Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Родионов, Ю. А. Фарков, Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 429–444

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8502>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:58:20

Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши

Е. А. Родионов, Ю. А. Фарков

Пусть $\omega(\varphi, \cdot)$ – диадический модуль непрерывности финитной функции φ в $L^2(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющей масштабирующему уравнению с 2^n коэффициентами. Обозначим через α_φ точную верхнюю грань тех значений $\alpha > 0$, для которых неравенство $\omega(\varphi, 2^{-j}) \leq C 2^{-\alpha j}$ выполнено при всех $j \in \mathbb{N}$. Для случаев $n = 3$ и $n = 4$ изучаются масштабирующие функции φ , генерирующие кратномасштабные анализы в $L^2(\mathbb{R}_+)$, и для этих функций вычислены точные значения величины α_φ . Отмечается, что гладкость диадического ортогонального всплеска в $L^2(\mathbb{R}_+)$, соответствующего масштабирующей функции φ , совпадает с α_φ .

Библиография: 14 названий.

1. Введение. Хорошо известно, что масштабирующая функция Добеши порядка N является решением функционального уравнения

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2N-1} h_k \varphi(2x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

и обладает следующими свойствами:

- 1) $\text{supp } \varphi = [0, 2N - 1]$;
- 2) система $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R})$;
- 3) φ генерирует кратномасштабный анализ в $L^2(\mathbb{R})$.

При $N = 1$ конструкция Добеши приводит к функции Хаара: $\varphi = \chi_{[0,1]}$ (в этом случае $h_0 = h_1 = 1/\sqrt{2}$). Коэффициенты уравнения (1) для $2 \leq N \leq 10$ приведены в книге Добеши (см. [1; раздел 6.4]). При $N = 2$ решение уравнения (1) непрерывно на $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условию Липшица

$$|\varphi(t) - \varphi(x)| \leq C|t - x|^\alpha, \quad t, x \in \mathbb{R},$$

с показателем $\alpha \approx 0.5500$. Точное значение показателя α (и соответствующих величин для $N = 3$ и $N = 4$) было найдено матричным методом (см. [1; § 7.2], [2; § 7.3]). Для масштабирующих функций Добеши порядков $N \geq 5$ точные значения показателей гладкости авторам не известны.

Формула, выражающая гладкость масштабирующей функции φ через совместный спектральный радиус некоторых матриц, генерируемых коэффициентами уравнения (1), впервые появилась в статьях Добеши и Лагариса [3] (см. также [4]); ниже

мы будем пользоваться “диадическим” аналогом этой формулы. Напомним, что совместный спектральный радиус двух комплексных матриц A_0 и A_1 размера $N \times N$ определяется по формуле

$$\widehat{\rho}(A_0, A_1) := \lim_{k \rightarrow \infty} \max \{ \|A_{d_1} A_{d_2} \cdots A_{d_k}\|^{1/k} : d_j \in \{0, 1\}, 1 \leq j \leq k \},$$

где $\|\cdot\|$ – произвольная норма в $\mathbb{C}^{N \times N}$. Очевидно, если $A_0 = A_1$, то величина $\widehat{\rho}(A_0, A_1)$ совпадает со спектральным радиусом $\rho(A_0)$.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ – положительная полупрямая, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+$ и $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Для каждого $x \in \mathbb{R}_+$ и любого $j \in \mathbb{N}$ мы определим $x_{-j}, x_j \in \{0, 1\}$ из двоичного разложения

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_{-j} 2^{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} x_j 2^{-j}$$

(в случае двоично-рационального x выбирается разложение с конечным числом ненулевых слагаемых). Двоичное сложение на $\mathbb{R}_+$ определяется по формуле

$$x \oplus y = \sum_{j=1}^{\infty} |x_{-j} - y_{-j}| 2^{j-1} + \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j| 2^{-j}, \quad x, y \in \mathbb{R}_+,$$

и играет ключевую роль в теории рядов и преобразований Уолша (см. [5]–[7]). Так, например, если сумма $x \oplus y$ двоично-иррациональна, то для классических функций Уолша $\{w_k\}$ выполняется равенство $w_k(x \oplus y) = w_k(x)w_k(y)$.

В недавней работе [8] найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых диадическое масштабирующее уравнение

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k \varphi(2x \oplus k), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (2)$$

имеет решение $\varphi \in L^2(\mathbb{R}_+)$ со следующими свойствами:

- 1) $\text{supp } \varphi = [0, 2^{n-1}]$;
- 2) система $\{\varphi(\cdot \oplus k) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$;
- 3) φ генерирует кратномасштабный анализ в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

В частности, если $n = 1$ и $c_0 = c_1 = 1$, то решением уравнения (2) является функция Хаара (см. также примеры в [9], [10]). В настоящей статье вычисляются точные значения показателей гладкости решений уравнения (2) в случаях $n = 3$ и $n = 4$. В доказательствах оценок снизу существенно используются разложения диадических масштабирующих функций в ряды Уолша (и в этом состоит главное отличие нашего метода от применяемых ранее методов оценки гладкости всплесков). Отметим, что алгоритм разложения масштабирующих функций в лакунарные ряды Уолша был найден вторым автором в [11], а из результатов статьи [8] следует применимость этого алгоритма к любой финитной диадической масштабирующей функции пространства $L^2(\mathbb{R}_+)$. Коэффициенты уравнения (2) будем предполагать вещественными, хотя все приведенные ниже значения совместного спектрального радиуса матриц, генерируемых этими коэффициентами, сохраняются и для комплексного случая.

Полином Уолша

$$m(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k w_k(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}_+,$$

будем называть *маской* масштабирующего уравнения (2). Известно, что маска $m(\omega)$ постоянна на двоичных интервалах ранга n . Более того, если $b_l = m(\omega)$ для $\omega \in [l2^{-n}, (l+1)2^{-n})$, $0 \leq l \leq 2^n - 1$, то

$$c_k = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=0}^{2^n-1} b_l w_l(k2^{-n}), \quad 0 \leq k \leq 2^n - 1. \quad (3)$$

Диадический модуль непрерывности масштабирующей функции φ , удовлетворяющей уравнению (2), определяется равенством

$$\omega(\varphi, \delta) := \sup\{|\varphi(x \oplus y) - \varphi(x)| : x, y \in [0, 2^{n-1}), 0 \leq y < \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Если функция φ такова, что $\omega(\varphi, 2^{-j}) \leq C2^{-\alpha j}$, $j \in \mathbb{N}$ для некоторого $\alpha > 0$, то существует [6; § 5.1] константа $C(\varphi, \alpha)$ такая, что

$$\omega(\varphi, \delta) \leq C(\varphi, \alpha) \delta^\alpha. \quad (4)$$

Обозначим через α_φ точную верхнюю грань множества всех значений $\alpha > 0$, для которых выполнено неравенство (4).

Определение кратномасштабного анализа (КМА) в $L^2(\mathbb{R}_+)$ приведено в работе [8] и полностью аналогично соответствующему определению для пространства $L^2(\mathbb{R})$ (см., например, [1], [2]). Будем говорить, что решение φ уравнения (2) *генерирует* КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$, если, во-первых, система $\{\varphi(\cdot \oplus k) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ ортонормирована в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и, во-вторых, семейство замкнутых подпространств

$$V_j = \text{clos}_{L^2(\mathbb{R}_+)} \text{span}\{\varphi(2^j \cdot \oplus k) : k \in \mathbb{Z}_+\}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

является КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$.

В [8] показано, что равенства

$$b_0 = 1, \quad |b_l|^2 + |b_{l+2^{n-1}}|^2 = 1, \quad 0 \leq l \leq 2^{n-1} - 1,$$

необходимы для ортонормированности системы $\{\varphi(\cdot \oplus k) : k \in \mathbb{Z}_+\}$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Для $n = 2$ можно принять $b_0 = 1$, $b_1 = \sqrt{1 - |b|^2}$, $b_2 = 0$, $b_3 = b$, где $0 < |b| < 1$, и тогда $\alpha_\varphi = \log_2(1/|b|)$ (см. [8; замечание 3], [11; пример 4.3]).

В общем случае положим $N = 2^{n-1}$ и зададим $(N \times N)$ -матрицы T_0, T_1 формулами

$$(T_0)_{ij} = c_{2(i-1) \oplus (j-1)}, \quad (T_1)_{ij} = c_{(2i-1) \oplus (j-1)}, \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad (5)$$

где c_k – коэффициенты уравнения (2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть финитное решение φ уравнения (2) генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и пусть $\hat{\rho} = \hat{\rho}(L_0, L_1)$ – совместный спектральный радиус линейных операторов L_0, L_1 , заданных на $\mathbb{R}^N$ матрицами T_0, T_1 и ограниченных на подпространство

$$E_1 := \{u = (u_1, \dots, u_N)^t : u_1 + \dots + u_N = 0\}.$$

Тогда $\alpha_\varphi = -\log_2 \hat{\rho}$.

Отметим, что при $n = 3$ базис пространства E_1 образуют векторы

$$e_1 = (1, -1, 1, -1)^t, \quad e_2 = (1, -1, -1, 1)^t, \quad e_3 = (1, 1, -1, -1)^t \quad (6)$$

и матрицы (5) имеют вид

$$T_0 = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_0 & c_1 \\ c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ c_6 & c_7 & c_4 & c_5 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_0 & c_3 & c_2 \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 \\ c_5 & c_4 & c_7 & c_6 \\ c_7 & c_6 & c_5 & c_4 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для любых $(d \times d)$ -матриц A_0, A_1 и для любого $q \geq 0$ следующие условия равносильны:

1) существуют константы $C > 0, p \geq 0$ такие, что для всех $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\max\{\|A_{d_1} \cdots A_{d_m}\| : d_j \in \{0, 1\}, 1 \leq j \leq m\} \leq C m^p q^m;$$

2) $\widehat{\rho}(A_0, A_1) \leq q$.

Более того, если выполнено любое из этих свойств, то всегда можно взять $p \leq d - 1$, а если матрицы неприводимы (не имеют нетривиальных действительных общих собственных подпространств), то $p = 0$.

Доказательство предложения 1 полностью аналогично доказательствам соответствующих утверждений в [2] и [12] (см. также [8; замечание 3]), а предложение 2 доказано в [12].

Для произвольной $(N \times N)$ -матрицы T положим

$$\|T|_{E_1}\| := \sup\left\{\frac{\|Tu\|}{\|u\|} : u \in E_1, u \neq 0\right\},$$

где $\|u\|$ – евклидова норма вектора u , E_1 – подпространство из предложения 1. Из предложений 1 и 2 следует, что если финитное решение φ уравнения (2) генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и для всех $m \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\max\{\|T_{d_1} T_{d_2} \cdots T_{d_m}|_{E_1}\| : d_j \in \{0, 1\}, 1 \leq j \leq m\} \leq C m^p q^m,$$

где $0 \leq q < 1, p \geq 0$, то $\widehat{\rho}(L_0, L_1) \leq q$.

В ходе компьютерных экспериментов, результаты которых приведены ниже, совместный спектральный радиус матриц вычислялся в системе Matlab 7.0 непосредственно по определению; кроме того, применялся метод оценок величины $\widehat{\rho}$ с помощью произведений Кронекера (см. [2; с. 309], [13]). Отметим также, что гладкость диадического ортогонального всплеска ψ в $L^2(\mathbb{R}_+)$, соответствующего масштабирующей функции φ , совпадает с α_φ (подробнее об этом см. в [8; § 4]).

Основные результаты настоящей работы анонсированы в тезисах нашего доклада [14] на V Международном симпозиуме “Ряды Фурье и их приложения”.

2. Оценки α_φ для $n = 3$. Определим коэффициенты масштабирующего уравнения (2) с помощью формулы (3) по параметрам

$$b_0 = 1, \quad b_1 = a, \quad b_2 = b, \quad b_3 = c, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \alpha, \quad b_6 = \beta, \quad b_7 = \gamma,$$

где $|a|^2 + |\alpha|^2 = |b|^2 + |\beta|^2 = |c|^2 + |\gamma|^2 = 1$ (см. [8; пример 4]). В этом случае матрицы линейных операторов L_0 и L_1 , заданных на $\mathbb{R}^4$ матрицами (7) и ограниченных на подпространство E_1 , имеют в базисе (6) вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \beta & b \\ 0 & \gamma & c \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\beta & b \\ 0 & -\gamma & c \\ -\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

и при этом $\widehat{\rho}(L_0, L_1) = \widehat{\rho}(A_0, A_1)$. Компьютерными методами получены следующие результаты.

А. Равенство $\widehat{\rho}(A_0, A_1) = \rho(A_0)$ имеет место в случаях:

- 1) $0 \leq b \leq 1, \quad 0 < c \leq 1, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad 0 \leq \beta\gamma < 1;$
- 2) $-1 \leq b \leq 0, \quad -1 \leq c < 0, \quad -1 < \alpha \leq 0, \quad 0 \leq \beta\gamma < 1;$
- 3) $0 \leq b \leq 1, \quad -1 \leq c < 0, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad -1 < \beta\gamma \leq 0;$
- 4) $-1 \leq b \leq 0, \quad 0 < c \leq 1, \quad -1 < \alpha \leq 0, \quad -1 < \beta\gamma \leq 0.$

В. Равенство $\widehat{\rho}(A_0, A_1) = \rho(A_1)$ справедливо в случаях:

- 1) $0 \leq b \leq 1, \quad 0 < c \leq 1, \quad -1 < \alpha \leq 0, \quad 0 \leq \beta\gamma < 1;$
- 2) $-1 \leq b \leq 0, \quad -1 \leq c < 0, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad 0 \leq \beta\gamma < 1;$
- 3) $0 \leq b \leq 1, \quad -1 \leq c < 0, \quad -1 < \alpha \leq 0, \quad -1 < \beta\gamma \leq 0;$
- 4) $-1 \leq b \leq 0, \quad 0 < c \leq 1, \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad -1 < \beta\gamma \leq 0.$

При специальном выборе параметров спектральные радиусы матриц (8) вычисляются особенно просто. Так, например, если $\beta c = \gamma b$, то

$$\rho(A_0) = \max\{|\lambda| : \lambda^2 - \gamma\lambda - \alpha b = 0\}, \quad \rho(A_1) = \max\{|\lambda| : \lambda^2 + \gamma\lambda + \alpha b = 0\}.$$

Более того, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\widehat{\rho}$ – совместный спектральный радиус матриц (8). Тогда

$$\widehat{\rho} = \begin{cases} \sqrt[3]{|\alpha|}, & \text{если } b = 0, |c| = 1, 0 \leq |\alpha| < 1, \\ \max\{\sqrt{|\alpha|}, |\gamma|\}, & \text{если } |b| = 1, 0 \leq |\alpha| < 1, 0 \leq |\gamma| < 1, \\ |\gamma|, & \text{если } |a| = 1, 0 \leq |\gamma| < 1 \end{cases}$$

и при этом $\alpha_\varphi = -\log_2 \widehat{\rho}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3 в [8] данная функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$, а по предложению 1 имеем $\alpha_\varphi = -\log_2 \widehat{\rho}$. Предположим, что $\beta = c = 1$. Тогда

$$T_0 e_1 = -T_1 e_1 = \alpha e_3, \quad T_0 e_2 = -T_1 e_2 = e_1, \quad T_0 e_3 = T_1 e_3 = e_2.$$

Обозначим через $\text{mod}(m, 3)$ остаток при делении m на 3. По индукции проверяется, что

$$T_0^m e_1 = \alpha^{[(m+2)/3]} e_{3-\text{mod}(m+2,3)}, \quad m \in \mathbb{N},$$

где $[x]$ – целая часть числа x . Аналогично,

$$T_0^m e_2 = \alpha^{[(m+1)/3]} e_{3-\text{mod}(m+4,3)}, \quad T_0^m e_3 = \alpha^{[m/3]} e_{3-\text{mod}(m+3,3)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда получаем, что

$$\|T_0^m e_j\| \leq C|\alpha|^{m/3}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Более того, поскольку $T_0 e_j = \pm T_1 e_j$, аналогичные оценки имеют место для векторов $T_{d_1} T_{d_2} \cdots T_{d_m} e_j$. Поэтому для всех $m \in \mathbb{N}$

$$\|T_{d_1} T_{d_2} \cdots T_{d_m}|_{E_1}\| \leq C|\alpha|^{m/3}, \quad d_1, d_2, \dots, d_m \in \{0, 1\},$$

и справедлива оценка $\hat{\rho} \leq \sqrt[3]{|\alpha|}$ (см. предложение 2).

Докажем обратное неравенство. Известно [8; с. 151], что φ может быть разложена в лакунарный ряд Уолша:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \frac{1}{4} \chi_{[0,1)}(y) & (1 + a\{w_1(y) + w_3(y) + w_6(y) + \alpha w_{13}(y) + \alpha w_{27}(y) \\ & + \alpha w_{54}(y) + \alpha^2 w_{109}(y) + \alpha^2 w_{219}(y) \\ & + \alpha^2 w_{438}(y) + \alpha^3 w_{877}(y) + \cdots\}), \end{aligned}$$

где $y = x/4$. Поэтому

$$\varphi(0) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3a}{1-\alpha} \right).$$

Кроме того, если $s = 3k$, то

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) &= \frac{1}{4} (1 + a\{3 + 3\alpha + \cdots + 3\alpha^{(s-3)/3} - \alpha^{s/3} - \alpha^{(s+3)/3} + \cdots\}) \\ &= \frac{1}{4} (1 + a(3 - 4\alpha^{s/3})(1-\alpha)^{-1}). \end{aligned}$$

Далее, если $s = 3k + 1$, то

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) &= \frac{1}{4} (1 + a\{3 + 3\alpha + \cdots + 3\alpha^{(s-4)/3} + \alpha^{(s-1)/3} - \alpha^{(s+2)/3} - \alpha^{(s+5)/3} + \cdots\}) \\ &= \frac{1}{4} (1 + a\{(3(1 - \alpha^{(s-1)/3}) - \alpha^{(s+2)/3})(1-\alpha)^{-1} + \alpha^{(s-1)/3}\}) \end{aligned}$$

и если $s = 3k + 2$, то

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) &= \frac{1}{4} (1 + a\{3 + 3\alpha + \cdots + 3\alpha^{(s-2)/3} - \alpha^{(s+1)/3} - \alpha^{(s+4)/3} + \cdots\}) \\ &= \frac{1}{4} (1 + a(3 - 4\alpha^{(s+1)/3})(1-\alpha)^{-1}). \end{aligned}$$

Из приведенных разложений получаем

$$\left| \varphi(0) - \varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) \right| \leq C|\alpha|^{s/3}, \quad s \in \mathbb{N},$$

и, следовательно, $\hat{\rho} \geq \sqrt[3]{|\alpha|}$. Случаи $\beta = -1$, $c = 1$, а также $\beta = 1$, $c = -1$ и $\beta = c = -1$ рассматриваются аналогично. Поэтому, если $b = 0$, $|c| = 1$, $0 \leq |\alpha| < 1$, то $\hat{\rho} = \sqrt[3]{|\alpha|}$.

Пусть теперь $b = 1$. Тогда

$$T_0 e_1 = -T_1 e_1 = \alpha e_3, \quad T_0 e_2 = -T_1 e_2 = \gamma e_2, \quad T_0 e_3 = T_1 e_3 = e_1 + c e_2.$$

Следовательно, для четного m

$$\begin{aligned} T_0^m e_1 &= \alpha^{m/2} (e_1 + c e_2) + (\gamma^2 \alpha^{m/2-1} + \gamma^4 \alpha^{m/2-2} + \dots + \gamma^{m-2} \alpha) c e_2, \\ T_0^m e_2 &= \gamma^m e_2, \quad T_0^m e_3 = \alpha^{m/2} e_3 + (\gamma \alpha^{m/2-1} + \gamma^3 \alpha^{m/2-2} + \dots + \gamma^{m-1} \alpha) c e_2, \\ \|T_0^m e_1\| &\leq C(|\alpha|^{m/2} + |\gamma|^2 |\alpha|^{m/2-1} + |\gamma|^4 |\alpha|^{m/2-2} + \dots + |\gamma|^{m-2} |\alpha|) \\ &\leq \begin{cases} C m |\gamma|^m, & |\alpha| \leq |\gamma|^2, \\ C m |\alpha|^{m/2}, & |\alpha| \geq |\gamma|^2, \end{cases} \\ \|T_0^m e_2\| &\leq C |\gamma|^m, \quad \|T_0^m e_3\| \leq \begin{cases} C m |\gamma|^m, & |\alpha| \leq |\gamma|^2, \\ C m |\alpha|^{m/2}, & |\alpha| \geq |\gamma|^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Далее, для нечетного m имеем

$$\begin{aligned} T_0^m e_1 &= \alpha^{(m+1)/2} e_3 + (\gamma \alpha^{(m-1)/2} + \gamma^3 \alpha^{(m-3)/2} + \dots + \gamma^{m-2} \alpha) c e_2, \quad T_0^m e_2 = \gamma^m e_2, \\ T_0^m e_3 &= \alpha^{(m-1)/2} (e_1 + c e_2) + (\gamma^2 \alpha^{(m-3)/2} + \gamma^4 \alpha^{(m-5)/2} + \dots + \gamma^{m-1} \alpha) c e_2 \end{aligned}$$

и, как выше,

$$\begin{aligned} \|T_0^m e_1\| &\leq C(|\alpha|^{(m+1)/2} + |\gamma| |\alpha|^{(m-1)/2} + |\gamma|^3 |\alpha|^{(m-3)/2} + \dots + |\gamma|^{m-2} |\alpha|) \\ &\leq \begin{cases} C m |\gamma|^m, & |\alpha| \leq |\gamma|^2, \\ C m |\alpha|^{m/2}, & |\alpha| \geq |\gamma|^2, \end{cases} \\ \|T_0^m e_2\| &\leq C |\gamma|^m, \quad \|T_0^m e_3\| \leq \begin{cases} C m |\gamma|^m, & |\alpha| \leq |\gamma|^2, \\ C m |\alpha|^{m/2}, & |\alpha| \geq |\gamma|^2. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогичные оценки имеют место и для векторов $T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} e_j$. Поэтому верно неравенство

$$\|T_{d_1} T_{d_2} \dots T_{d_m} |E_1|\|^{1/m} \leq C m^{1/m} \max\{\sqrt{|\alpha|}, |\gamma|\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

и, следовательно, $\hat{\rho} \leq \max\{\sqrt{|\alpha|}, |\gamma|\}$.

Для доказательства обратного неравенства воспользуемся формулой (5.7) из [8]:

$$\begin{aligned} 4\varphi(x) &= 1 + a(w_1(y) + w_2(y) + c w_3(y) + \alpha w_5(y) + \gamma c w_7(y) + \alpha w_{10}(y) + \alpha c w_{11}(y) \\ &\quad + \gamma^2 c w_{15}(y) + \alpha^2 w_{21}(y) + \alpha \gamma c w_{23}(y) + \gamma^3 c w_{31}(y) + \alpha^2 w_{42}(y) \\ &\quad + \alpha^2 c w_{43}(y) + \alpha \gamma^2 c w_{47}(y) + \gamma^4 c w_{63}(y) + \alpha^3 w_{85}(y) + \alpha^2 \gamma c w_{87}(y) \\ &\quad + \alpha \gamma^3 c w_{95}(y) + \gamma^5 c w_{127}(y) + \alpha^3 w_{170}(y) + \alpha^3 c w_{171}(y) \\ &\quad + \alpha^2 \gamma^2 c w_{175}(y) + \alpha \gamma^4 c w_{191}(y) + \gamma^6 c w_{255}(y) + \alpha^4 w_{341}(y) + \dots), \end{aligned} \quad (9)$$

где $0 \leq x < 4$ и $y = x/4$. Подставляя в (9) значение $x = 0$, находим

$$\varphi(0) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{a}{1-\alpha} \left(2 + \frac{c}{1-\gamma} \right) \right).$$

Далее, из формулы (9) следует, что если s четное, то

$$\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2a}{1-\alpha} \left\{ 1 - \alpha^{s/2} - c(\alpha^{s/2} + \gamma^2 \alpha^{(s-2)/2} + \dots + \alpha \gamma^{s-2}) - \frac{c(\gamma^s - 1/2)}{1-\gamma} \right\} \right),$$

а если s нечетное, то

$$\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2a}{1-\alpha} \left\{ 1 - \alpha^{(s+1)/2} - c\gamma(\alpha^{(s-1)/2} + \gamma^2 \alpha^{(s-3)/2} + \dots + \alpha \gamma^{s-3}) - \frac{c(\gamma^s - 1/2)}{1-\gamma} \right\} \right).$$

Поэтому

$$\left| \varphi(0) - \varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) \right| \leq Cs(\max\{\sqrt{|\alpha|}, |\gamma|\})^s, \quad s \in \mathbb{N},$$

и, значит, $\hat{\rho} \geq \max\{\sqrt{|\alpha|}, |\gamma|\}$. Таким образом, $\hat{\rho} = \max\{\sqrt{|\alpha|}, |\gamma|\}$. Случай $b = -1$ рассматривается аналогично. Вывод необходимых оценок для случая $|a| = 1$, $0 \leq |\gamma| < 1$ содержится в примере 4.4 из [11]. Теорема доказана.

Напомним, что функция $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ называется *двоично-целой порядка n* , если она постоянна на двоичных интервалах ранга n . Всякая финитная масштабирующая функция в $L^2(\mathbb{R}_+)$ либо является двоично-целой, либо ее гладкость конечна и может быть эффективно оценена сверху (см. [8; § 7]). Отсюда и из теоремы 1 следует, что в случае $\alpha = \gamma = 0$ решение уравнения (2) является двоично-целой функцией (см. также пример 3 в [8]).

3. Оценки α_φ для $n = 4$. Предположим, что коэффициенты масштабирующего уравнения (2) определены с помощью формулы (3) для

$$b_0 = 1, \quad b_l = d_l, \quad b_8 = 0, \quad b_{l+8} = \gamma_l, \quad 1 \leq l \leq 7, \quad (10)$$

где $|d_l|^2 + |\gamma_l|^2 = 1$. Тогда финитное L^2 -решение φ уравнения (2) может быть разложено в лакунарный ряд Уолша

$$\varphi(x) = \frac{1}{8} \chi_{[0,1)}\left(\frac{x}{8}\right) \left(1 + \sum_{l \in \mathbb{N}(4)} a_l w_l\left(\frac{x}{8}\right) \right), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (11)$$

(см. [8; § 5], [11; замечание 1.2]). В этом разложении $\mathbb{N}(4) = \{1, 2, \dots, 7\} \cup \mathbb{N}_0(4)$, где $\mathbb{N}_0(4)$ – множество всех натуральных чисел $l > 7$, у которых в двоичном разложении

$$l = \sum_{j=0}^k \mu_j 2^j, \quad \mu_j \in \{0, 1\}, \quad \mu_k \neq 0 \quad k = k(l) \in \mathbb{Z}_+, \quad (12)$$

среди упорядоченных наборов $(\mu_j, \mu_{j+1}, \mu_{j+2}, \mu_{j+3})$ отсутствует набор $(0, 0, 0, 1)$, а коэффициенты a_l определены следующим образом. Пусть

$$\beta(i_1, i_2, i_3, i_4) = b_s, \quad \text{если} \quad s = i_1 2^0 + i_2 2^1 + i_3 2^2 + i_4 2^3, \quad i_j \in \{0, 1\},$$

где b_s – параметры, заданные по формулам (10). Представим каждое $l \in \mathbb{N}(4)$ в виде (12) и положим

[illegible]

Отметим, что в последнем произведении индексы каждого множителя, начиная со второго, получаются “сдвигом” индексов предыдущего множителя на одну позицию вправо и добавлением на освободившееся первое место одной новой цифры из двоичного разложения (12) числа l .

В силу нашего выбора параметров b_s маска

$$m(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{15} c_k w_k(\omega) \quad (13)$$

удовлетворяет условиям

$$m(0) = 1, \quad |m(\omega)|^2 + |m(\omega + 1/2)|^2 = 1 \quad \text{для всех } \omega \in \mathbb{R}_+. \quad (14)$$

Предположим, что множество M является объединением некоторых из интервалов $[s/8, (s+1)/8)$, $s = 1, 2, \dots, 7$, или совпадает с одним из них. Если маска (13) обращается в нуль в каждой точке множества

$$\left(\left\{ \frac{\omega}{2} : \omega \in M \right\} \cup \left\{ \frac{\omega+1}{2} : \omega \in M \right\} \right) \setminus M,$$

то множество M называется *блокирующим*. Учитывая (14) и применяя теорему 3 из [8], замечаем, что решение φ уравнения (2) генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$ тогда и только тогда, когда маска (13) не имеет блокирующих множеств. Приведем полный список наборов значений параметров, при которых маска (13) имеет блокирующие множества, и для каждого из этих наборов укажем по одному блокирующему множеству:

- 1) $d_1 = 0, M = [1/8, 1),$
- 2) $d_7 = 0, M = [7/8, 1),$
- 3) $d_2 = d_3 = 0, M = [1/4, 1/2) \cup [5/8, 1),$
- 4) $d_2 = \gamma_5 = 0, M = [1/4, 3/8) \cup [5/8, 3/4),$
- 5) $d_3 = d_5 = 0, M = [3/8, 1/2) \cup [5/8, 1).$

Отметим также, что при $n = 4$ векторы

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1)^t, & e_2 &= (1, 1, -1, -1, -1, -1, 1, 1)^t, \\ e_3 &= (1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1)^t, & e_4 &= (1, -1, 1, -1, -1, 1, -1, 1)^t, \\ e_5 &= (1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1)^t, & e_6 &= (1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1)^t, \\ e_7 &= (1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1)^t \end{aligned} \quad (15)$$

образуют базис пространства E_1 .

Всюду в дальнейшем T_0 и T_1 – матрицы, определяемые по формулам (3) и (5) при условии (10). Введем матрицы

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & -d_7 & 0 & 0 & d_4 & \gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_7 & 0 & 0 & d_5 & \gamma_5 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_6 - d_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2d_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -d_7 & 0 & 0 & d_4 & -\gamma_4 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & -\gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_7 & 0 & 0 & d_5 & -\gamma_5 & 0 \\ 0 & 0 & d_2 & -\gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_6 - d_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2d_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и обозначим через Γ матрицу размера 7×7 , у которой первые шесть столбцов нулевые, а последний столбец совпадает с вектором

$$(\gamma_4 - \gamma_7, -\gamma_3, \gamma_1, \gamma_5 + \gamma_7, -\gamma_2, \gamma_6 - \gamma_7, \gamma_7)^t.$$

Тогда линейные преобразования

$$y = T_0 x, \quad y = T_1 x, \quad x \in E_1,$$

имеют в базисе (15) матрицы

$$A_0 = B_0 + \frac{1}{2} \Gamma, \quad A_1 = B_1 - \frac{1}{2} \Gamma$$

соответственно. При условиях предложения 1 справедлива формула $\hat{\rho}(A_0, A_1) = 2^{-\alpha_\varphi}$. Укажем три случая, когда величина α_φ вычисляется точно.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция φ задана разложением (11). Тогда

- 1) $\alpha_\varphi = \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{|\gamma_2|}$, если $\gamma_2 \neq 0$ и $\gamma_1 = \gamma_5 = \gamma_7 = 0$;
- 2) $\alpha_\varphi = \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{|d_5 \gamma_2|}$, если $d_5 \gamma_2 \neq 0$ и $\gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_7 = 0$;
- 3) $\alpha_\varphi = \log_2 \frac{1}{|\gamma_7|}$, если $\gamma_7 \neq 0$

и выполнено одно из условий:

- а) $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$, б) $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_5 = 0$, в) $d_5 = \gamma_1 = \gamma_3 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1⁰. Пусть $d_1 = d_5 = d_7 = 1$ и $\gamma_2 \neq 0$. Тогда маска (13) не имеет блокирующих множеств и, следовательно, функция φ генерирует КМА

в $L^2(\mathbb{R}_+)$. При этом согласно (11) имеем

$$\begin{aligned} 8\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(y) & (1 + w_1(y) + d_2w_2(y) + d_3w_3(y) + d_2d_4w_4(y) + d_2w_5(y) + d_3d_6w_6(y) \\ & + d_3w_7(y) + d_2\gamma_2w_{10}(y) + d_2\gamma_3w_{11}(y) + d_3d_6\gamma_4w_{12}(y) \\ & + d_3\gamma_6w_{14}(y) + d_2d_4\gamma_2w_{20}(y) + d_2\gamma_2w_{21}(y) + d_2d_6\gamma_3w_{22}(y) \\ & + d_2\gamma_3w_{23}(y) + d_3\gamma_4\gamma_6w_{28}(y) + d_2\gamma_2^2w_{42}(y) + d_2\gamma_2\gamma_3w_{43}(y) \\ & + d_2d_6\gamma_3\gamma_4w_{44}(y) + d_2\gamma_3\gamma_6w_{46}(y) + d_2d_4\gamma_2^2w_{84}(y) + \dots), \end{aligned}$$

где $y = x/8$. Положим

$$G_1 := 2 + 2d_2 + 2d_3 + d_2d_4 + d_3d_6 + 2d_2\gamma_2 + 2d_2\gamma_3 + d_3d_6\gamma_4 + d_3\gamma_6 + d_2d_4\gamma_3 + d_2d_6\gamma_3 + d_3\gamma_4\gamma_6.$$

Тогда

$$8\varphi(0) = G_1 + \frac{d_2}{1 - \gamma_2} (2\gamma_2^2 + 2\gamma_2\gamma_3 + d_6\gamma_3\gamma_4 + \gamma_3\gamma_6 + d_4\gamma_2^2 + d_6\gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_4\gamma_6).$$

Кроме того, для любого нечетного $s \geq 5$

$$\begin{aligned} 8\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) = G_1 + \frac{d_2}{1 - \gamma_2} & ((\gamma_2^2 + \gamma_2\gamma_3 + d_6\gamma_3\gamma_4 + \gamma_3\gamma_6)(1 - 2\gamma_2^{(s-3)/2}) \\ & + (\gamma_2^2 + d_4\gamma_2^2 + d_6\gamma_2\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_4\gamma_6)), \end{aligned}$$

а для любого четного $s \geq 6$

$$\begin{aligned} 8\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) = G_1 + \frac{d_2}{1 - \gamma_2} & (\gamma_2^2 + \gamma_2\gamma_3 + d_6\gamma_3\gamma_4 + \gamma_3\gamma_6 \\ & + (\gamma_2^2 + d_4\gamma_2^2 + d_6\gamma_2\gamma_3 + \gamma_2\gamma_3 + \gamma_3\gamma_4\gamma_6)(1 - 2\gamma_2^{(s-4)/2})). \end{aligned}$$

Поэтому $|\varphi(0) - \varphi(1/2^s)| \leq C|\gamma_2|^{s/2}$, и, значит, $\alpha_\varphi \leq (1/2)\log_2(1/|\gamma_2|)$. Для доказательства обратного неравенства заметим, что для векторов (15) и для любых $i, j, k, l \in \{0, 1\}$

$$T_ie_1 = T_iT_jT_kT_le_2 = 0, \quad T_ie_4 = \pm(\gamma_3e_2 + \gamma_2e_5), \quad T_iT_je_5 = \pm T_ie_4.$$

Следовательно, $\|T_{d_1}T_{d_2} \cdots T_{d_m}e_i\| \leq C|\gamma_2|^{m/2}$ для $i = 1, 2, 4, 5$. Далее, для всех $i, j, k, l \in \{0, 1\}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} T_iT_je_6 = 0, \quad T_ie_3 = d_3e_2 + d_2e_5, \\ T_iT_jT_kT_le_4 = \pm\gamma_2^2(d_4e_1 + e_4) + \gamma_3(T_iT_jT_ke_2 \pm \gamma_2T_ie_2), \quad T_iT_jT_ke_7 = \pm\frac{1}{2}T_iT_je_4. \end{aligned}$$

Пользуясь этими равенствами, для произвольного вектора $w \in E_1$ и любых $d_1, d_2, \dots, d_m \in \{0, 1\}$ получаем

$$\|T_{d_1}T_{d_2} \cdots T_{d_m}w\| \leq C|\gamma_2|^m\|w\|.$$

Поэтому для любого $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\|T_{d_1}T_{d_2} \cdots T_{d_m}|_{E_1}\| \leq C|\gamma_2|^{m/2}$$

и по предложению 2 $\alpha_\varphi \geq (1/2) \log_2(1/|\gamma_2|)$. Таким образом, если $d_1 = d_5 = d_7 = 1$ и $\gamma_2 \neq 0$, то $\alpha_\varphi = (1/2) \log_2(1/|\gamma_2|)$.

2⁰. Пусть $d_1 = d_3 = d_7 = 1$ и $d_5\gamma_2 \neq 0$. Тогда маска (13) не имеет блокирующих множеств и функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Более того, согласно (11)

$$\begin{aligned} 8\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(y) & \left(1 + w_1(y) + d_2w_2(y) + w_3(y) + d_2d_4w_4(y) + d_2d_5w_5(y) + d_6w_6(y) \right. \\ & + w_7(y) + d_2d_5\gamma_2w_{10}(y) + d_6\gamma_4w_{12}(y) + d_6\gamma_5w_{13}(y) + \gamma_6w_{14}(y) \\ & + d_2d_4d_5\gamma_2w_{20}(y) + d_2d_5^2\gamma_2w_{21}(y) + d_6\gamma_2\gamma_5w_{26}(y) + \gamma_4\gamma_6w_{28}(y) \\ & + \gamma_5\gamma_6w_{29}(y) + d_2d_5^2\gamma_2^2w_{42}(y) + d_4d_6\gamma_2\gamma_5w_{52}(y) \\ & \left. + d_5d_6\gamma_2\gamma_5w_{53}(y) + \gamma_2\gamma_5\gamma_6w_{58}(y) + d_2d_4d_5^2\gamma_2^2w_{84}(y) + \dots \right), \end{aligned}$$

где $y = x/8$. Положим

$$\begin{aligned} G_2 := 4 + d_2 + d_2d_4 + d_2d_5 + d_6 + d_2d_5\gamma_2 + d_6\gamma_4 + d_6\gamma_5 \\ + \gamma_6 + d_2d_4d_5\gamma_2 + d_2d_5^2\gamma_2 + d_6\gamma_2\gamma_5 + \gamma_4\gamma_6 + \gamma_5\gamma_6. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} 8\varphi(0) = G_2 + \frac{\gamma_2}{1 - d_5\gamma_2} (d_2d_5^2\gamma_2 + d_2\gamma_4d_5^2\gamma_2 + d_2d_5^3\gamma_2 + d_4d_6\gamma_5 \\ + d_5d_6\gamma_5 + \gamma_5\gamma_6 + d_5d_6\gamma_2\gamma_5 + d_4\gamma_5\gamma_6 + d_5\gamma_5\gamma_6). \end{aligned}$$

Для любого нечетного $s \geq 5$

$$\begin{aligned} 8\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) = G_2 + \frac{\gamma_2}{1 - d_5\gamma_2} (d_2d_5^2\gamma_2 + \gamma_5\gamma_6 + d_5d_6\gamma_2\gamma_5) \\ \times (1 - 2(d_5\gamma_2)^{(s-3)/2} + 2(d_5\gamma_2)^{(s-3)/2}) \\ + (d_4d_6\gamma_5 + d_5d_6\gamma_5 + d_4\gamma_5\gamma_6 + d_5\gamma_5\gamma_6) \\ \times (1 - 2(d_5\gamma_2)^{(s-1)/2} + d_2d_4d_5^2\gamma_2 + d_2d_5^3\gamma_2). \end{aligned}$$

Для любого четного $s \geq 6$

$$\begin{aligned} 8\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) = G_2 + \frac{\gamma_2}{1 - d_5\gamma_2} (d_2d_5^2\gamma_2 + (d_4d_6\gamma_5 + d_5d_6\gamma_5)(1 - 2(d_5\gamma_2)^{(s-2)/2}) \\ + (d_2d_4d_5^2\gamma_2 + d_2d_5^3\gamma_2 + d_4\gamma_5\gamma_6 + d_5\gamma_5\gamma_6) \\ \times (1 - 2(d_5\gamma_2)^{(s-4)/2}) \\ + \gamma_5\gamma_6(1 - 2(d_5\gamma_2)^{(s-2)/2} + 2(d_5\gamma_2)^{s/2}) \\ + d_5d_6\gamma_2\gamma_5(1 - 2(d_5\gamma_2)^{(s-4)/2} + 2(d_5\gamma_2)^{(s-2)/2})). \end{aligned}$$

Поэтому $|\varphi(0) - \varphi(1/2^s)| \leq C|d_5\gamma_2|^{s/2}$ и $\alpha_\varphi \leq (1/2) \log_2(1/|d_5\gamma_2|)$. Заметим теперь, что для векторов (15) и любых $i, j \in \{0, 1\}$

$$T_i e_1 = 0, \quad T_i T_j e_5 = \pm \gamma_2 d_5 e_5, \quad T_i e_4 = \pm \gamma_2 e_5,$$

а для $i = 1, 4, 5$ верна оценка

$$\|T_{d_1} T_{d_2} \cdots T_{d_m} e_i\| \leq C|d_5\gamma_2|^{m/2}.$$

Кроме того, для всех $i, j, k, l \in \{0, 1\}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} T_i T_j T_k T_l e_2 &= \pm \gamma_2 d_5 T_i e_4 \pm (d_6 - 1) \gamma_2 \gamma_5 T_i e_5 + T_i T_j T_k e_7, & T_i e_3 &= e_2 + d_2 e_5, \\ T_i T_j e_6 &= \pm \gamma_5 T_i e_4, & T_i T_j T_k e_7 &= \pm \frac{1}{2} (\pm \gamma_2 \gamma_5 T_i e_5 + (\pm \gamma_5 \gamma_6 - d_5) T_i e_4). \end{aligned}$$

Пользуясь этими равенствами, для произвольного вектора $w \in E_1$ и любых $d_1, d_2, \dots, d_m \in \{0, 1\}$ получаем

$$\|T_{d_1} T_{d_2} \cdots T_{d_m} w\| \leq C |\gamma_7|^m \|w\|.$$

Значит, для любого $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\|T_{d_1} T_{d_2} \cdots T_{d_m}|_{E_1}\| \leq C |d_5 \gamma_2|^{m/2}$$

и по предложению 2 $\alpha_\varphi \geq (1/2) \log_2(1/|d_5 \gamma_2|)$. Таким образом, если $d_1 = d_3 = d_7 = 1$ и $d_5 \gamma_2 \neq 0$, то $\alpha_\varphi = (1/2) \log_2(1/|d_5 \gamma_2|)$.

3^0 . Пусть $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ и $\gamma_7 \neq 0$. Тогда маска (13) не имеет блокирующих множеств и функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Применяя формулу (11), имеем

$$\begin{aligned} 8\varphi(x) &= \chi_{[0,1)}(y) (1 + w_1(y) + w_2(y) + w_3(y) + d_4 w_4(y) + d_5 w_5(y) + d_6 w_6(y) + d_7 w_7(y) \\ &\quad + d_6 \gamma_4 w_{12}(y) + d_6 \gamma_5 w_{13}(y) + d_7 \gamma_6 w_{14}(y) + d_7 \gamma_7 w_{15}(y) \\ &\quad + d_7 \gamma_4 \gamma_6 w_{28}(y) + d_7 \gamma_5 \gamma_6 w_{29}(y) + d_7 \gamma_6 \gamma_7 w_{30}(y) + d_7 \gamma_7^2 w_{31}(y) \\ &\quad + d_7 \gamma_4 \gamma_6 \gamma_7 w_{60}(y) + d_7 \gamma_5 \gamma_6 \gamma_7 w_{61}(y) + d_7 \gamma_6 \gamma_7^2 w_{62}(y) \\ &\quad + d_7 \gamma_7^3 w_{63}(y) + d_7 \gamma_4 \gamma_6 \gamma_7^2 w_{124}(y) + d_7 \gamma_5 \gamma_6 \gamma_7^2 w_{125}(y) + \cdots), \end{aligned}$$

где $y = x/8$. Положим

$$G_3 := 4 + d_4 + d_5 + d_6 + d_6 \gamma_4 + d_6 \gamma_5.$$

Тогда

$$8\varphi(0) = G_3 + \frac{d_7}{1 - \gamma_7} (1 + \gamma_6 (1 + \gamma_4 + \gamma_5)).$$

Кроме того, для любого целого $s \geq 2$

$$8\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) = G_3 + \frac{d_7}{1 - \gamma_7} (1 - 2\gamma_7^s + (1 - 2\gamma_7^{s-2})(d_6 \gamma_5 + \gamma_4 \gamma_6) + \gamma_6 (1 - 2\gamma_7^{s-1})).$$

Поэтому $|\varphi(0) - \varphi(1/2^s)| \leq C |\gamma_7|^s$. Для всех $i, j, k \in \{0, 1\}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} T_i T_j T_k e_1 &= T_i T_j T_k e_4 = T_i T_j T_k e_5 = T_i T_j T_k e_6 = 0, \\ T_i T_j T_k e_2 &= \pm d_7 \gamma_7 T_i T_j e_7, & T_i T_j T_k e_3 &= (d_6 - d_7)(\gamma_4 e_1 + \gamma_5 e_4) + 2d_7 T_i e_7, \\ T_i T_j T_k e_7 &= \pm \gamma_7 T_i T_j e_7, & T_i T_j e_7 &= \pm \frac{1}{2} (\pm (\gamma_6 - \gamma_7)(\gamma_4 e_1 + \gamma_5 e_4) + 2\gamma_7 T_i e_7). \end{aligned}$$

Следовательно, для произвольного вектора $w \in E_1$ и любых $d_1, d_2, \dots, d_m \in \{0, 1\}$

$$\|T_{d_1} T_{d_2} \cdots T_{d_m} w\| \leq C |\gamma_7|^m \|w\|.$$

Поэтому для любого $m \in \mathbb{N}$ имеет место оценка

$$\|T_{d_1} T_{d_2} \cdots T_{d_m}|_{E_1}\| \leq C |\gamma_7|^m$$

и по предложению 2 $\alpha_\varphi \geq \log_2(1/|\gamma_7|)$. Таким образом, если $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ и $\gamma_7 \neq 0$, то $\alpha_\varphi = \log_2(1/|\gamma_7|)$.

4⁰. Пусть $d_1 = d_2 = d_5 = 1$ и $\gamma_7 \neq 0$. Тогда маска (13) не имеет блокирующих множеств и функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. При этом

$$\begin{aligned} 8\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(y) & (1 + w_1(y) + w_2(y) + d_3w_3(y) + d_4w_4(y) + w_5(y) + d_3d_6w_6(y) \\ & + d_3d_7w_7(y) + \gamma_3w_{11}(y) + d_3d_6\gamma_4w_{12}(y) + d_3d_7\gamma_6w_{14}(y) \\ & + d_3d_7\gamma_7w_{15}(y) + d_6\gamma_3w_{22}(y) + d_7\gamma_3w_{23}(y) + d_3d_7\gamma_4\gamma_6w_{28}(y) \\ & + d_3d_7\gamma_6\gamma_7w_{30}(y) + d_3d_7\gamma_7^2w_{31}(y) + d_6\gamma_3\gamma_4w_{44}(y) \\ & + d_7\gamma_3\gamma_6w_{46}(y) + d_7\gamma_3\gamma_7w_{47}(y) + d_3d_7\gamma_4\gamma_6\gamma_7w_{60}(y) \\ & + d_3d_7\gamma_6\gamma_7^2w_{62}(y) + \dots), \end{aligned}$$

где $y = x/8$. Пусть

$$\begin{aligned} G_4 := 4 + d_3 + d_4 + d_3d_6 + d_3d_7 + \gamma_3 + d_3d_6\gamma_4 + d_3d_7\gamma_6 + d_3d_7\gamma_7 \\ + d_6\gamma_3 + d_7\gamma_3 + d_3d_7\gamma_4\gamma_6 + d_3d_7\gamma_6\gamma_7 + d_3d_7\gamma_7^2 + d_6\gamma_3\gamma_4 \\ + d_7\gamma_3\gamma_6 + d_7\gamma_3\gamma_7 + d_3d_7\gamma_4\gamma_6\gamma_7 + d_3d_7\gamma_6\gamma_7^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$8\varphi(0) = G_4 + \frac{d_7}{1 - \gamma_7} (d_3\gamma_7^3 + \gamma_3\gamma_4\gamma_6 + \gamma_3\gamma_6\gamma_7 + \gamma_3\gamma_7^2 + d_3\gamma_4\gamma_6\gamma_7^2 + d_3\gamma_6\gamma_7^3).$$

Для любого целого $s \geq 5$

$$\begin{aligned} 8\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) = G_4 + \frac{d_7}{1 - \gamma_7} & (d_3\gamma_7^3(1 - 2\gamma_7^{s-3}) \\ & + \gamma_3(\gamma_4\gamma_6 + \gamma_6\gamma_7 + \gamma_7^2)(1 - 2\gamma_7^{s-4} + 2\gamma_7^{s-3} - 2\gamma_7^{s-2}) \\ & + d_3\gamma_6\gamma_7^2(\gamma_4 + \gamma_7)(1 - 2\gamma_7^{s-4})). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $|\varphi(0) - \varphi(1/2^s)| \leq C|\gamma_7|^s$ и, значит, $\alpha_\varphi \leq \log_2(1/|\gamma_7|)$. Далее, как выше, для любых $i, j, k \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} T_ie_1 = T_iT_je_6 = 0, \quad T_iT_jT_ke_2 = \pm d_7\gamma_3T_ie_2 + 2d_7T_iT_je_7, \\ T_iT_jT_ke_3 = d_3T_iT_je_2 \pm \gamma_3e_2, \quad T_ie_4 = T_iT_je_5 = \pm \gamma_3e_2, \\ T_iT_je_7 = \pm \frac{1}{2}(\gamma_3T_ie_2 + \gamma_7T_ie_4 \pm (\gamma_6 - \gamma_7)\gamma_4e_1 + \gamma_7T_ie_7). \end{aligned}$$

Отсюда для произвольного вектора $w \in E_1$ и любых $d_1, d_2, \dots, d_m \in \{0, 1\}$ получаем

$$\|T_{d_1}T_{d_2} \cdots T_{d_m}w\| \leq C|\gamma_7|^m\|w\|.$$

Следовательно, для любого $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\|T_{d_1}T_{d_2} \cdots T_{d_m}|_{E_1}\| \leq C|\gamma_7|^m$$

и по предложению 2 $\alpha_\varphi \geq \log_2(1/|\gamma_7|)$. Таким образом, если $d_1 = d_2 = d_5 = 1$ и $\gamma_7 \neq 0$, то $\alpha_\varphi = \log_2(1/|\gamma_7|)$.

5⁰. Пусть $d_1 = d_3 = \gamma_5 = 1$ и $\gamma_7 \neq 0$. Тогда маска (13) не имеет блокирующих множеств и функция φ генерирует КМА в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Кроме того,

$$\begin{aligned} 8\varphi(x) = \chi_{[0,1)}(y) & (1 + w_1(y) + d_2w_2(y) + w_3(y) + d_2d_4w_4(y) + d_6w_6(y) + d_7w_7(y) \\ & + d_6\gamma_4w_{12}(y) + d_6w_{13}(y) + d_7\gamma_6w_{14}(y) + d_7\gamma_7w_{15}(y) \\ & + d_6\gamma_2w_{26}(y) + d_7\gamma_4\gamma_6w_{28}(y) + d_7\gamma_6w_{29}(y) + d_7\gamma_6\gamma_7w_{30}(y) \\ & + d_7\gamma_7^2w_{31}(y) + d_4d_6\gamma_2w_{52}(y) + d_7\gamma_2\gamma_6w_{58}(y) + d_7\gamma_4\gamma_6\gamma_7w_{60}(y) \\ & + d_7\gamma_6\gamma_7w_{61}(y) + d_7\gamma_6\gamma_7^2w_{62}(y) + \dots), \end{aligned}$$

где $y = x/8$. Положим

$$\begin{aligned} G_5 := 3 + d_2 + d_2d_4 + 2d_6 + d_7 + d_6\gamma_4 + 2d_7\gamma_6 + d_7\gamma_7 + d_6\gamma_2 + d_7\gamma_4\gamma_6 \\ + d_7\gamma_6\gamma_7 + 2d_7\gamma_7^2 + d_4d_6\gamma_2 + d_7\gamma_2\gamma_6 + d_7\gamma_4\gamma_6\gamma_7 + d_7\gamma_6\gamma_7^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$8\varphi(0) = G_5 + \frac{d_7}{1 - \gamma_7}(\gamma_7^3 + d_4\gamma_2\gamma_6 + \gamma_2\gamma_6\gamma_7 + \gamma_4\gamma_6\gamma_7^2 + \gamma_6\gamma_7^2 + \gamma_6\gamma_7^3).$$

Для любого $s \geq 5$ имеем

$$8\varphi\left(\frac{1}{2^s}\right) = G_5 + \frac{d_7}{1 - \gamma_7}(\gamma_7^3(1 - \gamma_7^{s-3}) + \gamma_6(d_4\gamma_2 + \gamma_2\gamma_7 + \gamma_4\gamma_7^2 + \gamma_7^2 + \gamma_7^3)(1 - 2\gamma_7^{s-4})),$$

и верна оценка $|\varphi(0) - \varphi(1/2^s)| \leq C|\gamma_7|^s$. Значит, $\alpha_\varphi \leq \log_2(1/|\gamma_7|)$. Далее,

$$\begin{aligned} T_ie_1 &= T_iT_jT_ke_4 = T_iT_je_5 = T_iT_jT_kT_ie_6 = 0, \\ T_ie_2 &= -d_7e_1 + d_7e_4 + (d_6 - d_7)e_6 + 2d_7, \quad T_ie_3 = e_2 + d_2e_6, \\ T_ie_7 &= \pm \frac{1}{2}((\gamma_4 - \gamma_7)e_1 - (\gamma_7 + 1)e_4 - \gamma_2e_5 + (\gamma_6 - \gamma_7)e_6 + \gamma_7e_7). \end{aligned}$$

Поэтому для произвольного вектора $w \in E_1$ и любых $d_1, d_2, \dots, d_m \in \{0, 1\}$ верна оценка

$$\|T_{d_1}T_{d_2} \cdots T_{d_m}w\| \leq C|\gamma_7|^m\|w\|,$$

и для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|T_{d_1}T_{d_2} \cdots T_{d_m}|_{E_1}\| \leq C|\gamma_7|^m.$$

Пользуясь предложением 2, отсюда выводим оценку $\alpha_\varphi \geq \log_2(1/|\gamma_7|)$. Таким образом, если $\gamma_5 = d_1 = d_3 = 1$ и $\gamma_7 \neq 0$, то $\alpha_\varphi = \log_2(1/|\gamma_7|)$. Теорема доказана.

Укажем в заключение три случая, когда $\widehat{\rho}(A_0, A_1) = 0$ и решение уравнения (2) является двоично-целой функцией. Пусть $y = x/8$ и $x \in [0, 8)$. Тогда, полагая

$$W(y) := w_1(y) + d_2w_2(y) + d_3w_3(y) + d_2d_4w_4(y) + d_3d_6w_6(y) + d_3d_7w_7(y),$$

получаем из формулы (11) следующие три разложения.

1) Если $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_7 = 0$, то

$$\begin{aligned} 8\varphi(x) = 1 + d_1\{ & W(y) + d_2d_5w_5(y) + d_3d_6\gamma_4w_{12}(y) + d_3d_6\gamma_5w_{13}(y) \\ & + d_3d_7\gamma_6w_{14}(y) + d_3d_7\gamma_4\gamma_6w_{28}(y) + d_3d_7\gamma_5\gamma_6w_{29}(y)\}. \end{aligned}$$

2) Если $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_5 = \gamma_7 = 0$, то

$$\begin{aligned} 8\varphi(x) = 1 + d_1\{ & W(y) + d_2d_5w_5(y) + d_2d_5\gamma_3w_{11}(y) + d_3d_6\gamma_4w_{12}(y) \\ & + d_3d_7\gamma_6w_{14}(y) + d_2d_5d_6\gamma_3w_{22}(y) + d_2d_5d_7\gamma_3w_{23}(y) \\ & + d_3d_7\gamma_4\gamma_6w_{28}(y) + d_2d_5d_6\gamma_3\gamma_4w_{44}(y) \\ & + d_2d_5d_7\gamma_3\gamma_6w_{46}(y) + d_2d_5d_7\gamma_3\gamma_4\gamma_6w_{92}(y)\}. \end{aligned}$$

3) Если $d_5 = \gamma_1 = \gamma_3 = \gamma_7 = 0$, то

$$\begin{aligned} 8\varphi(x) = 1 + d_1\{ & W(y) + d_3d_6\gamma_4w_{12}(y) + d_3d_7\gamma_6w_{14}(y) + d_3d_6\gamma_2\gamma_5w_{26}(y) \\ & + d_3d_7\gamma_4\gamma_6w_{28}(y) + d_3d_7\gamma_5\gamma_6w_{29}(y) + d_3d_4d_6\gamma_2\gamma_5w_{52}(y) \\ & + d_3d_7\gamma_2\gamma_5\gamma_6w_{58}(y) + d_3d_4d_7\gamma_2\gamma_5\gamma_6w_{116}(y)\}. \end{aligned}$$

Авторы благодарят В. Ю. Протасова за полезные обсуждения результатов данной статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, РХД, Ижевск, 2001.
- [2] И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005.
- [3] I. Daubechies, J. C. Lagarias, “Two-scale difference equations II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals”, *SIAM J. Math. Anal.*, **23**:4 (1992), 1031–1079.
- [4] D. Colella, C. Heil, “Characterization of scaling functions. Continuous solutions”, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, **15**:2 (1994), 496–518.
- [5] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.
- [6] F. Schipp, W. R. Wade, P. Simon, *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis*, Adam Hilger, Bristol, 1990.
- [7] Б. И. Голубов, *Элементы двоичного анализа*, Изд-во ЛКИ, М., 2007.
- [8] В. Ю. Протасов, Ю. А. Фарков, “Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой”, *Матем. сб.*, **197**:10 (2006), 129–160.
- [9] W. C. Lang, “Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group”, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **21**:2 (1998), 307–314.
- [10] Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп”, *Матем. заметки*, **82**:6 (2007), 934–952.
- [11] Ю. А. Фарков, “Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 193–220.
- [12] В. Ю. Протасов, “Фрактальные кривые и всплески”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:5 (2006), 123–162.
- [13] В. Ю. Протасов, “Обобщенный совместный спектральный радиус. Геометрический подход”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:5 (1997), 99–136.
- [14] Е. А. Родионов, Ю. А. Фарков, “Об оценках гладкости диадических вейвлетов на полупрямой”, *Тезисы докладов V Международного симпозиума “Ряды Фурье и их приложения”* (27 мая–3 июня, 2008), Изд-во ЦВВР, Ростов-на-Дону, 2008, 48–49.

Е. А. Родионов

Российский государственный геологоразведочный университет
E-mail: evgeny_980@list.ru

Поступило

23.07.2008

Исправленный вариант

20.01.2009

Ю. А. Фарков

Российский государственный геологоразведочный университет
E-mail: farkov@list.ru