Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Н. Сатторов, Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла в бесконечной области, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 445–455

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:18:07

УДК 517.946

Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла в бесконечной области

Э. Н. Сатторов

Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений Максвелла в пространственной неограниченной области по ее значениям на части границы этой области. Строится приближенное решение этой задачи, основанное на методе матрицы Карлемана.

Библиография: 14 названий.

Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений Максвелла в пространственной неограниченной области по ее значениям на части границы этой области, т.е. задача Коши.

Задача Коши для системы уравнений Максвелла, как и многие задачи Коши для нахождения регулярных решений эллиптических уравнений, в общем случае оказываются неустойчивыми относительно равномерно малых изменений начальных данных. Таким образом, эти задачи некорректно поставлены [1]. При исследовании задачи Коши будем предполагать априори существование ее решения. Более того, предполагается, что решение принадлежит некоторому заданному подмножеству функционального пространства, обычно компактному [2; с. 4]. Единственность решения следует из общей теоремы Холмгрена [3; с. 58].

После установления единственности в теоретических исследованиях некорректных задач возникают важные вопросы получения оценки условной устойчивости и построения регуляризующих операторов. В 1926 г. Карлеман [2; с. 41] построил формулу, которая связывает значения аналитической функции комплексного переменного в точках области с ее значениями на куске границы этой области. На основе этой формулы в [2; с. 34] введено понятие функции Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и в некоторых случаях указан способ ее построения. Конструкция функции Карлемана дает возможность в этих задачах построить регуляризацию и получить оценку условной устойчивости.

На протяжении последних десятилетий не ослабевал интерес к классической некорректной задаче математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в 1950-х гг. в работах [2], [4]–[7] и развивалось впоследствии в [8]–[11].

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ – точки трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ и однородная изотропная среда D есть неограниченная односвязная область

в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей, состоящей из плоскости $\Sigma: y_3 = 0$ и гладкой поверхности S , лежащей в полупространстве $y_3 > 0$, т.е. $\partial D = S \cup \Sigma$.

Рассмотрим в области D систему уравнений Максвелла в гармоническом режиме

$$\operatorname{rot} E - ikH = 0, \quad \operatorname{rot} H + ikE = 0, \quad (1)$$

где волновое число k задается выражением $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$, а ε и μ – электромагнитные постоянные (электрическая и магнитная проницаемость); $E = (E_1, E_2, E_3)$, $H = (H_1, H_2, H_3)$ – напряженности электрического и магнитного поля, ω – частота электромагнитного колебания.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Требуется определить регулярное решение $E(y)$, $H(y)$ системы (1) в области D , исходя из ее данных Коши, заданных на поверхности S :

$$[n(y), E(y)] = f(y), \quad [n(y), H(y)] = g(y), \quad y \in S, \quad (2)$$

где $n = (n_1, n_2, n_3)$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности ∂D в точке y , $f = (f_1, f_2, f_3)$, $g = (g_1, g_2, g_3)$ – заданные непрерывные вектор-функции.

Пусть вместо $f(y)$ и $g(y)$ заданы их непрерывные приближения $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$ с точностью δ , $\delta \in (0, 1)$ (в метрике $C(S)$). В данной работе строится семейство вектор-функций $E(x, f_\delta) = E^{\sigma\delta}(x)$, $H(x, g_\delta) = H^{\sigma\delta}(x)$ зависящих от положительного параметра $\sigma > 0$ (параметр регуляризации) и доказывается, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma(\delta)$ при $\delta \rightarrow 0$ семейство $E^{\sigma\delta}(x)$, $H^{\sigma\delta}(x)$ сходится к решению $E(x)$, $H(x)$ задачи (1), (2).

Следуя Тихонову [12], семейство функций $E^{\sigma\delta}(x)$, $H^{\sigma\delta}(x)$ назовем *регуляризованным решением задачи Коши* для системы уравнений Максвелла. Регуляризованное решение определяет устойчивый метод приближенного решения задачи.

С использованием результатов работ [2], [8] по задаче Коши для уравнения Лапласа и Гельмгольца в данной статье построена матрица Карлемана в явном виде и на ее основе – регуляризованное решение задачи Коши для системы уравнений (1). В [13] приведены теоремы существования матрицы Карлемана и критерий разрешимости более широкого класса краевых задач для эллиптических систем. Ранее в [10], [13] доказано, что матрица Карлемана существует во всякой задаче Коши для решений эллиптических систем, если только данные Коши задаются на граничном множестве положительной меры. Поскольку в данной статье идет речь о явных формулах, построение матрицы Карлемана в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Матрицей фундаментальных решений системы (1) называется симметричная матрица $E(y, x)$ для вектора $E(x)$:

$$E(y, x) = \|E_{ij}(y, x)\|_{3 \times 3},$$

где

$$E_{ij}(y, x) = \frac{\partial^2 V(y, x)}{\partial y_i \partial y_j} + \delta_{ij} k^2 V(y, x),$$

$$V(y, x) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}, \quad r = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2},$$

δ_{ij} – символ Кронекера и антисимметричная матрица $H(y, x)$ для вектора $H(x)$

$$H(y, x) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial V(y, x)}{\partial y_3} & -\frac{\partial V(y, x)}{\partial y_2} \\ -\frac{\partial V(y, x)}{\partial y_3} & 0 & \frac{\partial V(y, x)}{\partial y_1} \\ \frac{\partial V(y, x)}{\partial y_2} & -\frac{\partial V(y, x)}{\partial y_1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Развивая идею Лаврентьева, который ввел понятие функции Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа [2], дадим следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Матрицами Карлемана задачи (1), (2) называются (3×3) -матрицы $M_\sigma(y, x)$, $N_\sigma(y, x)$ удовлетворяющие следующим двум условиям:

1) выполнено

$$M_\sigma(y, x) = E(y, x) + G_{1\sigma}(y, x), \quad N_\sigma(y, x) = H(y, x) + G_{2\sigma}(y, x),$$

где σ – положительный числовой параметр, матрицы $G_{1\sigma}(y, x)$, $G_{2\sigma}(y, x)$ по переменной y удовлетворяют системе (1) всюду в области D , $E(y, x)$, $H(y, x)$ – матрицы фундаментальных решений уравнений (1);

2) выполнено

$$\int_{\Sigma} |M_\sigma(y, x)| dS_y \leq \varepsilon_1(\sigma), \quad \int_{\Sigma} |N_\sigma(y, x)| dS_y \leq \varepsilon_2(\sigma),$$

где $\varepsilon_1(\sigma), \varepsilon_2(\sigma) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \infty$ равномерно по x на компактных подмножествах D ;

здесь и далее $|M_\sigma(y, x)|$, $|N_\sigma(y, x)|$ – нормы матриц $M_\sigma = \|M_{\sigma,ij}\|$, $N_\sigma = \|N_{\sigma,ij}\|$ т.е.

$$|M_\sigma| = \left(\sum_{ij}^3 M_{\sigma,ij}^2 \right)^{1/2}, \quad |N_\sigma| = \left(\sum_{ij}^3 N_{\sigma,ij}^2 \right)^{1/2},$$

в частности,

$$|E| = \left(\sum_i^3 E_i^2 \right)^{1/2}, \quad |H| = \left(\sum_i^3 H_i^2 \right)^{1/2}$$

для векторов $E = (E_1, E_2, E_3)$, $H = (H_1, H_2, H_3)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Вектор-функции $E(y) = (E_1(y), E_2(y), E_3(y))$ и $H(y) = (H_1(y), H_2(y), H_3(y))$ называются *регулярными* в D , если $E_i(y), H_i(y) \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$, $i = 1, 2, 3$.

В теории уравнений в частных производных важную роль играют представления решений этих уравнений в виде функции типа потенциала. Приведем здесь формулу Стрэттона-Чу [14].

ТЕОРЕМА 1. Всякое регулярное решение $E(y)$, $H(y)$ системы уравнений (1) в области D определяется формулами

$$\begin{aligned} E(x) &= - \int_{\partial D} [n(y), E(y)] H(y, x) dS_y + \frac{1}{ik} \int_{\partial D} [n(y), H(y)] E(y, x) dS_y, & x \in D, \\ H(x) &= - \int_{\partial D} [n(y), H(y)] H(y, x) dS_y - \frac{1}{ik} \int_{\partial D} [n(y), E(y)] E(y, x) dS_y, & x \in D. \end{aligned} \quad (3)$$

Поскольку матрица Карлемана отличается от фундаментальных решений на решение транспонированной системы, формула Стрэттона–Чу остается справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на матрицу Карлемана.

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^3$ лежит внутри слоя $0 < y_3 < h$, $h = \pi/\rho$, $\rho > 0$, граница ее состоит из плоскости Σ : $y_3 = 0$ и гладкой поверхности S , заданной уравнением $y_3 = F(y_1, y_2)$, удовлетворяющей условиям

$$0 < F(y_1, y_2) \leq h, \quad |\text{grad } F(y_1, y_2)| \leq \text{const} < \infty, \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Обозначим через $A(D)$ пространство всех регулярных в D решений системы (1), а через $A_\rho(D)$ – класс функций из $A(D)$, удовлетворяющих следующему условию роста:

$$A_\rho(D) = \{E(y), H(y) \in A(D) : |E(y)| \leq \exp[o(e^{\rho|y'|})], \\ |H(y)| \leq \exp[o(e^{\rho|y'|})], |y'|^2 = y_1^2 + y_2^2, y \rightarrow \infty\}.$$

С целью построения приближенного решения задачи (1), (2) рассмотрим матрицы

$$M_\sigma(y, x) = \|M_{ij}(y, x, \sigma)\|_{3 \times 3} = \left\| \frac{\partial^2 \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_i \partial y_j} + \delta_{ij} k^2 \Phi_\sigma(y, x) \right\|_{3 \times 3}, \\ N_\sigma(y, x) = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_3} & -\frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_2} \\ -\frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_3} & 0 & \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_1} \\ \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_2} & -\frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial y_1} & 0 \end{array} \right\|, \quad (4)$$

где

$$\Phi_\sigma(y, x) = [-2\pi^2 K(x_3)]^{-1} \int_0^\infty \text{Im} \left[\frac{K(w)}{w - x_3} \right] \frac{\text{ch}(ku)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} du, \quad (5) \\ w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3, \quad \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2, \quad 0 < x_3 < h,$$

$K(w)$ – целая функция комплексного переменного, вещественная при вещественном w , ($w = u + iv$, u, v – действительные числа), $K(0) \neq 0$ и для любого $R > 0$ существует такое $C_R > 0$, что

$$\sup_{|\text{Re } w| < R, \text{Im } w \leq -C_R} (|K(w)| + |\text{Im } w| |K'(w)| + |\text{Im } w|^2 |K''(w)|) < \infty. \quad (6)$$

При вещественном w из вещественности $K(w)$ имеем $\overline{K(\overline{w})} = K(w)$. Тогда из (6) следует, что для любого $R > 0$

$$\sup_{|\text{Re } w| < R} \{|K(w)| + (1 + |\text{Im } w|) |K'(w)| + (1 + |\text{Im } w|^2) |K''(w)|\} < \infty. \quad (7)$$

Так как

$$\text{Im} \left(\frac{K(w)}{w} \right) = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{K(w)}{w} - \frac{K(\overline{w})}{\overline{w}} \right\} = \frac{\overline{w}K(w) - wK(\overline{w})}{2i(r^2 + u^2)} \\ = \frac{(y_3 - x_3) \text{Im } K(w) - \sqrt{\alpha^2 + u^2} \text{Re } K(w)}{r^2 + u^2},$$

то (5) имеет вид

$$-2\pi K(0)\Phi(y, x, k) = \int_0^\infty \left\{ \frac{(y_3 - x_3) \operatorname{Im} K(w)}{\sqrt{\alpha^2 + u^2}} - \operatorname{Re} K(w) \right\} \frac{\operatorname{ch}(ku)}{r^2 + u^2} du. \quad (8)$$

В силу того, что

$$\begin{aligned} & K(y_3 - x_3 + i\sqrt{\alpha^2 + u^2}) - K(y_3 - x_3 - i\sqrt{\alpha^2 + u^2}) \\ &= K(y_3 - x_3 + it\sqrt{\alpha^2 + u^2})|_{t=-1}^{t=1} = i\sqrt{\alpha^2 + u^2} \int_{-1}^1 K'(y_3 - x_3 + it\sqrt{\alpha^2 + u^2}) dt, \end{aligned}$$

из (7) и (8) следует, что при $y \neq x$ интеграл в (5) абсолютно сходится.

Если $K(w) \equiv 1$, то функция $\Phi_\sigma(y, x)$ является классическим фундаментальным решением уравнения Гельмгольца, т.е.

$$\Phi_\sigma(y, x) \equiv V(y, x) = \frac{1}{4\pi r} e^{-ikr}.$$

Можно показать, что

$$\frac{e^{-ikr}}{4\pi r} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(ku)}{r^2 + u^2} du,$$

где

$$r^2 + u^2 = (y_3 - x_3 + i\sqrt{\alpha^2 + u^2})(y_3 - x_3 - i\sqrt{\alpha^2 + u^2}),$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 + u^2} &= -\frac{1}{2i\sqrt{\alpha^2 + u^2}} \left(\frac{1}{(y_3 - x_3 + i\sqrt{\alpha^2 + u^2})} - \frac{1}{(y_3 - x_3 - i\sqrt{\alpha^2 + u^2})} \right) \\ &= -\operatorname{Im} \left(\frac{1}{(y_3 - x_3 + i\sqrt{\alpha^2 + u^2})} \right) \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + u^2}}. \end{aligned}$$

Используя эти тождества, мы получим выражение для классического фундаментального решения уравнения Гельмгольца.

Из результатов работы [8] вытекает

ЛЕММА 1. *Функция $\Phi_\sigma(y, x)$ является функцией Карлемана для уравнения Гельмгольца, т.е. обладает следующими двумя свойствами:*

1) *выполнено*

$$\Phi_\sigma(y, x) = V(y, x) + h_\sigma(y, x), \quad (9)$$

где $h_\sigma(y, x)$ – некоторая функция, определенная для всех значений y, x и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца

$$\Delta \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) h + k^2 h = 0, \quad y \in D;$$

2) *выполнено*

$$\int_\Sigma \left(|\Phi_\sigma(y, x)| + \left| \frac{\partial \Phi_\sigma(y, x)}{\partial n} \right| \right) dS_y \leq C(k, D) \sigma \exp(-\sigma x_3^2). \quad (10)$$

Докажем аналогичную лемму для системы (1).

ЛЕММА 2. Матрицы $M_\sigma(y, x)$, $N_\sigma(y, x)$ являются матрицами Карлемана задачи (1), (2), т.е. представимы в виде

$$M_\sigma(y, x) = E(y, x) + G_{1\sigma}(y, x), \quad N_\sigma(y, x) = H(y, x) + G_{2\sigma}(y, x), \quad (11)$$

где $G_{m\sigma} = \|G_{ij}(y, x, \sigma)\|_{3 \times 3}$, $m = 1, 2$, – матрицы, определенные для всех значений y, x и по переменной y удовлетворяющие системе (1) во всем $\mathbb{R}^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 1 и определения 1 имеем

$$\begin{aligned} M_\sigma(y, x) &= \left\| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [V(y, x) + h(y, x, \sigma)] + \delta_{ij} k^2 [V(y, x) + h(y, x, \sigma)] \right\| \\ &= E(y, x) + G_{1\sigma}(y, x) \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$N_\sigma(y, x) = H(y, x) + G_{2\sigma}(y, x).$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что матрицы $G_{m,\sigma}(y, x)$, $m = 1, 2$, по переменному y удовлетворяет системе (1) всюду в области D . Используя формулы (4), (5) и (10) нетрудно получить неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} |M_\sigma(y, x)| dS_y &\leq C_1(k, D) \sigma^4 \exp(-\sigma x_3^2), \\ \int_{\Sigma} |N_\sigma(y, x)| dS_y &\leq C_2(k, D) \sigma^4 \exp(-\sigma x_3^2), \end{aligned} \quad (12)$$

где константы $C_1(k, D)$, $C_2(k, D)$ не зависят от x . В силу определения 2 матрицы $M_\sigma(y, x)$, $N_\sigma(y, x)$, определенные формулами (4), (5), являются матрицами Карлемана для области D и части Σ . Лемма доказана.

В (5) положим

$$K(w) = \frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_3 + 2h}, \quad K(x_3) = \frac{e^{\sigma x_3^2}}{2h}$$

и, выделяя мнимую часть подынтегрального выражения, получим

$$\begin{aligned} -2\pi^2 \Phi_\sigma(y, x) &= h e^{\sigma(y^3 - x^3) - \sigma \alpha^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2} \psi_\sigma(x, y; u) \operatorname{ch}(ku)}{(u^2 + r^2)(u^2 + r^2 + 2h(h + y_3 - x_3))} du, \\ \psi_\sigma(x, y; u) &= -2(y_3 - x_3 + h) \cos(2\sigma y_3 \sqrt{u^2 + \alpha^2}) \\ &\quad + \left(-\sqrt{u^2 + \alpha^2} + \frac{(y_3 - x_3)(y_3 - x_3 + 2h)}{\sqrt{u^2 + \alpha^2}} \right) \sin(2\sigma y_3 \sqrt{u^2 + \alpha^2}). \end{aligned} \quad (13)$$

(Сходимость несобственного интеграла в правых частях равенств (5) и (13) обеспечивается присутствием множителя $e^{-\sigma u^2}$.)

Предположим, что вектор-функции $E(y), H(y) \in A(D)$ на поверхности Σ удовлетворяют неравенствам

$$|[n(y), E(y)]| \leq K, \quad |[n(y), H(y)]| \leq K, \quad y \in \Sigma. \quad (14)$$

В этих предположениях формулы Стрэттона–Чу [14] имеют вид

$$\begin{aligned} E(x) &= - \int_{\partial D} [n(y), E(y)] N_{\sigma}(y, x) dS_y + \frac{1}{ik} \int_{\partial D} [n(y), H(y)] M_{\sigma}(y, x) dS_y, & x \in D, \\ H(x) &= - \int_{\partial D} [n(y), H(y)] N_{\sigma}(y, x) dS_y - \frac{1}{ik} \int_{\partial D} [n(y), E(y)] M_{\sigma}(y, x) dS_y, & x \in D. \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} E^{\sigma}(x) &= - \int_S f(y) N_{\sigma}(y, x) dS_y + \frac{1}{ik} \int_S g(y) M_{\sigma}(y, x) dS_y, & x \in D, \\ H^{\sigma}(x) &= - \int_S g(y) N_{\sigma}(y, x, \sigma) dS_y - \frac{1}{ik} \int_S f(y) M_{\sigma}(y, x) dS_y, & x \in D. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $E(x), H(x) \in A_{\rho}(D)$ удовлетворяют граничному условию (14). Тогда

$$\begin{aligned} |E(x) - E^{\sigma}(x)| &\leq KC_{\rho}(x, k) \sigma^4 \exp(-\sigma x_3^2), & x \in D, \\ |H(x) - H^{\sigma}(x)| &\leq KC_{\rho}(x, k) \sigma^4 \exp(-\sigma x_3^2), & x \in D, \end{aligned} \quad (16)$$

где

$$C_{\rho}(x, k) = C(k, \rho) \int_{\Sigma} |r^{-2} + r^{-3}| dS_y.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (15) имеем

$$\begin{aligned} E(x) - E^{\sigma}(x) &= - \int_{\Sigma} [n(y), E(y)] N_{\sigma}(y, x) dS_y + \frac{1}{ik} \int_{\Sigma} [n(y), H(y)] M_{\sigma}(y, x) dS_y, \\ H(x) - H^{\sigma}(x) &= - \int_{\Sigma} [n(y), H(y)] N_{\sigma}(y, x) dS_y - \frac{1}{ik} \int_{\Sigma} [n(y), E(y)] M_{\sigma}(y, x) dS_y, \end{aligned}$$

а в силу (14)

$$\begin{aligned} |E(x) - E^{\sigma}(x)| &\leq K \int_{\Sigma} \left(|N_{\sigma}(y, x)| + \frac{1}{|k|} |M_{\sigma}(y, x)| \right) dS_y, \\ |H(x) - H^{\sigma}(x)| &\leq K \int_{\Sigma} \left(|N_{\sigma}(y, x)| + \frac{1}{|k|} |M_{\sigma}(y, x)| \right) dS_y. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим $M_{\sigma}(y, x), N_{\sigma}(y, x)$. Для этого необходимо оценить

$$\Phi_{\sigma}(y, x), \quad \frac{\partial \Phi_{\sigma}(y, x)}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_{\sigma}(y, x)}{\partial y_i \partial y_j}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Из (13) имеем

$$|\Phi_{\sigma}(y, x)| \leq C_1(\rho, k) r^{-1} \sigma e^{\sigma(y_3^2 - x_3^2)}. \quad (18)$$

Нетрудно проверить, что при $i, j = 1, 2, 3$

$$\left| \frac{\partial \Phi_{\sigma}(y, x)}{\partial y_i} \right| \leq C_2(\rho, k) r^{-2} \sigma^2 e^{\sigma(y_3^2 - x_3^2)}, \quad \left| \frac{\partial^2 \Phi_{\sigma}(y, x)}{\partial y_i \partial y_j} \right| \leq C_3(\rho, k) r^{-3} \sigma^4 e^{\sigma(y_3^2 - x_3^2)}. \quad (19)$$

Тогда по определению $M_{\sigma}(y, x), N_{\sigma}(y, x)$ и из неравенств (18), (19) получим

$$|M_{\sigma}(y, x)| \leq C_4(\rho, k) r^{-3} \sigma^4 e^{\sigma(y_3^2 - x_3^2)}, \quad |N_{\sigma}(y, x)| \leq C_5(\rho, k) r^{-2} \sigma^2 e^{\sigma(y_3^2 - x_3^2)}. \quad (20)$$

Следовательно, из последних неравенств и (17) имеем

$$\begin{aligned} |E(x) - E^\sigma| &\leq K\sigma^4 \exp(-\sigma x_3^2) \int_{\Sigma} [C_4(\rho, k)r^{-3} + C_5(\rho, k)r^{-2}] dS_y, \\ |H(x) - H^\sigma| &\leq K\sigma^4 \exp(-\sigma x_3^2) \int_{\Sigma} [C_4(\rho, k)r^{-3} + C_5(\rho, k)r^{-2}] dS_y. \end{aligned}$$

Обозначив

$$C_\rho(x, k) = \int_{\Sigma} [C_4(\rho, k)r^{-3} + C_5(\rho, k)r^{-2}] dS_y,$$

получим (16). Теорема 2 доказана.

Приведем оценку устойчивости.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $E(y), H(y) \in A_\rho(D)$ на гиперплоскости $y_3 = 0$ удовлетворяют граничному условию (14), а на S — условию

$$|[n(y), E(y)]| + |[n(y), H(y)]| \leq \delta, \quad y \in S, \quad 0 < \delta < 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |E(x)| &\leq C_\rho(x, k) \frac{2K^{1-x_3^2/h^2}}{h^8} \delta^{(x_3/h)^2} \ln^4\left(\frac{K}{\delta}\right), \quad x \in D, \\ |H(x)| &\leq C_\rho(x, k) \frac{2K^{1-x_3^2/h^2}}{h^8} \delta^{(x_3/h)^2} \ln^4\left(\frac{K}{\delta}\right), \quad x \in D, \end{aligned}$$

где

$$C_\rho(x, k) = C(\rho, k) \int_{\partial D} [r^{-2} + r^{-3}] dS_y.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 2 вытекает

$$|E(x)| \leq KC'_\rho(x, k)\sigma^4 e^{-\sigma x_3^2} |E_\sigma(x)|, \quad |H(x)| \leq KC'_\rho(x, k)\sigma^4 e^{-\sigma x_3^2} |H_\sigma(x)|.$$

Согласно условию теоремы 3 и неравенствам (20) имеем

$$\begin{aligned} |E_\sigma(x)| &\leq \delta \int_S \left(|N_\sigma(y, x)| + \frac{1}{|k|} |M_\sigma(y, x)| \right) dS_y \\ &\leq \delta \sigma^4 e^{-\sigma x_3^2} \int_S [C_4(\rho, k)r^{-2} + C_5(\rho, k)r^{-3}] e^{\sigma y_3^2} dS_y \\ &\leq \delta \sigma^4 e^{\sigma(h^2 - x_3^2)} \int_S [C_4(\rho, k)r^{-2} + C_5(\rho, k)r^{-3}] dS_y, \\ |H_\sigma(x)| &\leq \delta \sigma^4 e^{\sigma(h^2 - x_3^2)} \int_S [C_4(\rho, k)r^{-2} + C_5(\rho, k)r^{-3}] dS_y. \end{aligned}$$

Теперь из них

$$|E(x)| \leq C_\rho(x, k)\sigma^4 e^{-\sigma x_3^2} [K + \delta e^{\sigma h^2}], \quad |H(x)| \leq C_\rho(x, k)\sigma^4 e^{-\sigma x_3^2} [K + \delta e^{\sigma h^2}],$$

где $K = \delta e^{\sigma h^2}$ или $\sigma = (1/h^2) \ln(K/\delta)$. В результате получим

$$\begin{aligned} |E(x)| &\leq C_\rho(x, k) \frac{2K^{1-x_3^2/h^2}}{h^8} \delta^{(x_3/h)^2} \ln^4\left(\frac{K}{\delta}\right), & x \in D. \\ |H(x)| &\leq C_\rho(x, k) \frac{2K^{1-x_3^2/h^2}}{h^8} \delta^{(x_3/h)^2} \ln^4\left(\frac{K}{\delta}\right), & x \in D. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Теперь предположим, что вместо $[n(y), E(y)]$, $[n(y), H(y)]$ на поверхности S заданы их непрерывные приближения $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$ соответственно,

$$\max_S |[n(y), E(y)] - f_\delta(y)| < \delta, \quad \max_S |[n(y), H(y)] - g_\delta(y)| < \delta, \quad 0 < \delta < 1. \quad (21)$$

Предполагаем, что S удовлетворяет условиям Ляпунова. Определим вектор-функции $E^{\sigma\delta}(x)$, $H^{\sigma\delta}(x)$ формулами

$$\begin{aligned} E^{\sigma\delta}(x) &= - \int_S N_\sigma(y, x) f_\delta(y) dS_y + \frac{1}{ik} \int_S M_\sigma(y, x) g_\delta(y) dS_y, & x \in D, \\ H^{\sigma\delta}(x) &= - \int_S N_\sigma(y, x) g_\delta(y) dS_y - \frac{1}{ik} \int_S M_\sigma(y, x) f_\delta(y) dS_y, & x \in D. \end{aligned} \quad (22)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $E(y), H(y) \in A_\rho(D)$ удовлетворяют граничному условию (14). Тогда

$$\begin{aligned} |E(x) - E^{\sigma\delta}(x)| &\leq C_\rho(x, k) \frac{2K^{1-x_3^2/h^2}}{h^8} \delta^{(x_3/h)^2} \ln^4\left(\frac{K}{\delta}\right), \\ |H(x) - H^{\sigma\delta}(x)| &\leq C_\rho(x, k) \frac{2K^{1-x_3^2/h^2}}{h^8} \delta^{(x_3/h)^2} \ln^4\left(\frac{K}{\delta}\right), \end{aligned}$$

где

$$\sigma = h^{-1} \ln\left(\frac{K}{\delta}\right), \quad C_\rho(x, k) = C(x, k) \int_{\partial D} |r^{-2} + r^{-3}| dS_y.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (15) и (22) имеем

$$\begin{aligned} E(x) - E^{\sigma\delta}(x) &= - \int_\Sigma [n(y), E(y)] N_\sigma(y, x) dS_y + \frac{1}{ik} \int_\Sigma [n(y), H(y)] M_\sigma(y, x) dS_y \\ &\quad - \int_S \{[n(y), E(y)] - f_\delta(y)\} N_\sigma(y, x) dS_y \\ &\quad + \frac{1}{ik} \int_S \{[n(y), H(y)] - g_\delta(y)\} M_\sigma(y, x) dS_y, \\ H(x) - H^{\sigma\delta}(x) &= - \int_\Sigma [n(y), H(y)] N_\sigma(y, x) dS_y - \frac{1}{ik} \int_\Sigma [n(y), E(y)] M_\sigma(y, x) dS_y \\ &\quad - \int_S \{[n(y), H(y)] - g_\delta(y)\} N_\sigma(y, x) dS_y \\ &\quad - \frac{1}{ik} \int_S \{[n(y), E(y)] - f_\delta(y)\} M_\sigma(y, x) dS_y. \end{aligned}$$

В силу теорем 2 и 3 получим

$$\begin{aligned} & |E(x) - E^{\sigma\delta}(x)| \\ & \leq K \int_{\Sigma} \left\{ |N_{\sigma}(y, x)| + \frac{1}{|k|} |M_{\sigma}(y, x)| \right\} dS_y + \delta \int_S \left\{ |N_{\sigma}(y, x)| + \frac{1}{|k|} |M_{\sigma}(y, x)| \right\} dS_y \\ & \leq C_{\rho}(x, k) \frac{2K^{1-x_3^2/h^2}}{h^8} \delta^{(x_3/h)^2} \ln^4 \left(\frac{K}{\delta} \right) \end{aligned}$$

и, аналогично,

$$|H(x) - H^{\sigma\delta}(x)| \leq C_{\rho}(x, k) \frac{2K^{1-x_3^2/h^2}}{h^8} \delta^{(x_3/h)^2} \ln^4 \left(\frac{K}{\delta} \right).$$

Теорема 4 доказана.

Из доказанных теорем получаем

СЛЕДСТВИЕ. *Предельные равенства*

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} E^{\sigma}(x) &= E(x), & \lim_{\sigma \rightarrow \infty} H^{\sigma}(x) &= H(x), \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} E^{\sigma\delta}(x) &= E(x), & \lim_{\delta \rightarrow 0} H^{\sigma\delta}(x) &= H(x), \end{aligned}$$

выполняются равномерно на каждом компакте из D .

В заключение автор выражает искреннюю благодарность академику М. М. Лаврентьеву и профессору Ш. Ярмухамедову за постановку задачи и постоянные обсуждения в процессе ее решения, а также рецензенту за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж. Адамар, *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа*, Наука, М., 1978.
- [2] М. М. Лаврентьев, *О некоторых некорректных задачах математической физики*, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
- [3] Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1966.
- [4] М. М. Лаврентьев, "О задаче Коши для уравнения Лапласа", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **20**:6 (1956), 819–842.
- [5] М. М. Лаврентьев, "О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка", *Докл. АН СССР*, **112**:2 (1957), 195–197.
- [6] С. Н. Мергелян, "Гармоническая аппроксимация и приближённое решение задачи Коши для уравнения Лапласа", *УМН*, **11**:5 (1956), 3–26.
- [7] В. К. Иванов, "Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе", *Дифференц. уравнения*, **1** (1965), 131–136.
- [8] Ш. Я. Ярмухамедов, "О задаче Коши для уравнения Лапласа", *Докл. АН СССР*, **235**:2 (1977), 281–283.
- [9] Ш. Я. Ярмухамедов, Т. И. Ишанкулов, О. И. Махмудов, "О задаче Коши для системы уравнений теории упругости в пространстве", *Сиб. матем. журн.*, **33**:1 (1992), 186–190.
- [10] Л. А. Айзенберг, Н. Н. Тарханов, "Абстрактная формула Карлемана", *Докл. АН СССР*, **298**:6 (1988), 1292–1296.

- [11] Э. Н. Сатторов, Дж. Мардонов, “Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла”, *Тезисы докладов международной конференции “Ill-posed and Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis”* (Самарканд, Узбекистан, Сентябрь 11–15, 2000), Самаркандский гос. ун-т, Самарканд, 2000, 77.
- [12] А. Н. Тихонов, “О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации”, *Докл. АН СССР*, **151**:3 (1963), 501–504.
- [13] Н. Н. Тарханов, “О матрице Карлемана для эллиптических систем”, *Докл. АН СССР*, **284**:2 (1985), 294–297.
- [14] J. A. Stratton, L. J. Chu, “Diffraction theory of electromagnetic waves”, *Phys. Rev.*, **56**:1 (1939), 99–107.

Э. Н. Сатторов

Самаркандский государственный университет, Узбекистан

E-mail: Sattorov-e@rambler.ru

Поступило

27.04.2006