Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, Квадратично нормальные матрицы типа 1 и унитарные подобия между ними, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 371–379

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8500>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 09:24:35

УДК 517

Квадратично нормальные матрицы типа 1 и унитарные подобия между ними

Х. Д. Икрамов

Известно, что проверка унитарного подобия между матрицами, имеющими квадратичные минимальные многочлены, требует многократно меньшей вычислительной работы, чем использование общего критерия Шпехта–Пирси. Возможность такой экономии вычислений опирается на следующий факт: если $(n \times n)$ -матрицы A и B имеют квадратичные минимальные многочлены, то для унитарного подобия между ними необходимо и достаточно, чтобы A и B имели одинаковые собственные значения и одинаковые сингулярные числа. Показано, что этот факт справедлив и для некоторого подкласса матриц с кубическими минимальными многочленами, а именно для квадратично нормальных матриц типа 1.

Библиография: 7 названий.

1. Введение. Проверка унитарного подобия между комплексными $(n \times n)$ -матрицами A и B теоретически может быть проведена посредством классической теоремы Шпехта (см. [1; теорема 2.2.6]). Обозначим через M_n множество матриц порядка n над $\mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 1 (Шпехт). *Матрицы $A, B \in M_n$ унитарно подобны тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*) \quad (1)$$

для любого слова

$$W(s, t) = s^{m_1} t^{n_1} \dots s^{m_k} t^{n_k}, \quad m_1, n_1, \dots, m_k, n_k \geq 0, \quad (2)$$

от некоммутирующих переменных s и t .

Теорема 1 не является эффективным критерием, поскольку требует проверки бесконечного числа условий (1). Однако она была превращена в эффективный критерий в статье [2] (см. также [1; теорема 2.2.8]). Назовем число

$$m_1 + n_1 + \dots + m_k + n_k$$

длиной слова (2).

ТЕОРЕМА 2 (Пирси). *Матрицы $A, B \in M_n$ унитарно подобны тогда и только тогда, когда равенства (1) выполняются для всех слов $W(s, t)$, длина которых не превосходит $2n^2$.*

Итак, наличие или отсутствие унитарного подобия между A и B может быть проверено посредством конечного вычисления. Однако применение критерия Шпехта–Пирси к матрицам общего вида требует огромной вычислительной работы. Информация о принадлежности A и B специальным матричным классам в некоторых случаях позволяет многократно сократить эту работу. Так, для унитарного подобия *нормальных* матриц $A, B \in M_n$ необходимо и достаточно, чтобы эти матрицы имели одинаковые собственные значения. Проверка последнего условия сводится к проверке n равенств

$$\operatorname{tr}(A^i) = \operatorname{tr}(B^i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3)$$

что является впечатляющей экономией вычислительной работы по сравнению с теоремой 2.

К тематике настоящей статьи ближе случай, когда об A и B известно, что обе матрицы имеют *квадратичные* минимальные многочлены. Этот случай был рассмотрен в [3].

ТЕОРЕМА 3. *Если матрицы $A, B \in M_n$ имеют квадратичные минимальные многочлены, то для унитарного подобия между ними необходимо и достаточно, чтобы A и B имели одинаковые собственные значения и одинаковые сингулярные числа.*

Проверка условий теоремы 3 включает в себя наряду с (3) проверку n равенств

$$\operatorname{tr}(AA^*)^i = \operatorname{tr}(BB^*)^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Однако, как замечено Альпиним (см. [4]), число проверяемых следовых равенств можно сократить с $2n$ до $[n/2] + 3$.

Цель данной статьи – распространить утверждение теоремы 3 на некоторый подкласс матриц с *кубическими* минимальными многочленами. Назовем матрицу $A \in M_n$ *полиномиально нормальной степени d* , если существует унитарный многочлен $p(z)$ степени d такой, что матрица $p(A)$ нормальна, и $q(A)$ не является нормальной матрицей ни для какого многочлена $q(z)$ степени меньшей, чем d . (Это определение заимствовано из [5], [6].) В этой терминологии обычные нормальные матрицы суть полиномиально нормальные матрицы степени 1.

Нас будут интересовать полиномиально нормальные матрицы степени 2 или, короче говоря, *квадратично нормальные* матрицы. Унитарный многочлен $p(z)$ в определении такой матрицы будем называть ее *нормальным многочленом*. Мы скажем, что квадратично нормальная матрица A имеет тип k , если ранг нормальной матрицы $p(A)$ равен k . В частности, матрицы с квадратичными минимальными многочленами являются квадратично нормальными матрицами нулевого типа.

В настоящей статье мы изучаем квадратично нормальные матрицы типа 1. В п. 2 исследована структура матриц этого класса. Опираясь на это исследование, мы устанавливаем в п. 3 основной результат статьи:

ТЕОРЕМА 4. *Если $A, B \in M_n$ – квадратично нормальные матрицы типа 1, то для унитарного подобия между ними необходимо и достаточно, чтобы A и B имели одинаковые собственные значения и одинаковые сингулярные числа.*

В заключительном пункте мы обсуждаем вопрос о том, как проверить посредством конечного вычисления, является ли заданная матрица $A \in M_n$ квадратично нормальной типа 1.

2. Структура матриц. Множество квадратично нормальных $(n \times n)$ -матриц типа 1 будем обозначать символом $\mathcal{Q}\mathcal{N}_n^1$. Заметим, что это множество непусто лишь при $n \geq 3$. Пусть $A \in \mathcal{Q}\mathcal{N}_n^1$ и

$$p(z) = z^2 + \alpha z + \beta \quad (5)$$

есть нормальный многочлен матрицы A . Положим

$$B = p(A) = A^2 + \alpha A + \beta I_n. \quad (6)$$

По условию нормальная матрица B имеет ранг 1. Следовательно, B имеет ядро $\mathcal{Z}$ размерности $n - 1$ и одномерный образ $\mathcal{R}$. Последний можно рассматривать как одномерное инвариантное подпространство матрицы B , отвечающее ее единственному ненулевому собственному значению $b = \text{tr } B$.

Поскольку B есть многочлен от A , матрицы A и B перестановочны:

$$AB = BA.$$

Отсюда следует, что подпространства $\mathcal{R}$ и $\mathcal{Z}$ инвариантны относительно A .

Обозначим через A_2 сужение матрицы A на подпространство $\mathcal{Z}$. Поскольку сужение B на $\mathcal{Z}$ есть нулевая матрица, из (6) следует

$$p(A_2) = A_2^2 + \alpha A_2 + \beta I_{n-1} = 0,$$

т.е. многочлен $p(z)$ аннулирует A_2 . В действительности, как мы сейчас увидим, $p(z)$ есть минимальный многочлен этой матрицы.

Одномерное подпространство $\mathcal{R}$ является для A собственным подпространством. Пусть a – собственное значение, ассоциированное с $\mathcal{R}$. Тогда

$$b = p(a) = a^2 + \alpha a + \beta.$$

Как отмечено выше, $b \neq 0$. Если бы A_2 аннулировалась линейным многочленом $z - \lambda_0$ (т.е. была бы скалярной матрицей $\lambda_0 I_{n-1}$), то квадратный трехчлен $q(z) = (z - \lambda_0)(z - a)$ был бы минимальным многочленом для A , и A была бы квадратично нормальной матрицей нулевого типа, а не типа 1.

Условимся называть a *особенным* собственным значением матрицы A . От прочих собственных значений этой матрицы оно отличается тем, что

$$p(a) \neq 0. \quad (7)$$

Первым следствием проведенного анализа является

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Всякая матрица $A \in \mathcal{Q}\mathcal{N}_n^1$ имеет кубический минимальный многочлен.*

В самом деле, A не может быть аннулирована никаким многочленом второй степени; в то же время A аннулируется многочленом

$$r(z) = (z - a)p(z).$$

Для дальнейших выводов нам потребуется следующий результат из [7] (см. также [4]).

ТЕОРЕМА 5. Пусть $A \in M_n$ – матрица с квадратичным минимальным многочленом. Если A имеет единственное собственное значение μ , то подходящим унитарным подобием A может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} \mu & \sigma_1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} \mu & \sigma_k \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \oplus \mu \oplus \cdots \oplus \mu. \quad (8)$$

При наличии двух различных собственных значений μ и ν существует унитарное подобие, приводящее A к виду

$$\begin{pmatrix} \mu & \sigma_1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \oplus \cdots \oplus \begin{pmatrix} \mu & \sigma_k \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \oplus \lambda_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_l, \quad (9)$$

где

$$2k + l = n, \quad \lambda_j \in \{\mu, \nu\}, \quad 1 \leq j \leq l. \quad (10)$$

Числа $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ в суммах (8) и (9) отличны от нуля и могут быть выбраны положительными.

Заметим, что в прямой сумме (8) присутствует хотя бы одно слагаемое порядка 2. В противном случае A была бы скалярной матрицей μI_n . Если блоки порядка 2 отсутствуют в прямой сумме (9), то A – нормальная матрица.

Соединяя проведенный выше анализ с теоремой 5, приходим к следующему заключению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Всякая матрица $A \in \mathcal{Q}\mathcal{N}_n^1$ посредством подходящего унитарного подобия может быть преобразована в прямую сумму

$$S = a \oplus S_{n-1}. \quad (11)$$

Здесь a – особенное собственное значение, а S_{n-1} имеет вид прямой суммы (8) или (9), где числа μ и ν суть корни нормального многочлена матрицы A . В обоих случаях прямая сумма содержит хотя бы одно слагаемое порядка 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обосновании нуждается только последнее утверждение. Если допустить, что S_{n-1} – скалярная матрица, то A – матрица с квадратичным минимальным многочленом. Если же сумма (9) является диагональной матрицей, то A нормальна. В обоих случаях получаем противоречие с условием $A \in \mathcal{Q}\mathcal{N}_n^1$.

3. Доказательство теоремы 4. Необходимость условий теоремы очевидна. Докажем, что матрицы $A, B \in \mathcal{Q}\mathcal{N}_n^1$, имеющие общий список $\mathcal{E}$ собственных значений и общий список $\mathcal{S}$ сингулярных чисел, должны быть унитарно подобны. Для этого мы покажем, что форма (11), к которой каждая из матриц A и B может быть приведена унитарным подобием, однозначно определяется двумя указанными списками.

Как следует из п. 2, список $\mathcal{E}$ может содержать лишь два или три различных числа. Исследуем эти возможности по отдельности.

Если в $\mathcal{E}$ встречаются только два числа, то одно из них простое и является особенным собственным значением, а другое обязано иметь кратность $n - 1$. Обозначим эти числа соответственно a и μ . Матрица S_{n-1} должна иметь форму (8), где присутствует хотя бы один блок порядка 2, а число k таких блоков еще предстоит определить.

Заметим, что квадраты сингулярных чисел матрицы

$$\begin{pmatrix} \mu & \sigma \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \sigma > 0, \quad (12)$$

даются формулой

$$z_{1,2} = |\mu|^2 + \frac{1}{2}\{\sigma^2 \pm \sqrt{\sigma^4 + 4|\mu|^2\sigma^2}\}. \quad (13)$$

Если $\mu \neq 0$, то одно из чисел z строго больше, а другое строго меньше, чем $|\mu|^2$. Поэтому, если исключить из списка $\mathcal{S}$ число $|a|$, соответствующее особенному собственному значению, то число пар в оставшемся списке, имеющих вид

$$(\tilde{s}, \hat{s}), \quad \text{где } \tilde{s} > |\mu|, \quad \hat{s} < |\mu|,$$

указывает число k блоков 2-го порядка в матрице S_{n-1} . Теперь S_{n-1} определена полностью.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathcal{E}$ содержит три различных числа. Если лишь одно из них простое, то оно и является особенным собственным значением a . К разбору этой ситуации мы вернемся позже. Однако может случиться, что в $\mathcal{E}$ присутствуют два простых собственных значения. Одно из них – особенное собственное значение a , а другое (назовем его ν) относится к S_{n-1} и обязательно входит в клетку 2-го порядка

$$\begin{pmatrix} \mu & \sigma \\ 0 & \nu \end{pmatrix}, \quad \sigma > 0. \quad (14)$$

Спрашивается, как отличить a от ν ?

Квадраты сингулярных чисел матрицы (14) даются формулой

$$z_{1,2} = \frac{|\mu|^2 + |\nu|^2}{2} + \frac{1}{2}\{\sigma^2 \pm [(|\mu|^2 - |\nu|^2)^2 + 2(|\mu|^2 + |\nu|^2)\sigma^2 + \sigma^4]^{1/2}\}. \quad (15)$$

Если $\mu\nu \neq 0$, то одно из чисел z строго больше наибольшего из чисел $|\mu|^2$ и $|\nu|^2$, а другое строго меньше, чем $\min\{|\mu|^2, |\nu|^2\}$. Отсюда следует, что список $\mathcal{S}$ не содержит числа $|\nu|$; в то же время, он должен содержать число $|a|$. Итак, число a отличается от ν тем, что его модуль входит в $\mathcal{S}$. Сам список $\mathcal{S}$ выглядит так:

$$\mathcal{S} = \{|a|, \sqrt{z_1}, \sqrt{z_2}, |\mu|, \dots, |\mu|\}.$$

Матрица S_{n-1} в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mu & \sigma \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \oplus \mu \oplus \dots \oplus \mu. \quad (16)$$

Если $\mu = 0$, то формула (15) дает

$$z_1 = |\nu|^2 + \sigma^2, \quad z_2 = 0.$$

Следовательно,

$$\mathcal{S} = \{|a|, \sqrt{z_1}, 0, \dots, 0\}.$$

Поскольку $\sqrt{z_1} > |\nu|$, число a теперь выделяется следующим описанием: это ненулевое простое собственное значение, модуль которого входит в $\mathcal{S}$. Матрица S_{n-1} по-прежнему имеет форму (16), где $\mu = 0$.

Пусть, наконец, $\nu = 0$. Тогда из (15) получаем

$$z_1 = |\mu|^2 + \sigma^2, \quad z_2 = 0.$$

Поэтому

$$\mathcal{S} = \{|a|, \sqrt{z_1}, 0, |\mu|, \dots, |\mu|\}.$$

Описание особенного собственного значения, предложенное в предыдущем абзаце, сохраняет силу и в данном случае. Действительно, при $n = 3$ число μ также является ненулевым и простым, но его модуль не входит в $\mathcal{S}$. Если же $n \geq 4$, то μ будет кратным собственным значением. Матрица S_{n-1} имеет форму (16), где $\nu = 0$.

Нам остается исследовать случай, когда $\mathcal{E}$ содержит лишь одно простое собственное значение. Это сразу определяет a , но точную форму S_{n-1} (т.е. число k блоков 2-го порядка) еще предстоит найти. Из нашего предыдущего анализа можно извлечь такое правило для определения k : удалить $|a|$ из списка $\mathcal{S}$ и найти в оставшемся списке число пар вида

$$(\tilde{s}, \hat{s}), \quad \text{где} \quad \tilde{s} > \max\{|\mu|, |\nu|\}, \quad \hat{s} \leq \min\{|\mu|, |\nu|\}. \quad (17)$$

Если $\mu\nu \neq 0$, то в правом неравенстве знак $\leq$ следует заменить на $<$.

Количество пар типа (17) дает искомое число k . Матрица S_{n-1} теперь определена полностью.

Мы разобрали все возможные случаи и в каждом из них показали, что форма (11) однозначно восстанавливается по спискам $\mathcal{E}$ и $\mathcal{S}$. Тем самым доказана достаточность условий теоремы 4.

4. Принадлежность классу $\mathcal{Q}\mathcal{N}_n^1$. В этом пункте мы обсудим вопрос о том, как проверить принадлежность заданной матрицы $A \in M_n$ классу $\mathcal{Q}\mathcal{N}_n^1$.

ТЕОРЕМА 6. *Для всякой матрицы $A \in \mathcal{Q}\mathcal{N}_n^1$ нормальный многочлен определен единственным образом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что

$$p_1(z) = z^2 + \alpha_1 z + \beta_1 \quad \text{и} \quad p_2(z) = z^2 + \alpha_2 z + \beta_2$$

суть нормальные многочлены для A , т.е. матрицы

$$B_1 = A^2 + \alpha_1 A + \beta_1 I_n, \quad (18)$$

$$B_2 = A^2 + \alpha_2 A + \beta_2 I_n \quad (19)$$

нормальны. Вычитая (19) из (18), имеем

$$(\alpha_1 - \alpha_2)A = B_1 - B_2 + (\beta_2 - \beta_1)I_n. \quad (20)$$

Матрицы B_1 и B_2 , будучи многочленами от одной и той же матрицы A , перестановочны. Разность перестановочных нормальных матриц B_1 и B_2 также является нормальной матрицей. Но тогда нормальна и правая часть равенства (20). Если допустить, что $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то из (20) будет следовать, что сама матрица A нормальна, тогда как A лишь квадратично нормальна.

Итак, $\alpha_1 = \alpha_2$. Перепишем равенство (20) в виде

$$B_2 = B_1 + (\beta_2 - \beta_1)I_n.$$

По условию, каждая из матриц B_1 и B_2 должна иметь собственное значение нуль кратности $n - 1 \geq 2$. Однако, если это условие выполняется для B_1 и при этом $\beta_1 \neq \beta_2$, то собственным значением кратности $n - 1$ для B_2 является ненулевое число $\beta_2 - \beta_1$, а не нуль. Поэтому $\beta_1 = \beta_2$, что доказывает теорему.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если не требовать, чтобы квадратично нормальная матрица A имела определенный тип, то в выборе нормального многочлена имеется некоторая свобода. В самом деле, если матрица (6) нормальна, то для любого $\Delta \in \mathbb{C}$ нормальна и матрица

$$B + \Delta I_n = A^2 + \alpha A + (\beta + \Delta)I_n,$$

т.е., наряду с (5), нормальным является и многочлен

$$p_\Delta(z) = z^2 + \alpha z + (\beta + \Delta).$$

Однако коэффициент α и в этом случае определен единственным образом. Действительно, первая часть доказательства теоремы 6 использовала лишь нормальность матриц B_1 и B_2 . Значения их рангов были при этом несущественны.

Единственность многочлена $p(z)$ можно сохранить, отказавшись от нормальности матрицы $p(A)$, но сохранив другое требование к A , а именно, чтобы A имела кубический минимальный многочлен.

ТЕОРЕМА 7. Пусть матрица $A \in M_n$ имеет кубический минимальный многочлен. Если существует унитарный многочлен

$$p(z) = z^2 + \alpha z + \beta$$

такой, что матрица

$$B = p(A) = A^2 + \alpha A + \beta I_n \tag{21}$$

имеет ранг 1, то такой многочлен определен единственным образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть подобие

$$A \rightarrow J = Q^{-1}AQ$$

приводит A к ее жордановой форме J . Полагая

$$C = Q^{-1}BQ,$$

заменим (21) равенством

$$C = J^2 + \alpha J + \beta I_n. \tag{22}$$

Матрица A с кубическим минимальным многочленом имеет не более трех различных собственных значений. Если три различных собственных значения действительно имеются, обозначим их через λ , μ и ν . Приравнявая нулю главные миноры

порядка 2 в матрице C , убеждаемся, что, по крайней мере, для двух собственных значений, скажем, для λ и μ , должны выполняться равенства

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0, \quad (23)$$

$$\mu^2 + \alpha\mu + \beta = 0. \quad (24)$$

Таким образом, λ и μ суть корни искомого многочлена $p(z)$, откуда

$$\alpha = -(\lambda + \mu), \quad \beta = \lambda\mu.$$

Если A имеет два различных собственных значения λ и μ и по-прежнему выполнены равенства (23) и (24), то единственность α и β доказывается прежним образом. Если выполнено, например, (24), но

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta \neq 0,$$

то λ – простое собственное значение, а числу μ в жордановой форме J соответствует хотя бы одна клетка порядка 2. Для определенности предположим, что λ стоит в позиции $(1, 1)$ матрицы J , а в ее позиции $(i, i + 1)$, $i \geq 2$, находится единица. Приравнявая нулю минор 2-го порядка матрицы C , опирающийся на строки 1 и i и столбцы 1 и $i + 1$, заключаем, что $\alpha = 0$. Но тогда $\beta = -\mu^2$.

Если μ – единственное собственное значение матрицы A , то J должна содержать клетку порядка три. Пусть эта клетка располагается в строках и столбцах с индексами $i, i + 1$ и $i + 2$. Приравнявая нулю минор 2-го порядка матрицы C , опирающийся на строки i и $i + 1$ и столбцы $i + 1$ и $i + 2$, снова приходим к равенству $\alpha = 0$, откуда, как и выше, $\beta = -\mu^2$.

Опираясь на теоремы 6 и 7, можно предложить следующий способ проверки включения $A \in \mathcal{Q}\mathcal{N}_n^1$.

1. Решить относительно α и β систему квадратичных уравнений

$$f_i(\alpha, \beta) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (25)$$

записывающих условие равенства нулю всех миноров 2-го порядка матрицы (21).

2. Если система (25) несовместна или совместна, но имеет неединственное решение, то включение $A \in \mathcal{Q}\mathcal{N}_n^1$ невозможно (см. теорему 7 и предложение 1). Пусть (α_0, β_0) – единственное решение системы (25). В этом случае $A \in \mathcal{Q}\mathcal{N}_n^1$, если и только если матрица

$$B_0 = A^2 + \alpha_0 A + \beta_0 I_n$$

нормальна. Это условие можно проверить “в лоб”, сравнивая матрицы $B_0 B_0^*$ и $B_0^* B_0$, или же учесть то обстоятельство, что B_0 – матрица ранга 1. Если

$$B_0 = xy^*$$

есть представление B_0 в виде диады, то для нормальности B_0 необходимо и достаточно, чтобы векторы x и y были коллинеарны:

$$y = \gamma x, \quad \gamma \in \mathbb{C}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989.
- [2] С. Pearcy, “A complete set of unitary invariants for operators generating finite W^* -algebras of type I”, *Pacific J. Math.*, **12** (1962), 1405–1416.
- [3] A. George, Kh.D. Ikramov, “Unitary similarity of matrices with quadratic minimal polynomials”, *Linear Algebra Appl.*, **349**:1–3 (2002), 11–16.
- [4] Ю. А. Альпин, Х. Д. Икрамов, “Об унитарном подобии алгебр, порождаемых парами ортопроекторов”, *Численные методы и вопросы организации вычислений. XVIII*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **323**, ПОМИ, СПб., 2005, 5–14.
- [5] F. Kittaneh, “On the structure of polynomially normal operators”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **30**:1 (1984), 11–18.
- [6] M. Huhtanen, “Aspects of nonnormality for iterative methods”, *Linear Algebra Appl.*, **394**:1 (2005), 119–144.
- [7] Х. Д. Икрамов, “Каноническая форма Шура унитарно квазидиагонализуемой матрицы”, *ЖВМ и МФ*, **37**:12 (1997), 1411–1415.

Х. Д. Икрамов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило

10.09.2008