pi) + s'(\lambda, \pi) &= \frac{\alpha_2 \Delta_1(\lambda) - \alpha_1 \Delta_2(\lambda)}{\alpha_2 - \alpha_1}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

вытекающих из (4.1), находим, что

$$\Delta_1(\lambda)\dot{\Delta}_2(\lambda) - \dot{\Delta}_1(\lambda)\Delta_2(\lambda) = 2(\alpha_2 - \alpha_1) \int_0^\pi (\lambda - p(x))|z(\lambda, x)|^2 dx. \quad (4.10)$$

Теперь рассмотрим случаи $\operatorname{Im} \omega \neq 0$ и $\operatorname{Im} \omega = 0$ в отдельности.

а) Пусть ω – невещественное число (т.е. $\operatorname{Im} \omega \neq 0$). Тогда легко убедиться, что $z(\mu_k^\pm(j), x)$ является собственной функцией задачи (p, ω, α_j) . Поэтому из (4.10) в силу леммы 1.2 вытекает, что функции $\Delta_1(\lambda)$ и $\Delta_2(\lambda)$ имеют только простые нули и не имеют общих нулей. Полагая в (4.10) $\lambda = \mu_k^\pm(2)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и принимая во внимание, что $\Delta_2(\mu_k^\pm(2)) = 0$, получим

$$\Delta_1(\mu_k^\pm(2))\dot{\Delta}_2(\mu_k^\pm(2)) = 2(\alpha_2 - \alpha_1) \int_0^\pi (\mu_k^\pm(2) - p(x))|z(\mu_k^\pm(2), x)|^2 dx.$$

Отсюда в силу леммы 1.2 следует, что

$$\begin{aligned} \Delta_1(\mu_k^\pm(2))\dot{\Delta}_2(\mu_k^\pm(2)) &> 0 && \text{при } \mu_k^\pm(2) > 0, \\ \Delta_1(\mu_k^\pm(2))\dot{\Delta}_2(\mu_k^\pm(2)) &< 0 && \text{при } \mu_k^\pm(2) < 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{sign} \Delta_1(\mu_k^\pm(2)) &= \operatorname{sign} \dot{\Delta}_2(\mu_k^\pm(2)) && \text{при } \mu_k^\pm(2) > 0, \\ \operatorname{sign} \Delta_1(\mu_k^\pm(2)) &= -\operatorname{sign} \dot{\Delta}_2(\mu_k^\pm(2)) && \text{при } \mu_k^\pm(2) < 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Так как функция $\Delta_2(\lambda)$ имеет только простые нули и эти нули отличны от нуля (согласно лемме 1.1), то

$$\dots < \mu_{-1}^-(2) < \mu_{-1}^+(2) < \mu_0^-(2) < 0 < \mu_0^+(2) < \mu_1^-(2) < \mu_1^+(2) < \dots.$$

Кроме того, в силу леммы 1.4 имеет место неравенство $\Delta_2(0) > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_2(\mu_0^+(2)) &< 0, \quad \dot{\Delta}_2(\mu_1^-(2)) > 0, \quad \dot{\Delta}_2(\mu_1^+(2)) < 0, \quad \dots, \\ \dot{\Delta}_2(\mu_0^-(2)) &> 0, \quad \dot{\Delta}_2(\mu_{-1}^+(2)) < 0, \quad \dot{\Delta}_2(\mu_{-1}^-(2)) > 0, \quad \dots. \end{aligned}$$

Тогда из (4.11) получаем, что

$$\begin{aligned} \Delta_1(\mu_0^+(2)) &< 0, \quad \Delta_1(\mu_1^-(2)) > 0, \quad \Delta_1(\mu_1^+(2)) < 0, \quad \dots, \\ \Delta_1(\mu_0^-(2)) &< 0, \quad \Delta_1(\mu_{-1}^+(2)) > 0, \quad \Delta_1(\mu_{-1}^-(2)) < 0, \quad \dots. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Поскольку функция $\Delta_1(\lambda)$ непрерывна и в силу леммы 1.4 $\Delta_1(0) > 0$, из неравенств (4.12) следует, что в интервале $(\mu_0^-(2), \mu_0^+(2))$ лежат по крайней мере два нуля разного знака, а в каждом интервале

$$\dots, (\mu_{-1}^-(2), \mu_{-1}^+(2)), (\mu_{-1}^+(2), \mu_0^-(2)), (\mu_0^-(2), \mu_0^+(2)), (\mu_0^+(2), \mu_1^-(2)), (\mu_1^-(2), \mu_1^+(2)), \dots$$

лежит хотя бы один нуль функции $\Delta_1(\lambda)$.

Далее, полагая в (4.10) $\lambda = \mu_k^\pm(1)$ и проведя аналогичные рассуждения для нулей функции $\Delta_1(\lambda)$, получаем, что между двумя последовательными отрицательными нулями, а также и между двумя последовательными положительными нулями функции $\Delta_1(\lambda)$ лежит хотя бы один нуль функции $\Delta_2(\lambda)$.

Таким образом, приходим к выводу, что функция $\Delta_1(\lambda)$ имеет между $\mu_0^-(2)$ и $\mu_0^+(2)$ ровно два нуля, причем разного знака, а между каждыми двумя остальными последовательными нулями функции $\Delta_2(\lambda)$ – ровно один нуль. Следовательно, положительные и отрицательные собственные значения краевых задач (p, ω, α_1) и (p, ω, α_2) при $\text{Im } \omega \neq 0$ перемежаются в смысле (4.2).

Отметим, что используя доказанные неравенства и формулу (4.9), можно показать, что нули λ_m ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) функции $s(\lambda, \pi)$, т.е. собственные значения краевой задачи, порожденной уравнением (1) и граничными условиями $y(0) = y(\pi) = 0$, вещественны, отличны от нуля и простые. Действительно, согласно равенству (1.2) выполнено $c(\lambda_m, \pi)s'(\lambda_m, \pi) = 1$ и поэтому

$$|\Delta_j(\lambda_m) - 2 \text{Re } \omega| = |\omega|^2 c(\lambda_m, \pi) + s'(\lambda_m, \pi)| \geq 2|\omega|,$$

откуда в силу невещественности ω имеем $\Delta_j(\lambda_m) \neq 0$. Далее, представляя функции $\Delta_1(\lambda)$ и $\Delta_2(\lambda)$ в виде бесконечного произведения с помощью их нулей и используя (4.9), (4.2), убеждаемся, что положительные и отрицательные нули функций $s(\lambda, \pi)$ и $\Delta_j(\lambda)$ перемежаются. Отсюда получаем нужное нам утверждение.

б) Пусть теперь ω – вещественное число. В этом случае согласно (4.6) и (4.9) задачи (p, ω, α_1) и (p, ω, α_2) могут иметь конечное число совпадающих, а также и двукратных собственных значений (так как при $\text{Im } \omega = 0$ может иметь место $1 + \omega c(\mu_k^\pm(j), \pi) = s(\mu_k^\pm(j), \pi) = 0$ и, следовательно, $z(\mu_k^\pm(j), x) \equiv 0$ для некоторых значений k).

Полагая в равенстве (4.10) $\lambda = \mu_p^\pm(j)$, где $\mu_p^\pm(j)$ – нуль функции $\Delta_j(\lambda)$, отличный от совпадающих простых нулей функций $\Delta_1(\lambda)$ и $\Delta_2(\lambda)$, и повторяя проведенные выше (в пункте а)) рассуждения, видим, что несовпадающие простые собственные значения задач (p, ω, α_1) и (p, ω, α_2) перемежаются.

В силу теоремы 3.1 двукратный нуль μ_0 функции $\Delta_j(\lambda)$ является корнем уравнения $s(\lambda, \pi) = 0$. Тогда согласно формуле (4.9) имеем $\Delta_{3-j}(\mu_0) = 0$. Но μ_0 есть простой нуль функции $\Delta_{3-j}(\lambda)$, ибо в противном случае ввиду (4.9) μ_0 был бы двукратным нулем функции $s(\lambda, \pi)$, что невозможно.

Таким образом, мы показали, что собственные значения задач (p, ω, α_1) и (p, ω, α_2) при $\text{Im } \omega = 0$ удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{aligned} 0 < \mu_0^+(1) \leq \mu_0^+(2) \leq \mu_1^-(1) \leq \mu_1^-(2) \leq \mu_1^+(1) \leq \mu_1^+(2) \leq \mu_2^-(1) \leq \mu_2^-(2) \leq \dots, \\ 0 > \mu_0^-(1) \geq \mu_0^-(2) \geq \mu_{-1}^+(1) \geq \mu_{-1}^+(2) \geq \mu_{-1}^-(1) \geq \mu_{-1}^-(2) \geq \mu_{-2}^+(1) \geq \mu_{-2}^+(2) \geq \dots, \end{aligned}$$

при этом двукратное собственное значение одной из указанных задач есть простое собственное значение другой задачи.

Отметим, что в зависимости от знака числа ω можно написать неравенства, более точно определяющие расположение собственных значений. С этой целью определим знак выражения $\Delta_j(\lambda) - 2\omega$ в нулях λ_m , $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, функции $s(\lambda, \pi)$. Из формулы (4.1) находим, что

$$\Delta_j(\lambda_m) - 2\omega = \frac{|\omega|^2 + s'^2(\lambda_m, \pi)}{s'(\lambda_m, \pi)}.$$

Следовательно, $\text{sign}(\Delta_j(\lambda_m) - 2\omega) = \text{sign } s'(\lambda_m, \pi)$. С другой стороны, известно, что $\text{sign } s'(\lambda_m, \pi) = (-1)^m$ (см. [2], [6]). Поэтому

$$\text{sign}(\Delta_j(\lambda_m) - 2\omega) = (-1)^m. \quad (4.13)$$

Пусть $\omega < 0$. Тогда из соотношения (4.13) видно, что при $m = 2k + 1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, имеет место $\Delta_j(\lambda_m) \neq 0$, а при $m = 2n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, может выполняться равенство $\Delta_j(\lambda_m) = 0$. Отсюда в силу того, что между каждыми двумя разными нулями (одного знака) функций $\Delta_1(\lambda)$, $\Delta_2(\lambda)$ лежит нуль функции $s(\lambda, \pi)$ и равные друг другу нули функции $\Delta_j(\lambda)$ являются корнями уравнения $s(\lambda, \pi) = 0$, следует справедливость неравенств (4.3).

В случае $\omega > 0$ ввиду (4.13) при $m = 2n$ выполняется $\Delta_j(\lambda_m) \neq 0$, а при $m = 2k + 1$ может случиться, что $\Delta_j(\lambda_m) = 0$. Поэтому имеют место неравенства (4.4). Теорема полностью доказана.

5. Результаты, относящиеся к задаче $(p, \omega, \beta, \gamma)$. Приведем формулировки утверждений, относящихся к задачам вида $(p, \omega, \beta, \gamma)$, доказательства которых по существу мало отличаются от доказательств аналогичных утверждений относительно задачи (p, ω, α) .

При выполнении условия (В) справедливы следующие утверждения.

1) *Собственные значения краевой задачи $(p, \omega, \beta, \gamma)$ вещественны и отличны от нуля. Эта задача не имеет присоединенных функций к собственным функциям.*

2) *Имеет место лемма 1.2 для задачи $(p, \omega, \beta, \gamma)$.*

3) *Если $\chi(\lambda_0) = 0$ и $s'(\lambda_0, \pi) + \gamma s(\lambda_0, \pi) = 0$, то $\dot{\chi}(\lambda_0) \neq 0$, где $\chi(\lambda) = 2 \text{Re } \omega - c'(\lambda, \pi) - \gamma c(\lambda, \pi) + |\omega|^2 s(\lambda, \pi) + \beta(s'(\lambda, \pi) + \gamma s(\lambda, \pi))$ — характеристическая функция задачи $(p, \omega, \beta, \gamma)$.*

4) *Справедливо неравенство $\chi(0) < 0$.*

ТЕОРЕМА 5.1. *Число λ_0 является двукратным собственным значением (а также двукратным нулем характеристической функции) задачи $(p, \omega, \beta, \gamma)$ тогда и только тогда, когда число ω вещественно и отлично от нуля и выполняются равенства*

$$\beta + \omega c(\lambda_0, \pi) = s'(\lambda_0, \pi) + \gamma s(\lambda_0, \pi) = 0.$$

ТЕОРЕМА 5.2. *Собственные значения $u_k(1)$ и $u_k(2)$, $k = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, краевых задач $(p, \omega, \beta_1, \gamma)$ и $(p, \omega, \beta_2, \gamma)$ ($\beta_1 < \beta_2$) при $\text{Im } \omega \neq 0$ перемежаются в следующем смысле*

$$\begin{aligned} \dots < u_{-1}(1) < u_{-1}(2) < u_{-0}(1) < u_{-0}(2) < 0 < u_{+0}(2) \\ < u_{+0}(1) < u_1(2) < u_1(1) < \dots, \end{aligned}$$

при вещественном $\omega < 0$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} 0 < u_{+0}(2) \leq u_{+0}(1) \leq u_1(2) \leq u_1(1) < u_2(2) \leq u_2(1) \leq u_3(2) \leq u_3(1) < \dots, \\ 0 > u_{-0}(2) \geq u_{-0}(1) \geq u_{-1}(2) \geq u_{-1}(1) > u_{-2}(2) \geq u_{-2}(1) \geq u_{-3}(2) \geq u_{-3}(1) > \dots, \end{aligned}$$

а при $\omega > 0$ — неравенствам

$$\begin{aligned} 0 < u_{+0}(2) < u_{+0}(1) < u_1(2) \leq u_1(1) \leq u_2(2) \leq u_2(1) < u_3(2) \leq u_3(1) \leq \dots, \\ 0 > u_{-0}(2) > u_{-0}(1) > u_{-1}(2) \geq u_{-1}(1) \geq u_{-2}(2) \geq u_{-2}(1) > u_{-3}(2) \geq u_{-3}(1) \geq \dots, \end{aligned}$$

при этом двукратное собственное значение одной из указанных задач есть простое собственное значение другой задачи.

При доказательстве этой теоремы важную роль играет решение $a(\lambda, x)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned} a(\lambda, 0) &= s'(\lambda, \pi) + \gamma s(\lambda, \pi), & a'(\lambda, 0) &= \bar{\omega} - c'(\lambda, \pi) - \gamma c(\lambda, \pi), \\ a(\lambda, x) &= (s'(\lambda, \pi) + \gamma s(\lambda, \pi))c(\lambda, x) + (\bar{\omega} - c'(\lambda, \pi) - \gamma c(\lambda, \pi))s(\lambda, x). \end{aligned}$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
- [2] Гусейнов Г. Ш. К спектральному анализу квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля // Докл. АН СССР. 1985. Т. 285. № 6. С. 1292–1296.
- [3] Гасымов М. Г., Гусейнов Г. Ш. Определение оператора диффузии по спектральным данным // Докл. АН Азерб. ССР. 1981. Т. 37. № 2. С. 19–23.
- [4] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
- [5] Левитан Б. М., Саргсян И. С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
- [6] Гусейнов Г. Ш. Спектр и разложения по собственным функциям квадратичного пучка операторов Штурма–Лиувилля с периодическими коэффициентами // Спектральная теория операторов и ее приложения. Вып. 6. Баку, 1985. С. 56–97.
- [7] Плаксина О. А. Характеристика спектра некоторых краевых задач для оператора Штурма–Лиувилля // УМН. 1981. Т. 36. № 2. С. 199–200.
- [8] Плаксина О. А. Обратные задачи спектрального анализа для оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными граничными условиями // Матем. сб. 1986. Т. 131 (173). № 1. С. 3–26.
- [9] Гусейнов И. М., Набиев И. М. Об одном классе обратных краевых задач для операторов Штурма–Лиувилля // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 7. С. 1114–1120.
- [10] Гусейнов И. М., Набиев И. М. Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными краевыми условиями // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ. -техн. и матем. наук. 1987. Т. 8. № 2. С. 22–29.
- [11] Гасымов М. Г., Гусейнов И. М., Набиев И. М. Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными самосопряженными граничными условиями // Сиб. матем. ж. 1990. Т. 31. № 6. С. 46–54.
- [12] Гусейнов И. М., Набиев И. М. Решение одного класса обратных краевых задач Штурма–Лиувилля // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 5. С. 35–48.