Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Лифанцева, Необходимые условия справедливости слабой обобщенной локализации для рядов Фурье с “лакунарной последовательностью частичных сумм”, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 408–420

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8501>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:59:31

Необходимые условия справедливости слабой обобщенной локализации для рядов Фурье с “лакунарной последовательностью частичных сумм”

О. В. Лифанцева

Ранее было установлено, что на подмножествах $\mathbb{T}^N = [-\pi, \pi]^N$, представляющих собой крест W , составленный из определенного количества N -мерных брусков $W_{x_s x_t} = \Omega_{x_s x_t} \times [-\pi, \pi]^{N-2}$ ($\Omega_{x_s x_t}$ – открытое подмножество $[-\pi, \pi]^2$), в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, при $N \geq 3$ справедлива слабая обобщенная локализация почти всюду для кратных тригонометрических рядов Фурье, когда прямоугольные частичные суммы $S_n(x; f)$ ($x \in \mathbb{T}^N$, $f \in L_p$) этих рядов имеют номер $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, в котором некоторые компоненты n_j являются элементами лакунарных последовательностей. В настоящей работе доказан ряд утверждений, показывающих, что найденные структурно-геометрические характеристики таких подмножеств являются точными в смысле числа (образующих W) N -мерных брусков $W_{x_s x_t}$, а также структуры и геометрии $W_{x_s x_t}$. В частности, доказано, что нельзя в качестве основания бруска взять произвольное измеримое двумерное множество или открытое трехмерное множество.

Библиография: 8 названий.

Введение. 1. Рассмотрим N -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, элементы которого будем обозначать $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, и положим $(nx) = n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_N x_N$.

Введем множество $\mathbb{R}_+^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с положительными координатами и множество $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами. Положим $\mathbb{Z}_+^N = \mathbb{R}_+^N \cap \mathbb{Z}^N$.

Пусть 2π -периодическая (по каждому аргументу) функция $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$, где

$$\mathbb{T}^N = \{x \in \mathbb{R}^N : -\pi \leq x_j \leq \pi, j = 1, 2, \dots, N\},$$

разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k e^{i(kx)}.$$

Рассмотрим прямоугольную частичную сумму этого ряда

$$S_n(x; f) = \sum_{|k_1| \leq n_1} \dots \sum_{|k_N| \leq n_N} c_k e^{i(kx)}, \quad (0.1)$$

где $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00669).

Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $\mu\mathfrak{A} > 0$ ($\mu = \mu_N$ – N -мерная мера Лебега), и пусть $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$.

Основной целью нашего исследования является изучение поведения на $\mathfrak{A}$ частичной суммы (0.1) при $n \rightarrow \infty$ (т.е. $\min_{1 \leq j \leq N} n_j \rightarrow \infty$) в зависимости от гладкости функции $f(x)$, от структурных и геометрических характеристик множества $\mathfrak{A}$, а также от ограничений, накладываемых на компоненты $n_1, \dots, n_N$ вектора n – номера частичной суммы $S_n(x; f)$.

2. В работах [1]–[4] Блошанским были введены следующие понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 1$, – произвольное множество положительной меры. Будем говорить, что для кратных рядов Фурье функций из класса $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p \geq 1$, справедлива на множестве $\mathfrak{A}$

- а) *обобщенная локализация почти всюду* (ОЛ), если для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f) = 0 \quad \text{почти всюду на } \mathfrak{A};$$

- б) *слабая обобщенная локализация почти всюду* (СОЛ), если существует такое подмножество $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, $\mu\mathfrak{A}_1 > 0$, что для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f) = 0 \quad \text{почти всюду на } \mathfrak{A}_1.$$

В работе [5] были найдены структурно-геометрические характеристики некоторых подмножеств $\mathbb{T}^N = [-\pi, \pi]^N$ (положительной меры), на которых в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, при $N \geq 3$ справедлива СОЛ для кратных тригонометрических рядов Фурье, когда прямоугольные частичные суммы $S_n(x; f)$ ($x \in \mathbb{T}^N$, $f \in L_p$) этих рядов имеют номер $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, в котором некоторые компоненты n_j являются элементами лакунарных последовательностей.¹

Точнее, пусть M – множество чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ и $k \in M$. Обозначим $J_k = \{j_1, \dots, j_k\}$, $j_s < j_t$ при $s < t$ и (в случае $k < N$) $M \setminus J_k = \{m_1, \dots, m_{N-k}\}$, $m_s < m_t$ при $s < t$ – непустые подмножества множества M .

Обозначим $\alpha = \alpha(J_k) = (\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k}) \in \mathbb{Z}_+^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1, \dots, k$. Символом $n^{(\alpha)} = n^{(\alpha)}[J_k] = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ будем обозначать такой N -мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j = j_s$, $s = 1, \dots, k$, являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей (для $j \in J_k$: $n_j = n_j^{(\alpha_j)}$ и $n_j^{(\alpha_j)} \rightarrow \infty$ при $\alpha_j \rightarrow \infty$).

Обозначим также через $\Omega_{x_s x_t}$, $\Omega_{x_s x_t} \subset [-\pi, \pi]^2$, произвольное открытое множество в плоскости (x_s, x_t) , $s < t$, $s, t = 1, 2, \dots, N$, и рассмотрим N -мерные бруски

$$W_{x_s x_t} = \Omega_{x_s x_t} \times [-\pi, \pi]^{N-2}. \quad (0.2)$$

Используя множества $W_{x_s x_t}$ (0.2) при $s, t \in M \setminus J_k$, $s < t$, определим (следуя работе [5]) следующий неполный N -мерный крест²

$$W = W(J_k) = \bigcup_{\substack{s, t \in M \setminus J_k \\ s < t}} W_{x_s x_t}, \quad (0.3)$$

¹Последовательность $\{n^{(s)}\}$, $n^{(s)} \in \mathbb{Z}_+^s$, называется лакунарной, если $n^{(s+1)}/n^{(s)} \geq q > 1$, $s = 1, 2, \dots$.

²Полным N -мерным крестом мы называем множество $\bigcup_{\substack{s, t=1 \\ s < t}}^N W_{x_s x_t}$ (см., например, работу [6]).

центр которого обозначим

$$W^0 = W^0(J_k) = \bigcap_{\substack{s, t \in M \setminus J_k \\ s < t}} W_{x_s x_t}. \quad (0.4)$$

В работе [5] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА А. Для любого $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N - 2$, $N \geq 3$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на W ,

$$\lim_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} S_{n(\alpha)[J_k]}(x; f) = 0 \quad \text{для почти всех } x \in W^0. \quad (0.5)$$

Результат теоремы показывает, что для кратных рядов Фурье (суммируемых по прямоугольникам) СОЛ в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, при $N \geq 3$ будет справедлива на неполном кресте из N -мерных брусков – множестве W вида (0.3), если k компонент ($1 \leq k \leq N - 2$) номера $n = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ частичной суммы $S_n(x; f)$ (0.1) будут элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей. При этом N -мерные бруски $W_{x_s x_t}$, $1 \leq s < t \leq N$, образующие указанный крест W , имеют основания $\Omega_{x_s x_t}$ в тех плоскостях (x_s, x_t) , для которых соответствующие компоненты номера $n \in \mathbb{Z}_+^N$ – компоненты n_s и n_t – являются свободными (т.е., в частности, не являются элементами никаких лакунарных последовательностей), и число таких брусков будет равно $C_{N-k}^2 = (N - k)(N - k - 1)/2$.

3. Естественно, встает вопрос о том, можно ли усилить результат теоремы А, установив при $N \geq 3$ и $1 \leq k \leq N - 2$ равенство (0.5) на всем множестве W вида (0.3), т.е. (см. данное выше определение) будет ли при $N \geq 3$ и $1 \leq k \leq N - 2$ справедлива ОЛ на множестве W ?

Ответ на поставленный вопрос зависит от размерности пространства N и числа k компонент номера частичной суммы $S_n(x; f)$, которые являются элементами лакунарных последовательностей. При $N = 3$ (в данном случае $k = 1$) такое усиление теоремы А оказывается возможным, а именно, справедливо следующее утверждение (следствие теоремы А), доказанное в [5].

УТВЕРЖДЕНИЕ В. При $N = 3$ для любого $J_1 \subset M$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на W ,

$$\lim_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_1 \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_1}} S_{n(\alpha)[J_1]}(x; f) = 0 \quad \text{для почти всех } x \in W.$$

Заметим, что (аналогично доказательству утверждения В) можно доказать, что равенство (0.5) будет выполняться на всем множестве W и для $N \geq 4$, если $k = N - 2$, точнее справедливо

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. При $N \geq 4$ для любого $J_k \subset M$, $k = N - 2$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на W ,

$$\lim_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} S_{n(\alpha)[J_k]}(x; f) = 0 \quad \text{для почти всех } x \in W.$$

Если же при $N \geq 4$ величина k меньше $N - 2$, то усилить теорему А, установив равенство (0.5) на всем W , нельзя, что показывает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $N \geq 4$ и $1 \leq k \leq N - 3$. Тогда существуют множество W вида (0.3) и функция $f \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такие, что $f(x) = 0$ на W , но

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n(\alpha)}(x; f)| = +\infty \quad \text{почти всюду на } \mathbb{T}^N \setminus W^0,$$

где множество W^0 определено формулой (0.4).

Теорема 1 ставит новый вопрос: насколько существенна при $N \geq 4$, $1 \leq k \leq N - 3$, геометрия множества W (0.3)? Следующая теорема покажет, что существенно изменить геометрию множества W нельзя.

Фиксируем произвольное a , $-\pi < a < \pi$, и обозначим

$$\gamma_2 = \max_{j \in M \setminus J_k} j, \quad \gamma_1 = \max_{j \in M \setminus (J_k \cup \{\gamma_2\})} j, \quad (0.6)$$

$$W_{x_{\gamma_1} x_{\gamma_2}}(a) = \Omega_{x_{\gamma_1} x_{\gamma_2}} \times [-\pi, \pi]^{N-3} \times [-\pi, a], \quad (0.7)$$

где сегмент $[-\pi, a]$ может принадлежать любой из осей O_{x_l} , $l \in M \setminus J_k$, $l \neq \gamma_1$, $l \neq \gamma_2$. Положим

$$W_a = \bigcup_{\substack{s, t \in M \setminus J_k \\ s < t, s \neq \gamma_1}} W_{x_s x_t} \cup W_{x_{\gamma_1} x_{\gamma_2}}(a), \quad (0.8)$$

где $W_{x_s x_t}$, $s, t \in M \setminus J_k$, $s < t$, $s \neq \gamma_1$, определены в (0.2).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $N \geq 4$, $1 \leq k \leq N - 3$. Для любого a , $-\pi < a < \pi$, существуют функция $f = f_a \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$ и множество W_a вида (0.7), (0.8) такие, что $f(x) = 0$ на W_a , но

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n(\alpha)}(x; f)| = +\infty \quad \text{почти всюду на } \mathbb{T}^N.$$

Таким образом, на кресте с меньшим, чем C_{N-k}^2 , числом брусков (как следует из теоремы 2) СОЛ справедлива не будет. В таком случае возникает следующий вопрос, нельзя ли изменить геометрию самих брусков (т.е. можно ли установить равенство (0.5) на кресте из N -мерных брусков, основаниями которых будут трехмерные множества)?

Для $N \geq 5$ и любого k , $1 \leq k \leq N - 4$, рассмотрим по аналогии с (0.2) и (0.3) множества

$$W_{x_r x_s x_t} = \Omega_{x_r x_s x_t} \times [-\pi, \pi]^{N-3}, \quad r, s, t \in M \setminus J_k, \quad r < s < t, \quad (0.9)$$

и пусть

$$W = \bigcup_{\substack{r, s, t \in M \setminus J_k \\ r < s < t}} W_{x_r x_s x_t}. \quad (0.10)$$

ТЕОРЕМА 3. Существуют функция $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, $N \geq 5$, и множество W вида (0.9), (0.10) такие, что $f(x) = 0$ на W , но

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n(\alpha)}(x; f)| = +\infty \quad \text{при всех } x \text{ внутри } \mathbb{T}^N.$$

Сформулированные выше теоремы 1–3 ставят новый вопрос: если нельзя изменить геометрию множества W (т.е. нельзя отказаться от неполного креста из брусков с числом брусков C_{N-k}^2) и нельзя изменить геометрию самих брусков при $N \geq 5$, $1 \leq k \leq N-4$, то нельзя ли усилить данный результат при $N \geq 4$, $1 \leq k \leq N-3$ и $p > 1$ уже в смысле структуры множеств $\Omega_{x_s x_t}$, входящих в множества (0.2)–(0.4), т.е. будет ли СОЛ справедлива на неполном кресте из брусков, в сечении хотя бы одного из которых лежит произвольное измеримое множество (т.е. если хотя бы одно из множеств $\Omega_{x_s x_t}$, $s, t \in M \setminus J_k$, $s < t$, считать произвольным измеримым множеством)? В настоящей работе на этот вопрос дается отрицательный ответ.

Пусть $W_{x_s x_t}$, $s < t$, $s, t \in M \setminus J_k$, $s \neq \gamma_1$, – множества вида (0.2), где $\Omega_{x_s x_t}$ – открытые множества, а $W_{x_{\gamma_1} x_{\gamma_2}}$ – измеримое множество также вида (0.2) (γ_1, γ_2 определены в (0.6)). Составим из них крест W вида (0.3), т.е.

$$W = \bigcup_{\substack{s, t \in M \setminus J_k \\ s < t, s \neq \gamma_1}} W_{x_s x_t} \cup W_{x_{\gamma_1} x_{\gamma_2}}. \quad (0.11)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $N \geq 4$, $1 \leq k \leq N-3$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют функция $f = f_\varepsilon \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ и измеримое множество W_ε вида (0.11) такие, что

- 1) $f(x) = 0$ на W_ε ;
- 2) $\mu W_\varepsilon > (2\pi)^N - \varepsilon$ ($\mu = \mu_N$ – N -мерная мера Лебега);
- 3) $\lim_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n(\alpha)}(x; f)| = +\infty$ почти всюду на $\mathbb{T}^N$.

ЗАМЕЧАНИЕ. И, наконец, если $k = 0$, т.е. все компоненты вектора $n \in \mathbb{Z}_+^N$ (номера частичной суммы $S_n(x; f)$) являются свободными, то исследование СОЛ в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p \geq 1$, $N \geq 2$, для таких рядов Фурье были проведены Блошанским (см., например, [2]–[4], [6], а также небольшой обзор в работе [5]).

В п. 1 нами доказываются теоремы 1 и 2, в п. 2 – теоремы 3 и 4.

1. Геометрия множества W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Фиксируем произвольное k , $1 \leq k \leq N-3$, $N \geq 4$. Не ограничивая общности будем считать, что $J_k = \{N-k+1, \dots, N\}$, соответственно, $M \setminus J_k = \{1, \dots, N-k\}$. Пусть $n^{(\alpha)} = n^{(\alpha)}[J_k] = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ – N -мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$ – некоторые (однократные) лакунарные последовательности $(n_j = n_j^{(\alpha_j)} \in \mathbb{Z}_+^1, n_j^{(\alpha_j)} \rightarrow \infty$ при $\alpha_j \rightarrow \infty$, $j = N-k+1, \dots, N)$.

Фиксируем произвольные a, b , $-\pi < a < b < \pi$, и в качестве неполного креста из N -мерных брусков возьмем множество

$$W = \bigcup_{\substack{s, t \in M \setminus J_k \\ s < t}} W_{x_s x_t}, \quad (1.1)$$

где

$$W_{x_s x_t} = \Omega_{x_s x_t} \times [-\pi, \pi]^{N-2} = \{(a, b) \times (a, b)\} \times [-\pi, \pi]^{N-2};$$

центром его будет множество

$$W^0 = \bigcap_{\substack{s, t \in M \setminus J_k \\ s < t}} W_{x_s x_t}. \quad (1.2)$$

Рассмотрим следующую функцию $F(x)$:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \sum_{l=2}^{N-k} F_l(x) \\
 &= \left\{ f(x_1, x_2)g(x_1, x_2)\varphi(x_3) \cdots \varphi(x_{N-k}) \right. \\
 &\quad + \sum_{l=3}^{N-k-1} f(x_1, x_l)g(x_1, x_l)\varphi(x_2) \cdots \varphi(x_{l-1})\varphi(x_{l+1}) \cdots \varphi(x_{N-k}) \\
 &\quad \left. + f(x_1, x_{N-k})g(x_1, x_{N-k})\varphi(x_3) \cdots \varphi(x_{N-k-1}) \right\} \psi(x_{N-k+1}, \dots, x_N),
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $f(x_1, x_l) \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^2)$, $l = 2, 3, \dots, N - k$, — функция Фейффермана [7], для которой двойной ряд Фурье неограниченно расходится в каждой внутренней точке $\mathbb{T}^2$, т.е.

$$\overline{\lim}_{n_1, n_l \rightarrow \infty} |S_{n_1, n_l}(x_1, x_l; f)| = +\infty \quad \text{всюду внутри } \mathbb{T}^2, \tag{1.4}$$

$$g(x_1, x_l) = \begin{cases} 0 & \text{при } (x_1, x_l) \in \Omega_{x_1 x_l} = (a, b) \times (a, b), \\ 1 & \text{при } (x_1, x_l) \in \mathbb{T}^2 \setminus \Omega_{x_1 x_l}, \end{cases} \tag{1.5}$$

$\varphi(t) \in \mathbb{C}([-\pi, \pi])$, причем

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{при } t \in (a, b) \quad \text{и} \quad \varphi(t) \neq 0 \quad \text{при } t \in [-\pi, a] \cup [b, \pi], \tag{1.6}$$

и, наконец,

$$\psi(x_{N-k+1}, \dots, x_N) \equiv 1 \quad \text{при } (x_{N-k+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{T}^k.$$

Так определенная функция $F(x) \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$. Докажем, что $F(x) = 0$ при $x \in W$. Рассмотрим произвольный брусок $W_{x_s x_t} = \Omega_{x_s x_t} \times [-\pi, \pi]^{N-2}$, $s, t \in M \setminus J_k$, $s < t$, из W (1.1) и докажем, что $F(x) = 0$ при $x \in W_{x_s x_t}$. Итак, пусть $(x_s, x_t) \in \Omega_{x_s x_t} = (a, b) \times (a, b)$, $s, t \in M \setminus J_k$, $s < t$, а $x_i \in [-\pi, \pi]$, $i = 1, \dots, N$, $i \neq s, t$.

Рассмотрим два случая: $s = 1$ и $s \neq 1$. Пусть $s = 1$, т.е. $(x_1, x_t) \in \Omega_{x_1 x_t}$, $2 \leq t \leq N - k$. Докажем, что $F(x) = 0$ при $(x_1, x_t) \in \Omega_{x_1 x_t}$. В силу (1.3) каждая функция $F_l(x)$, входящая в $F(x)$, содержит все функции $\varphi(x_i)$, $i \in E_l$, где

$$\begin{aligned}
 E_2 &= \{3, \dots, N - k\}, \\
 E_l &= \{2, \dots, l - 1, l + 1, \dots, N - k\}, \quad l = 3, \dots, N - k - 1, \\
 E_{N-k} &= \{2, \dots, N - k - 1\}.
 \end{aligned}$$

Если $l \neq t$, то $t \in E_l$ и, следовательно, $F_l = 0$ в силу равенства нулю на (a, b) функции $\varphi(x_t)$ (см. (1.6)). Если $l = t$, то $F_l = 0$ в силу равенства нулю на $\Omega_{x_1 x_t}$ функции $g(x_1, x_t)$ (см. (1.5)). Итак, в этом случае $F(x) = \sum F_l(x) = 0$ при $x \in W_{x_s x_t}$.

Пусть теперь $s \neq 1$, т.е. $2 \leq s \leq N - k - 1$. Докажем, что в этом случае $F(x) = 0$ при $(x_s, x_t) \in \Omega_{x_s x_t}$, $s, t \in M \setminus J_k$, $s < t$. Так как каждая функция $F_l(x)$, $l = 2, \dots, N - k$, содержит все функции $\varphi(x_i)$, $i \in E_l$, то $F_l(x) = 0$ в силу того, что хотя бы одно

из чисел s или t принадлежит E_l , а функции $\varphi(x_s)$, $\varphi(x_t)$ равны нулю на (a, b) . Следовательно, и в этом случае $F(x) = 0$ при $x \in W_{x_s x_t}$.

В силу произвольности выбора бруска $W_{x_s x_t}$, мы доказали, что $F(x) = 0$ при $x \in W$, где W определено в (1.1). При этом нетрудно видеть, что $F(x) \neq 0$ при $x \in \mathbb{T}^N \setminus W$.

Далее рассмотрим частичную сумму $S_{n^{(\alpha)}}(x; F)$ функции $F(x)$:

$$S_{n^{(\alpha)}}(x; F) = \sum_{l=2}^{N-k} S_{n^{(\alpha)}}(x; F_l) = \sum_{l=2}^{N-k} S_{n_1, n_l}(x_1, x_l; f_l g_l) \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq l}}^{N-k} S_{n_i}(x_i; \varphi_i), \quad (1.7)$$

где $f_l g_l = f(x_1, x_l)g(x_1, x_l)$ и $\varphi_i = \varphi(x_i)$.

Для дальнейшего доказательства нам понадобится следующая лемма.

Разобьем множество $\mathbb{T}^2$ на два произвольных измеримых множества Ω и P , $\mathbb{T}^2 = \Omega \cup P$, таких, что $\mu_2(\text{int } \Omega) = \mu_2 \Omega$ и $\mu_2(\text{int } P) = \mu_2 P$ (μ_2 – мера на плоскости).

ЛЕММА (Блошанский, [6]). Пусть $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, и пусть $\chi(x)$ удовлетворяет условию

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in P, \\ 0 & \text{при } x \in \Omega. \end{cases} \quad (1.8)$$

Тогда если

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n(x; f)| = +\infty \quad \text{п.в. на } \mathbb{T}^2, \quad (1.9)$$

то

- 1) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |S_n(x; f\chi)| = +\infty \quad \text{для п.в. } x \in P,$
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f\chi) = 0 \quad \text{для п.в. } x \in \Omega.$

Отметим сразу (с учетом леммы), что поскольку функция $g(x_1, x_l)$ (1.5) удовлетворяет условию (1.8), а функция $f(x_1, x_l)$ (1.4) – условию (1.9), то

$$\lim_{n_1, n_l \rightarrow \infty} S_{n_1, n_l}(x_1, x_l; f_l g_l) = 0 \quad \text{для п.в. } (x_1, x_l) \in \Omega_{x_1 x_l} = (a, b) \times (a, b), \quad (1.10)$$

$$\overline{\lim}_{n_1, n_l \rightarrow \infty} |S_{n_1, n_l}(x_1, x_l; f_l g_l)| = +\infty \quad \text{для п.в. } (x_1, x_l) \in \mathbb{T}^2 \setminus \Omega_{x_1 x_l}. \quad (1.11)$$

Теперь докажем, что

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n^{(\alpha)}}(x; F)| = +\infty \quad \text{для п.в. } x \in \mathbb{T}^N \setminus W^0,$$

где W^0 определено в (1.2).

Рассмотрим множество $\mathbb{T}^N \setminus W^0$. Это множество (в силу выбора W^0) обладает тем свойством, что у вектора $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{T}^N \setminus W^0$ m ($1 \leq m \leq N - k$) компонент из первых $N - k$ удовлетворяют условию $x_{\nu_i} \notin (a, b)$, $i = 1, \dots, m$ (т.е. $x_{\nu_i} \in [-\pi, a] \cup [b, \pi]$). Следовательно, множество $\mathbb{T}^N \setminus W^0$ можно разбить на множества

$$A(\nu_1, \dots, \nu_m) = \{x \in \mathbb{T}^N : x_{\nu_i} \notin (a, b), i = 1, \dots, m, x_{\nu_{m+1}}, \dots, x_{\nu_{N-k}} \in (a, b)\},$$

где $1 \leq \nu_i \leq N - k$ при $i = 1, \dots, N - k$ и $\nu_{\mu_1} \neq \nu_{\mu_2}$ при $\mu_1 \neq \mu_2$, т.е.

$$\mathbb{T}^N \setminus W^0 = \bigcup_{m=1}^{N-k} \bigcup_{\nu_1, \dots, \nu_m} A(\nu_1, \dots, \nu_m). \quad (1.12)$$

Рассмотрим два случая: $m = 1$ и $2 \leq m \leq N - k$. Пусть $m = 1$, т.е. $x \in \bigcup_{\nu_1=1}^{N-k} A(\nu_1)$. Докажем, что

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n(\alpha)}(x; F)| = +\infty \quad \text{при } x \in \bigcup_{\nu_1=1}^{N-k} A(\nu_1). \quad (1.13)$$

Разделим этот случай опять-таки на два случая: $\nu_1 = 1$ и $2 \leq \nu_1 \leq N - k$.

Пусть $2 \leq \nu_1 \leq N - k$. Тогда (с учетом (1.10)) для $l = 2, \dots, N - k$, $l \neq \nu_1$, имеем

$$\lim_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} S_{n(\alpha)}(x; F_l) = 0 \quad \text{для п.в. } x \in A(\nu_1). \quad (1.14)$$

При $l = \nu_1$ (см. (1.11)) $\overline{\lim}_{n_1, n_{\nu_1} \rightarrow \infty} |S_{n_1, n_{\nu_1}}(x_1, x_{\nu_1}; f_{\nu_1} g_{\nu_1})| = +\infty$. Так как $\varphi(t)$ – ненулевая функция, $S_{n_i}(x_i; \varphi_i)$, $i = 2, \dots, N - k$, $i \neq \nu_1$, – тригонометрические полиномы, то $S_{n_i}(x_i; \varphi_i) \neq 0$, начиная с некоторого номера и для п.в. $x \in [-\pi, \pi]$. Тогда получаем, что если n_1 и n_{ν_1} растут достаточно быстро, то частичные суммы

$$S_{n(\alpha)}(x; F_{\nu_1}) = S_{n_1, n_{\nu_1}}(x_1, x_{\nu_1}; f_{\nu_1} g_{\nu_1}) \prod_{\substack{i=2 \\ i \neq \nu_1}}^{N-k} S_{n_i}(x_i; \varphi_i) \quad (1.15)$$

неограничены для п.в. $x \in A(\nu_1)$.

Из (1.7), (1.14), (1.15) получаем, что

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n(\alpha)}(x; F)| = +\infty \quad \text{для п.в. } x \in A(\nu_1), \quad 2 \leq \nu_1 \leq N - k. \quad (1.16)$$

Пусть теперь $\nu_1 = 1$. В этом случае $x \in A(1)$ и, следовательно,

$$f_l g_l = f(x_1, x_l) g(x_1, x_l) = f(x_1, x_l) = f_l \quad \text{для } l = 2, \dots, N - k.$$

Отсюда получаем, что $\overline{\lim} |S_{n(\alpha)}(x; F_l)| = +\infty$ для п.в. $x \in A(1)$, $l = 2, \dots, N - k$. Тогда методом варьирования переменных n_i , $i = 1, \dots, N - k$ (данный метод описан Блошанским в работе [6]), можно доказать, что

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n(\alpha)}(x; F)| = +\infty \quad \text{для п.в. } x \in A(1). \quad (1.17)$$

Таким образом из (1.16) и (1.17) получаем (1.13), что и доказывает случай $m = 1$.

Рассмотрим второй случай: $2 \leq m \leq N - k$, т.е. $x \in \bigcup_{m=2}^{N-k} \bigcup_{\nu_1, \dots, \nu_m} A(\nu_1, \dots, \nu_m)$. Возьмем произвольное множество $A(\nu_1, \dots, \nu_m)$ из этого объединения. Так как $2 \leq m \leq N - k$, то в этом случае верхний предел нескольких слагаемых в (1.7)

равен $+\infty$, тогда опять-таки путем варьирования переменных n_i , $i = 1, \dots, N - k$, можно доказать, что

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n^{(\alpha)}}(x; F)| = +\infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in \bigcup_{m=2}^{N-k} \bigcup_{\nu_1, \dots, \nu_m} A(\nu_1, \dots, \nu_m). \quad (1.18)$$

Окончательно из (1.12), (1.13) и (1.18) получаем

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n^{(\alpha)}}(x; F)| = +\infty \quad \text{для п.в.} \quad x \in \mathbb{T}^N \setminus W^0.$$

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Фиксируем произвольное k , $1 \leq k \leq N-3$, $N \geq 4$. Не ограничивая общности будем считать, что $J_k = \{N - k + 1, \dots, N\}$, соответственно, $M \setminus J_k = \{1, \dots, N - k\}$. Пусть $n^{(\alpha)} = n^{(\alpha)}[J_k] = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ — N -мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$ — некоторые (однократные) лакунарные последовательности ($n_j = n_j^{(\alpha_j)} \in \mathbb{Z}_+^1$, $n_j^{(\alpha_j)} \rightarrow \infty$ при $\alpha_j \rightarrow \infty$, $j = N - k + 1, \dots, N$).

Фиксируем произвольное a , $-\pi < a < \pi$, и в качестве W_a возьмем множество

$$W_a = \bigcup_{\substack{s, t \in M \setminus J_k \\ s < t}} W_{x_s x_t}(a), \quad (1.19)$$

где

$$W_{x_s x_t}(a) = \Omega_{x_s x_t} \times [-\pi, \pi]^{N-2} = \{(-\pi, a) \times (-\pi, \pi)\} \times [-\pi, \pi]^{N-2},$$

$s, t = 1, \dots, N - k$, $s < t$, $s \neq N - k - 1$, и

$$\begin{aligned} W_{x_{N-k-1} x_{N-k}}(a) &= \Omega_{x_{N-k-1} x_{N-k}} \times [-\pi, \pi]^{N-3} \times [-\pi, a] \\ &= \{(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)\} \times [-\pi, \pi]^{N-3} \times [-\pi, a] \end{aligned}$$

— неполный брусок.

Определим функцию F следующим образом:

$$F(x) = g(x_1) \cdots g(x_{N-k-2}) f(x_{N-k-1}, x_{N-k}) \psi(x_{N-k+1}, \dots, x_N),$$

где $f(x_{N-k-1}, x_{N-k})$ — функция Фейффермана [7], для которой двойной ряд Фурье неограниченно расходится в каждой внутренней точке $\mathbb{T}^2$, $g(t) \in \mathbb{C}([-\pi, \pi])$, причем

$$g(t) = 0 \quad \text{при } t \in [-\pi, a] \quad \text{и} \quad g(t) \neq 0 \quad \text{при } t \in (a, \pi],$$

и, наконец,

$$\psi(x_{N-k+1}, \dots, x_N) \equiv 1 \quad \text{при } (x_{N-k+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{T}^k.$$

Докажем, что таким образом определенная функция F равна нулю на множестве W_a (1.19). Для этого рассмотрим произвольный брусок $W_{x_s x_t}(a)$ из W_a . Пусть $s \neq N - k - 1$; тогда $F(x) = 0$ при $x \in W_{x_s x_t}(a)$ в силу равенства нулю функции $g(x_s)$ на множестве $[-\pi, a]$ (в этом случае переменные $(x_s, x_t) \in \Omega_{x_s x_t} = (-\pi, a) \times (-\pi, \pi)$,

$s = 1, \dots, N - k - 2$). Если $s = N - k - 1$ (т.е. мы рассматриваем неполный брусок $W_{x_{N-k-1}x_{N-k}}(a)$), то $F(x) = 0$ при $x \in W_{x_{N-k-1}x_{N-k}}(a)$, так как в этом случае одна из переменных $x_l \in [-\pi, a]$, $l = 1, \dots, N - k - 2$, и, следовательно, функция $g(x_l)$, входящая в $F(x)$, также равна нулю.

В то же время, очевидно,

$$S_{n^{(\alpha)}}(x; F) = \prod_{l=1}^{N-k-2} S_{n_l}(x_l; g_l) \cdot S_{n_{N-k-1}, n_{N-k}}(x_{N-k-1}, x_{N-k}; f),$$

где $g_l = g(x_l)$, $l = 1, \dots, N - k - 2$.

Так как функция $g(t) \neq 0$ при $t \in (a, \pi]$, $S_{n_l}(x_l; g_l)$, $l = 1, \dots, N - k - 2$, – тригонометрические полиномы, то $S_{n_l}(x_l; g_l) \neq 0$, начиная с некоторого номера и для п.в. $x_l \in [-\pi, \pi]$, $l = 1, \dots, N - k - 2$. Получаем, что если n_{N-k-1} и n_{N-k} растут достаточно быстро, то частичные суммы $S_{n^{(\alpha)}}(x; F)$ неограничены для п.в. $x \in \mathbb{T}^N$, т.е.

$$\lim_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n^{(\alpha)}}(x; f)| = +\infty \quad \text{почти всюду на } \mathbb{T}^N,$$

что и требовалось доказать.

2. Геометрия и структура брусков $W_{x_s x_t}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Фиксируем произвольное k , $1 \leq k \leq N - 4$, $N \geq 5$. Не ограничивая общности будем считать, что $J_k = \{N - k + 1, \dots, N\}$, соответственно, $M \setminus J_k = \{1, \dots, N - k\}$. Пусть $n^{(\alpha)} = n^{(\alpha)}[J_k] = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ – N -мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$ – некоторые (однократные) лакунарные последовательности ($n_j = n_j^{(\alpha_j)} \in \mathbb{Z}_+^1$, $n_j^{(\alpha_j)} \rightarrow \infty$ при $\alpha_j \rightarrow \infty$, $j = N - k + 1, \dots, N$).

Пусть a и b , $-\pi < a < b < \pi$, – два вещественных числа, которые мы выберем позже. Положим

$$\begin{aligned} \Omega_{x_r x_s x_t} &= (-\pi, \pi)^2 \times (a, b), & r, s, t \in M \setminus J_k, \quad r < s < t, \\ W_{x_r x_s x_t} &= \Omega_{x_r x_s x_t} \times [-\pi, \pi]^{N-3}, & r, s, t \in M \setminus J_k, \quad r < s < t, \end{aligned} \quad (2.1)$$

и, наконец,

$$W = \bigcup_{\substack{r, s, t \in M \setminus J_k \\ r < s < t}} W_{x_r x_s x_t}.$$

Очевидно, что множество W есть крест из N -мерных брусков $W_{x_r x_s x_t}$ (2.1) вида (0.10).

Положим

$$F(x) = f(x_1, x_2)g(x_3) \cdots g(x_{N-k})\psi(x_{N-k+1}, \dots, x_N), \quad (2.2)$$

где $f(x_1, x_2) \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^2)$ – функция Фейффермана [7], двойной ряд Фурье которой неограниченно расходится в каждой внутренней точке квадрата $\mathbb{T}^2$, $g(x_l) \in \mathbb{C}([-\pi, \pi])$, $l = 3, \dots, N - k$, причем

$$g(x_l) = 0 \quad \text{при } x_l \in (a, b), \quad g(x_l) \neq 0 \quad \text{при } x_l \in [-\pi, \pi] \setminus (a, b), \quad (2.3)$$

и, наконец,

$$\psi(x_{N-k+1}, \dots, x_N) \equiv 1 \quad \text{при} \quad (x_{N-k+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{T}^k.$$

В таком случае получаем, что, во-первых, так определенная функция $F(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, и, во-вторых, в силу (2.3)

$$F(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in W. \quad (2.4)$$

Для доказательства последнего достаточно заметить, что для любого набора из трех чисел (r, s, t) , $r < s < t$, $r, s, t \in M \setminus J_k$ (т.е. для любого бруска $W_{x_r x_s x_t}$), хотя бы одно из чисел r , s или t будет больше или равно 3, т.е. в (2.2) найдется непрерывная функция $g(x_l)$ от переменной x_l , $l \geq 3$, удовлетворяющая условию (2.3), которая обнулит функцию $F(x)$ на этом бруске, т.е. на множестве $W_{x_r x_s x_t}$. А так как функция $F(x) = 0$ на каждом из брусков $W_{x_r x_s x_t}$, то $F(x) = 0$ на всем множестве W .

С другой стороны, очевидно,

$$S_{n^{(\alpha)}}(x; F) = S_{n_1, n_2}(x_1, x_2; f) S_{n_3}(x_3; g) \cdots S_{n_{N-k}}(x_{N-k}; g).$$

Предполагая, что числа a , b и функция g выбраны так, что $S_{n_i}(x_i; g) \neq 0$ для бесконечного числа номеров n , получаем, что если n_1 и n_2 растут достаточно быстро, то частичные суммы $S_{n^{(\alpha)}}(x; F)$ неограничены при $\alpha_j \rightarrow \infty$, $j \in J_k$, и $n_j \rightarrow \infty$, $j \in M \setminus J_k$, в каждой внутренней точке $\mathbb{T}^N$. Теорема 3 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Фиксируем произвольное k , $1 \leq k \leq N-3$, $N \geq 4$. Не ограничивая общности будем считать, что $J_k = \{N-k+1, \dots, N\}$, соответственно, $M \setminus J_k = \{1, \dots, N-k\}$. Пусть $n^{(\alpha)} = n^{(\alpha)}[J_k] = (n_1, n_2, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$ — N -мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$ — некоторые (однократные) лакунарные последовательности ($n_j = n_j^{(\alpha_j)} \in \mathbb{Z}_+^1$, $n_j^{(\alpha_j)} \rightarrow \infty$ при $\alpha_j \rightarrow \infty$, $j = N-k+1, \dots, N$).

Для доказательства нам понадобится функция двух переменных f и измеримое множество $E \subset \mathbb{T}^2$, построенные Блошанским в [8], обладающие следующими свойствами.

ТЕОРЕМА С. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют функция $f = f_\varepsilon \in L_\infty(\mathbb{T}^2)$ и измеримое множество $E = E_\varepsilon \subset \mathbb{T}^2$ такие, что

- 1) $f(x) = 0$ на E ;
- 2) $\mu_2 E > 4\pi^2 - \varepsilon$ (μ_2 — мера на плоскости);
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n(x; f)| = +\infty$ почти всюду на $\mathbb{T}^2$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множества

$$\Omega_{x_s x_t}(\varepsilon) = [-\pi, \pi] \times \left[-\pi + \frac{\varepsilon}{2(2\pi)^{N-1}}, \pi - \frac{\varepsilon}{2(2\pi)^{N-1}} \right] \quad (2.5)$$

в плоскости (x_s, x_t) , $s < t$, $s, t = 1, \dots, N-k$, $s \neq N-k-1$. Для $\varepsilon' = \varepsilon/(2\pi)^{N-2}$ рассмотрим функцию $f_{\varepsilon'} \in L_\infty(\mathbb{T}^2)$ и измеримое множество $E_{\varepsilon'} \subset \mathbb{T}^2$, определяемые теоремой С, т.е.

$$f_{\varepsilon'} = f_\varepsilon(x_{N-k-1}, x_{N-k}) = 0 \quad \text{на} \quad E_{\varepsilon'}, \quad (2.6)$$

$$\mu_2 E_{\varepsilon'} > 4\pi^2 - \frac{\varepsilon}{(2\pi)^{N-2}} \quad (\mu_2 \text{ — мера на плоскости}). \quad (2.7)$$

Возьмем в качестве $\Omega_{x_{N-k-1}x_{N-k}}(\varepsilon)$ следующее множество:

$$\Omega_{x_{N-k-1}x_{N-k}}(\varepsilon) = E_{\varepsilon'}. \quad (2.8)$$

Определим C_{N-k}^2 брусков

$$W_{x_s x_t}(\varepsilon) = \Omega_{x_s x_t}(\varepsilon) \times [-\pi, \pi]^{N-2}, \quad s, t \in M \setminus J_k, \quad s < t, \quad (2.9)$$

и крест

$$W_\varepsilon = \bigcup_{\substack{s, t \in M \setminus J_k \\ s < t}} W_{x_s x_t}(\varepsilon). \quad (2.10)$$

В силу (2.5) и (2.9) имеем

$$\begin{aligned} \mu(\mathbb{T}^N \setminus W_{x_s x_t}(\varepsilon)) &= \frac{\varepsilon}{(2\pi)^{N-2}} (2\pi)^{N-2} = \varepsilon, \\ s < t, \quad s, t &= 1, \dots, N-k, \quad s \neq N-k-1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

В свою очередь, в силу (2.7)–(2.9)

$$\mu(\mathbb{T}^N \setminus W_{x_{N-k-1}x_{N-k}}) < \varepsilon. \quad (2.12)$$

Следовательно, из оценок (2.10)–(2.12) получаем

$$\mu(\mathbb{T}^N \setminus W_\varepsilon) < \varepsilon \quad (2.13)$$

(в (2.11)–(2.13) $\mu = \mu_N$ – мера в пространстве $\mathbb{R}^N$).

Рассмотрим следующую функцию:

$$F(x) = g(x_1) \cdots g(x_{N-k-2}) f_\varepsilon(x_{N-k-1}, x_{N-k}) \psi(x_{N-k+1}, \dots, x_N), \quad (2.14)$$

где функция $f_\varepsilon(x_{N-k-1}, x_{N-k}) \in L_\infty(\mathbb{T}^2)$ из теоремы C и удовлетворяет условию (2.6), $g(x_l) \in L_\infty([-\pi, \pi])$, $l = 1, \dots, N-k-2$, причем

$$g(x_l) = 0 \quad \text{при} \quad x_l \in \left[-\pi + \frac{\varepsilon}{2(2\pi)^{N-1}}, \pi - \frac{\varepsilon}{2(2\pi)^{N-1}} \right], \quad (2.15)$$

и, наконец,

$$\psi(x_{N-k+1}, \dots, x_N) \equiv 1 \quad \text{при} \quad (x_{N-k+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{T}^k.$$

В таком случае получаем, что, во-первых, так определенная функция $F(x) \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$, и, во-вторых, в силу (2.6) и (2.15)

$$F(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in W_\varepsilon.$$

Для доказательства последнего достаточно заметить, что $F(x) = 0$ на множестве $W_{x_{N-k-1}x_{N-k}}$ в силу (2.6), т.е. выбора функции $f_\varepsilon(x_{N-k-1}, x_{N-k})$; с другой стороны, $F(x) = 0$ на любом множестве $W_{x_s x_t}$, $s < t$, $s, t = 1, \dots, N-k$, $s \neq N-k-1$, в силу того, что $1 \leq s \leq N-k-2$, т.е. в (2.14) найдется функция $g(x_s)$, удовлетворяющая условию (2.15), которая и обнулит функцию $F(x)$ на этом множестве $W_{x_s x_t}$. Таким образом, $F(x) = 0$ на всем множестве W_ε .

В то же время, очевидно,

$$S_{n^{(\alpha)}}(x; F) = \prod_{l=1}^{N-k-2} S_{n_l}(x_l; g) \cdot S_{n_{N-k-1}, n_{N-k}}(x_{N-k-1}, x_{N-k}; f).$$

Так как функция g – ненулевая функция, а $S_{n_l}(x_l; g)$ – тригонометрические полиномы, то $S_{n_l}(x_l; g) \neq 0$ для п.в. $x_l \in [-\pi, \pi]$, $l = 1, \dots, N - k - 2$, начиная с некоторого номера. В таком случае, если n_{N-k-1} и n_{N-k} растут достаточно быстро, то $S_{n^{(\alpha)}}(x; F)$ неограничены при $\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k$, и $n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k$, для п.в. $x \in \mathbb{T}^N$.

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ мы построили множество W_ε (2.10) – неполный крест из N -мерных брусков и функцию $F(x) = F_\varepsilon(x) \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такие, что, во-первых, $F(x) = 0$ на W_ε , во-вторых, $\mu W_\varepsilon \geq \mu \mathbb{T}^N - \varepsilon$ и, в-третьих,

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n^{(\alpha)}}(x; f)| = +\infty$$

почти всюду на $\mathbb{T}^N$. Теорема 4 доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И. Л. Блошанскому за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Л. Блошанский, “О равносходимости разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье”, *Матем. заметки*, **18**:2 (1975), 153–168.
- [2] И. Л. Блошанский, “Обобщенная локализация почти всюду и сходимость двойных рядов Фурье”, *Докл. АН СССР*, **242**:1 (1978), 11–13.
- [3] И. Л. Блошанский, “О критериях слабой обобщенной локализации в n -мерном пространстве”, *Докл. АН СССР*, **271**:6 (1983), 1294–1298.
- [4] И. Л. Блошанский, “Два критерия слабой обобщенной локализации для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из L_p , $p \geq 1$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:2 (1985), 243–282.
- [5] И. Л. Блошанский, О. В. Лифанцева, “Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье, прямоугольные частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности”, *Матем. заметки*, **84**:3 (2008), 334–347.
- [6] И. Л. Блошанский, “О геометрии измеримых множеств в N -мерном пространстве, на которых справедлива обобщенная локализация для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из L_p , $p > 1$ ”, *Матем. сб.*, **121**:1 (1983), 87–110.
- [7] С. Fefferman, “On the divergence of multiple Fourier series”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **77**:2 (1971), 191–195.
- [8] I. L. Bloshanskii, “Generalized localization and convergence tests for double trigonometric Fourier series of functions from L_p , $p > 1$ ”, *Anal. Math.*, **7**:1 (1981), 3–36.

О. В. Лифанцева

Московский государственный областной университет

E-mail: olga-lif@yandex.ru, ov-lifantseva@yandex.ru

Поступило

23.11.2007

Исправленный вариант

17.03.2009