Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Жужома, Н. В. Исаенкова, О классификации одномерных растягивающихся аттракторов, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 360–370

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8504>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 15:00:51

О классификации одномерных растягивающихся аттракторов

Е. В. Жужома, Н. В. Исаенкова

Показывается, что в любой размерности $d \geq 3$ существуют диффеоморфизмы с одномерными растягивающимися аттракторами компактных d -многообразий такие, что ограничения диффеоморфизмов на эти аттракторы внутренне сопряжены, но окрестностно не сопряжены.

Библиография: 26 названий.

Введение. Пусть M – компактное гладкое многообразие с непустой границей, и пусть $f: M \rightarrow f(M) \subset M$ – диффеоморфизм на свой образ, причем включение $f(M) \subset M$ собственное. Предположим, что f имеет инвариантное замкнутое множество Λ (основные понятия и факты см. в [1], [2; гл. 1]). Следуя [3], [4], будем называть Λ *растягивающимся аттрактором*, если Λ есть притягивающее, гиперболическое множество, в котором плотны периодические точки, и размерность неустойчивого многообразия любой точки из Λ равна топологической размерности $d = \dim \Lambda$ множества Λ . Согласно [4] и [5] растягивающиеся аттракторы локально устроены как произведение канторова множества на евклидово пространство $\mathbb{R}^d$.

В качественной теории динамических систем имеется два основных типа классификации преобразований с точностью до сопряженности: внутренняя и внешняя. Приведем точные определения. Пусть преобразования $f: M \rightarrow M$, $g: N \rightarrow N$ имеют инвариантные множества Λ_f , Λ_g соответственно. Ограничения $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ этих преобразований на их инвариантные множества называются *внутренне сопряженными*, если существует гомеоморфизм $\varphi: \Lambda_f \rightarrow \Lambda_g$ (здесь предполагается, что топология на множествах Λ_f , Λ_g индуцируется топологией многообразия M) такой, что $\varphi \circ f|_{\Lambda_f} = g \circ \varphi|_{\Lambda_f}$. Если φ можно продолжить до гомеоморфизма $\varphi: M \rightarrow N$ или $\varphi: U(\Lambda_f) \rightarrow U(\Lambda_g)$ некоторых окрестностей $U(\Lambda_f)$, $U(\Lambda_g)$ множеств Λ_f , Λ_g соответственно, сохранив соотношение $\varphi \circ f|_{\Lambda_f} = g \circ \varphi|_{\Lambda_f}$, то $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ называются *окрестностно сопряженными*. Ясно, что из окрестностной сопряженности следует внутренняя сопряженность. Соответствующую классификацию будем называть *внутренней* и *окрестностной*. Можно сказать, что внутренняя классификация учитывает только динамику преобразования на инвариантном множестве. Окрестностная классификация учитывает дополнительно вложения инвариантных множеств в многообразиях.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00547).

Внутренняя классификация ограничений диффеоморфизмов на их растягивающиеся аттракторы получена Вильямсом [3], [4], [6]. Поэтому естественным образом возник вопрос: влечет ли внутренняя классификация окрестностную. В работе [7] было доказано, что ответ, вообще говоря, отрицательный. Именно, Робинсон и Вильямс [7] построили два диффеоморфизма $f: M \rightarrow f(M) \subset M$, $g: N \rightarrow g(N) \subset N$ пятимерных компактных многообразий M , N в себя с двумерными растягивающимися аттракторами Λ_f , Λ_g соответственно такими, что $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ внутренне сопряжены, но окрестностно не сопряжены. Что касается других размерностей, то этот вопрос до настоящего времени оставался открытым.

Цель настоящей статьи состоит в доказательстве следующего утверждения: *для любого натурального $d \geq 3$ существуют d -мерные компактные многообразия M^d , N^d и диффеоморфизмы $f: M^d \rightarrow f(M^d) \subset M^d$, $g: N^d \rightarrow g(N^d) \subset N^d$ с одномерными растягивающимися аттракторами Λ_f , Λ_g соответственно такие, что ограничения $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ внутренне сопряжены, но окрестностно не сопряжены.*

Для $d = 3$ данное утверждение можно извлечь из работы [8], в которой рассматривается окрестностная классификация так называемых чистых соленидов Смейла. Поэтому основное внимание мы уделяем случаю $d \geq 4$. Диффеоморфизм f является непосредственным обобщением конструкции Смейла [9] диффеоморфизма d -многообразия $S^1 \times D^{d-1}$ в себя, где D^{d-1} — $(d-1)$ -мерный шар. В этом случае Λ_f локально гомеоморфен прямому произведению прямой $\mathbb{R}$ на стандартное канторово множество в D^{d-1} . Построение диффеоморфизма g следует идеям работ [7], [10]. Именно, g есть диффеоморфизм d -многообразия $T^{d-2} \times D^2$ в себя, где T^{d-2} — $(d-2)$ -мерный тор,

$$T^{d-2} = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{d-2}.$$

В этом случае Λ_g локально гомеоморфен прямому произведению прямой $\mathbb{R}$ либо на ожерелье Антуана [11] (см. также [12]) в случае $d = 4$, либо на ожерелье Антуана–Бланкеншипа [13] в случае $d \geq 5$. В обоих случаях Λ_f гомеоморфно Λ_g , но не существует гомеоморфизма, переводящего окрестность Λ_f в окрестность Λ_g .

Гринес любезно сообщил авторам, что из работ [14]–[19] можно извлечь, что из внутренней сопряженности одномерных растягивающихся аттракторов диффеоморфизмов двумерных компактных многообразий следует их окрестностная сопряженность. Отметим также работы [4], [5], [11], где получена окрестностная классификация растягивающихся аттракторов коразмерности один.

Структура работы следующая. Сначала в пункте 1 приводится унифицирующая конструкция диффеоморфизма с одномерным растягивающимся аттрактором. Ограничение диффеоморфизма на этом аттракторе сопряжено специальному сдвигу на обратном пределе линейного растягивающего отображения окружности. Затем в пункте 2 в рамках указанной конструкции приводятся примеры диффеоморфизмов f , g .

1. Основная конструкция. Пусть $M^n = M$ — компактное гладкое n -многообразие с непустым краем, наделенное римановой структурой, которая индуцирует на M метрику ρ . Для гладкого преобразования $\psi: M \rightarrow M$ будем обозначать через $D\psi: TM \rightarrow TM$ дифференциал ψ , который определен на касательном расслоении TM . Отметим, что на каждом слое $T_p M \subset TM$, $p \in M$, дифференциал $D\psi$

является линейным отображением $T_p M \rightarrow T_{\psi(p)M}$, для которого стандартным образом определяется норма $\|D\psi|_{T_p M}\|$. Положим $\|D\psi\| = \max_{p \in M} \|D\psi|_{T_p M}\|$.

Предположим, что существует *гомотопная тождественному* периодическая изометрия $R: M \rightarrow M$ такая, что

$$R^k \equiv \text{id}, \quad k \geq 2, \quad \|DR\| = 1. \quad (1)$$

Пусть $e: M \rightarrow e(M) \subset M$ – вложение M в себя, являющееся равномерным сжатием,

$$\|De\| \leq \lambda < 1 \quad \text{для некоторого } \lambda > 0 \quad (2)$$

такое, что

$$e(M) \subset \text{int } M \quad \text{и множества } M, R(M), \dots, R^{k-1}(M) \text{ попарно не пересекаются.} \quad (3)$$

Будем считать вложение e гладким, так что множество $e(M) \stackrel{\text{def}}{=} N$ есть гладкое подмногообразие многообразия M .

Обозначим через $\text{diam}(K)$ диаметр множества $K \subset M$,

$$\text{diam}(K) = \max_{(p,q) \in K \times K} \rho(p,q).$$

Из (2) вытекает, что для любого подмножества $K \subset M$

$$\text{diam}(e^n(K)) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Действительно, из [23; теорема 7.3], и (2) следует, что e является сжимающим отображением с коэффициентом сжатия λ . Отсюда $\text{diam}(e^n(K)) \leq \lambda^n \cdot \text{diam}(K)$. Так как $0 < \lambda < 1$, получаем (4).

Определим отображение $f_i: [i/k; (i+1)/k] \times M \rightarrow [0, 1] \times M$, $i \in \{0, \dots, k-1\}$, положив

$$f_i(t, z) = (kt - i, R^i \circ e(z)), \quad t \in \left[\frac{i}{k}; \frac{i+1}{k}\right], \quad z \in M. \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что f_i является отображением множества $[i/k; (i+1)/k] \times M$ на множество $[0; 1] \times R^i(N)$.

Рассмотрим фактор-многообразие M_1 , получаемое из множества $[0; 1] \times M$ отождествлением точек $(1, z)$, $(0, R(z))$,

$$M_1 = [0; 1] \times M / ((1, z) \simeq (0, R(z))), \quad z \in M.$$

Согласно (5)

$$f_i\left(\frac{i+1}{k}, z\right) = (1, R^i \circ e(z)), \quad f_{i+1}\left(\frac{i+1}{k}, z\right) = (0, R^{i+1} \circ e(z)) \simeq (1, R^i \circ e(z));$$

значит, совокупность отображений $f_0, \dots, f_{k-1}$ порождает отображение $F: M_1 \rightarrow M_1$, которое является гомеоморфизмом на свой образ, $M_1 \rightarrow f(M_1) \subset M_1$. Так как R гомотопна тождественному, то M_1 гомеоморфно прямому произведению $S^1 \times M$. Из (5) получаем

$$Df_i(t, z)|_{t=(i+1)/k} = (k, DR^i \circ e(z)) = (k, De(z)),$$

поскольку

$$DR^i \circ e(z) = DR(R^{i-1} \circ e(z)) \cdots DR \circ e(z) \cdot De(z) = De(z).$$

Аналогично, $Df_{i+1}(t, z)|_{t=(i+1)/k} = (k, De(z))$. Отсюда и (5) вытекает, что F является диффеоморфизмом на свой образ, причем дифференциал DF сохраняет естественное разложение $T(M_1) = T(S^1 \times M) = T(S^1) \oplus T(M)$,

$$DF = (k, De): T(S^1) \oplus T(M) \rightarrow T(S^1) \oplus T(M). \quad (6)$$

Так как включение $f(M_1) \subset M_1$ собственное и отображение $M_1 \rightarrow f(M_1)$ является диффеоморфизмом на свой образ, получаем цепочку последовательно вложенных множеств

$$\cdots \subset \mathcal{N}_{j+1} \subset \mathcal{N}_j \subset \cdots \subset \mathcal{N}_1 \subset M_1, \quad \text{где } \mathcal{N}_j = \bigcap_{i=0}^j F^i(M_1). \quad (7)$$

Положим

$$\bigcap_{j \geq 0} \mathcal{N}_j = \bigcap_{i \geq 0} F^i(M_1) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Sol}(F).$$

Так как множества $\mathcal{N}_j$ замкнутые, из (7) следует, что $\text{Sol}(F)$ есть замкнутое и растягивающее множество.

ЛЕММА 1. *Множество $\text{Sol}(F)$ инвариантно относительно F и F^{-1} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (7) $F^i(M_1) \supset F^{i+1}(M_1)$. Тогда

$$F(\text{Sol}(F)) = F\left(\bigcap_{n \geq 0} F^n(M_1)\right) = \bigcap_{n \geq 0} F^{n+1}(M_1) = \text{Sol}(F).$$

Аналогично

$$F^{-1}(\text{Sol}(F)) = F^{-1}\left(\bigcap_{n \geq 0} F^n(M_1)\right) = \bigcap_{n \geq 0} F^{n-1}(M_1) = \text{Sol}(F).$$

Доказательства следующих двух лемм, описывающих локальную структуру множества $\text{Sol}(F)$, полностью аналогичны доказательствам предложений 7.2, 7.3 из [21]. Для удобства читателя мы их схематично приводим.

Множество $\{t\} \times M \stackrel{\text{def}}{=} M_t$ назовем *t-сечением*, где $t \in S^1$. Каждое сечение естественным образом отождествляется с M посредством проекции $p_2: S^1 \times M \rightarrow M$. Согласно (5) диффеоморфизм F переводит t -сечение в $(kt \bmod 1)$ -сечение. Поэтому естественным образом определяется диаметр множества $F^n(M_t)$, $\text{diam } F^n(M_t) = \text{diam } p_2(F^n(M_t))$.

ЛЕММА 2. *Для любого фиксированного $t \in S^1$, $\text{diam } F^n(M_t) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, причем стремление величины $\text{diam } F^n(M_t)$ к нулю равномерно относительно t .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку R – изометрия, а отображение F переводит t -сечение в $(kt \bmod 1)$ -сечение, то $\text{diam } F^n(M_t) = \text{diam } e^n(M)$. Отсюда и (4) следует требуемый результат.

ЛЕММА 3. Пересечение $M_t \cap \text{Sol}(F) = C_t$ есть множество канторовского типа (совершенное, замкнутое и нигде не плотное) для любого фиксированного $t \in S^1$. Более того, $\text{Sol}(F)$ локально гомеоморфно прямому произведению C_t на $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $M_t \cap \text{Sol}(F)$ замкнуто, так как является пересечением замкнутых множеств.

Сначала покажем индукцией по n , что пересечение $\mathcal{N}_n \cap M_t$ состоит из k^n связных компонент. Непосредственно из определения отображения F вытекает, что множество $M_t \cap F(M_1)$ состоит из k связных компонент. Так как имеется k различных значений $t_1, \dots, t_k \in S^1$ таких, что $t = kt_1 \bmod 1 = \dots = kt_k \bmod 1$, то

$$M_t \cap \mathcal{N}_n = \bigcup_{i=1}^k F(\mathcal{N}_{n-1} \cap M_{t_i}).$$

Согласно предположению индукции, каждое множество $\mathcal{N}_{n-1} \cap M_{t_i}$ состоит из k^{n-1} связных компонент. Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Согласно лемме 2 диаметр каждой компоненты связности стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $M_t \cap \text{Sol}(F)$ совершенное и нигде не плотное. Поэтому $\text{Sol}(F)$ локально гомеоморфно прямому произведению множества канторовского типа на $\mathbb{R}$.

Следуя [3], [4] построим символическую модель ограничения $F|_{\text{Sol}(F)}$ отображения F на $\text{Sol}(F)$. Обозначим через $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$ (здесь $\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ – множество целых неотрицательных чисел) прямое произведение счетного семейства окружностей $S_i^1 = S^1$, наделенное тихоновской топологией (напомним, что в этой топологии база образована множествами $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} V_i$, где V_i открыты в S_i^1 , и только для конечного множества индексов i множества V_i отличны от S_i^1 ; см., например, [25; с. 155]). Точками множества $\prod_{i \in \mathbb{N}} S_i^1$ являются последовательности $\{t_i\}_{i=0}^\infty$, где $t_i \in S_i^1$. Обозначим через Σ_k^- подмножество множества $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$, состоящее из последовательностей $\{t_i\}_{i=0}^\infty$, где $t_i = kt_{i+1} \bmod 1$ при всех $i \geq 0$. Определим на Σ_k^- отображение $\widehat{E}_k: \Sigma_k^- \rightarrow \Sigma_k^-$, положив

$$\widehat{E}_k(\{t_0, \dots, t_i, \dots\}) = \{kt_0 \bmod 1, t_0, \dots, t_i, \dots\}.$$

Пара $(\Sigma_k^-, \widehat{E}_k)$ является обратным пределом линейного растягивающего отображения окружности $E_k: S^1 \rightarrow S^1$, $E_k(x) = kx \bmod 1$, степени k .

Ключевым для построения символической модели является следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Каждой точке $p \in \text{Sol}(F)$ соответствует единственная последовательность точек $\{t_i\}_{i=0}^\infty$, $t_i \in S^1$, и соответствующая последовательность t_i -сечений M_{t_i} такие, что

- $p \in \dots \subset F^{i+1}(M_{t_{i+1}}) \subset F^i(M_{t_i}) \subset \dots \subset M_{t_0}$;
- $p = \bigcap_{i \geq 0} F^i(M_{t_i})$;
- $t_i = E_k(t_{i+1})$, $i \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для фиксированной точки p существует единственная точка $t_0 \in S^1$ такая, что $p \in M_{t_0}$. Из (5) следует, что существуют $s_1, \dots, s_k \in S^1$ такие, что $E_k(s_1) = E_k(s_2) = \dots = E_k(s_k) = t_0$, и множества $F(M_{s_1}), \dots, F(M_{s_k})$ принадлежат

t_0 -сечению M_{t_0} . Из (3) следует, что $F(M_{s_1}), \dots, F(M_{s_k})$ попарно не пересекаются. Поэтому существует единственное s_j такое, что $p \in F(s_j)$. Положим $t_1 = s_j$. Продолжая аналогичным образом, получаем значения $t_2, t_3, \dots$ и соответствующие им множества $F^2(M_{t_2}), F^3(M_{t_3}), \dots$. Из построения вытекает, что $t_i = E_k(t_{i+1})$ для всех $i \geq 0$. Из леммы 2 следует, что $p = \bigcap_{i \geq 0} F^i(M_{t_i})$.

Отображение $p \rightarrow \{t_i\}_0^\infty$ в силу леммы 4 обозначим через $h: \text{Sol}(F) \rightarrow \Sigma_k^-$. В данных обозначениях имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 5. *Отображение h осуществляет сопряженность отображений*

$$F|_{\text{Sol}(F)}: \text{Sol}(F) \rightarrow \text{Sol}(F), \quad \hat{E}_k: \Sigma_k^- \rightarrow \Sigma_k^-.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку пересечение последовательно вложенных друг в друга компактных множеств непустое, пересечение $\bigcap_{i \geq 0} F^i(M_{t_i})$ непустое для любой последовательности $\{t_i\}_0^\infty \in \Sigma_k^-$. Из леммы 2 следует, что это пересечение состоит из одной точки. Поэтому h есть отображение *на*.

Для двух различных точек $z, z' \in \text{Sol}(F)$ найдутся две непересекающиеся компоненты $F^i(M_{t_i}), F^i(M_{t'_i})$ из соответствующих последовательностей компонент, удовлетворяющих лемме 4, так как их диаметры стремятся к нулю. Отсюда следует, что h взаимно однозначно.

Рассмотрим произвольную окрестность U точки $h(p) = \{t_i\}_0^\infty$, $p \in \text{Sol}(F)$. Согласно определению топологии на множестве Σ_k^- можно считать, что U задается числами $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ такими, что

$$U = \{\{x_i\}_0^\infty \in \Sigma_k^-: |x_i - t_i| < \varepsilon, i = 0, \dots, r\}.$$

В силу леммы 4

$$p \in F^r(M_{t_r}) \subset F^{r-1}(M_{t_{r-1}}) \subset \dots \subset F(M_{t_1}) \subset M_{t_0}.$$

Поскольку, согласно лемме 1, имеют место равенства $F(\text{Sol}(F)) = F^{-1}(\text{Sol}(F)) = \text{Sol}(F)$, ограничение $F|_{\text{Sol}(F)}$ есть диффеоморфизм. Поэтому существуют однозначно определенные точки $p_i \in M_{t_i} \cap \text{Sol}(F)$, $1 \leq i \leq r$, такие, что $p = F^i(p_i)$.

Из (3) вытекает, что p является внутренней точкой множества $F^r(M_{t_r})$ в топологии t_0 -сечения M_{t_0} . Пусть V_0 – окрестность точки p в этой топологии, принадлежащая $F^r(M_{t_r})$. Отметим, что для любой точки $q \in V_0$ имеет место включение $h(q) \in U$, так как $q \in F^r(M_{t_r}) \subset \dots \subset F(M_{t_1}) \subset M_{t_0}$. Наша задача – сделать из V_0 “объемную” окрестность точки p в M_1 .

Для точек $\alpha, \beta \in S^1$ положим $M_{\alpha\beta} = I_{\alpha\beta} \times M \subset M_1$, где $I_{\alpha\beta} \subset S^1$ – открытый интервал минимальной длины с концевыми точками α, β . Другими словами, $M_{\alpha\beta}$ есть $|\beta - \alpha|/2$ -окрестность $(\beta + \alpha)/2$ -сечения в M_1 .

Поскольку $t_{r-j} = E_k^j(t_r)$ для всех $1 \leq j \leq r$, а отображение E_k непрерывное, существует такое $0 < \delta \leq \varepsilon$, что $|x_r - t_r| < \delta$ влечет $|x_i - t_i| < \varepsilon$ для всех $i = 0, \dots, r$. Поэтому $F^j(M_{t_j-\delta, t_j+\delta}) \subset M_{t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon}$ для всех $j = 0, \dots, r$. Более того, так как E_k – равномерно растягивающее отображение, то $F^r(M_{t_r-\delta, t_r+\delta}) \subset F^j(M_{t_j-\delta, t_j+\delta})$ для любого $j = 0, \dots, r$. Множество $F^r(M_{t_r-\delta, t_r+\delta})$ имеет вид $M_{t_0-\nu, t_0+\nu}$ для некоторого $\nu > 0$. Поэтому множество $(S^1 \times V_0) \cap M_{t_0-\nu, t_0+\nu} \stackrel{\text{def}}{=} V$ является окрестностью точки p в M_1 . Из определения отображений F и h вытекает, что $h(q) \in U$ для любой точки $q \in V$. Следовательно, h – непрерывное отображение. Для любой окрестности V_*

Рис. 1. (a) Поворот R при $k = 2$; (b) $f = f_{S_m}$ для $k = 2$ и $n = 2$

точки p можно найти окрестность $V \subset V_*$ вида $(S^1 \times V_0) \cap M_{t_0-\nu, t_0+\nu}$. Отсюда и из предыдущих построений вытекает непрерывность отображения h^{-1} . Таким образом, h – гомеоморфизм.

Непосредственно проверяется равенство $h \circ F|_{\text{Sol}(F)} = \hat{E}_k \circ h|_{\text{Sol}(F)}$, т.е. наличие коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \text{Sol}(F) & \xrightarrow{F} & \text{Sol}(F) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \Sigma_k^- & \xrightarrow{\hat{E}_k} & \Sigma_k^- \end{array}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть отображение $F: S^1 \times M \rightarrow S^1 \times M$ определяется преобразованиями $e, R, f_1, \dots, f_k$, удовлетворяющими условиям (1)–(5). Тогда множество $\text{Sol}(F)$ является одномерным растягивающимся аттрактором отображения F , локально гомеоморфным прямому произведению множества канторовского типа на $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1 следует, что $\text{Sol}(F)$ есть инвариантное множество такое, что ограничение $F|_{\text{Sol}(F)}$ есть диффеоморфизм. Ясно, что $\text{Sol}(F)$ является замкнутым множеством. Из леммы 2 следует, что $\text{Sol}(F)$ является притягивающим множеством.

Известно [24], что в Σ_k^- всюду плотны периодические точки отображения $\hat{E}_k$. Отсюда и из леммы 5 вытекает, что $\text{Sol}(F)$ состоит из неблуждающих точек диффеоморфизма $F|_{\text{Sol}(F)}$ со всюду плотным множеством периодических точек. В силу (2), (5) и (6) множество $\text{Sol}(F)$ гиперболическое с одномерным растягивающимся расслоением. Следовательно, $\text{Sol}(F)$ – растягивающийся аттрактор. Последнее утверждение теоремы вытекает из леммы 3.

2. Примеры. Мы будем использовать обозначения пункта 1.

А) Одномерные соленоиды Смейла. Пусть $M = D^n$ – компактный n -мерный шар. Ясно, что для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, существуют вложение $e: D^n \rightarrow e(D^n) \subset D^n$ и жесткий поворот $R: D^n \rightarrow D^n$, удовлетворяющие условиям (1)–(3) (см. рис. 1, (a), где $k = 2$). Тогда диффеоморфизм

$$f = f_{S_m}: S^1 \times D^n \rightarrow f(S^1 \times D^n) \subset S^1 \times D^n$$

имеет одномерный растягивающийся аттрактор $\text{Sol}(f) = \Lambda_{S_m}$, который локально гомеоморфен прямому произведению стандартного канторовского множества $\mathfrak{K}$ в D^n на $\mathbb{R}$. Каждая точка из $\mathfrak{K}$ есть пересечение счетного семейства последовательно вло-

Рис. 2. (a) Семейство T_2 ; (b) три последовательных компоненты T_2

женных n -шаров. Отсюда и замкнутости $\mathfrak{K}$ вытекает, что любая простая замкнутая кривая, принадлежащая множеству $D^n - \mathfrak{K}$, стягивается в точку в множестве $D^n - \mathfrak{K}$.

Поскольку диффеоморфизмы типа f_{S_m} были введены (немного в другом виде) в теорию динамических систем Смейлом [9], естественно назвать Λ_{S_m} *одномерным соленоидом Смейла*.

Диффеоморфизм f_{S_m} схематично изображен на рис. 1, (b) для $k = 2$ и $n = 2$. Следуя [8], будем число k называть *порядком* соленоида Λ_{S_m} . Из леммы 5 вытекает, что порядок является полным инвариантом внутренней сопряженности диффеоморфизмов $f_{S_m}|_{\Lambda_{S_m}}$. Для $n = 2$ в работе [8] приводятся примеры диффеоморфизмов вида f_{S_m} порядка $k = 2$, которые окрестностно не сопряжены (аналогичные примеры имеются и для порядка $k = 3$). Это доказывает основное утверждение статьи при $d = n + 1 = 3$. Поэтому далее будем считать $n \geq 3$.

Б) *Одномерные соленоиды Ньюхауса–Робинсона–Вильямса* (НРВ). В основе построения НРВ-соленоидов лежит конструкция Антуана [11] для $n = 3$ и ее обобщение, описанное в работе [13], на случай $n \geq 4$. В 1921 г. Антуан [11] построил пример нульмерного множества канторовского типа в $\mathbb{R}^3$, дополнение к которому имеет нетривиальную фундаментальную группу. Приведем схематично данное построение. Пусть $T_1 = S^1 \times D^2$ – трехмерный замкнутый полноторий. Рассмотрим семейство T_2 циклически зацепленных полноториев внутри T_1 (см. рис. 2, (a)). Компоненты C_i^1 семейства T_2 схематично изображены в виде окружностей.

Предполагается, что число компонент семейства T_2 равно $k \geq 4$. На рис. 2, (b) показано как зацеплены три последовательные компоненты. Далее по индукции определим семейство T_{n+1} , $n \geq 2$, k^n попарно не пересекающихся полноториев следующим образом. Каждая компонента C_i^n конфигурации T_n есть полноторий. Для каждой C_i^n , $1 \leq i \leq k^{n-1}$, обозначим через ϕ_i^n отображение подобия $T_1 \rightarrow C_i^n$. Под действием ϕ_i^n конфигурация T_2 отображается в конфигурацию $\phi_i^n(T_2)$, которая представляет собой семейство k полноториев в C_i^n . Положим $T_{n+1} = \bigcup \phi_i^n(T_2)$. Таким образом, мы получаем последовательность $T_1, T_2, \dots$ вложенных друг в друга конфигураций. Множество $\mathfrak{C} = \bigcap T_n$ называется *ожерельем Антуана*. Известно, что $\mathfrak{C}$ является вполне разрывным множеством канторовского типа таким, что фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathfrak{C}) \neq 0$. Ясно, что если K – классическое канторово множество, лежащее на некоторой прямой в пространстве $\mathbb{R}^3$, то $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = 0$. Поэтому, несмотря на то что множества K и $\mathfrak{C}$ гомеоморфны, не существует гомеоморфизма $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, переводящего K в $\mathfrak{C}$.

Переобозначим $T_1 = M$, $\phi_1^1 = e$. Немного модифицируем конструкцию Антуана так, чтобы существовал жесткий поворот $R: M \rightarrow M$ вдоль оси $\{0\} \times D^2$, переводящий T_2 в себя, и число $k \in \mathbb{N}$, которые удовлетворяют условиям (1)–(3). Например, можно каждую компоненту C_i^1 заменить полноторием, у которого одна часть подобна компоненте C_1^1 , а вторая часть – компоненте C_2^1 из оригинальной конструкции Антуана. Ясно, что в результате получится множество со свойствами ожерелья Антуана (мы сохраним это название). Дiffeоморфизм

$$f = f_{\text{NRW}}: S^1 \times M \rightarrow f(S^1 \times M) \subset S^1 \times M$$

имеет одномерный растягивающийся аттрактор $\text{Sol}(f) = \Lambda_{\text{NRW}}$, который локально гомеоморфен прямому произведению $\mathbb{R}$ на ожерелье Антуана $\mathfrak{E}$ в $\mathbb{R}^3$. Поскольку впервые базисные множества подобного типа были введены в работах [7], [10], естественно назвать Λ_{NRW} *одномерным соленоидом Ньюхауса–Робинсона–Вильямса* (НРВ).

Из леммы 5 вытекает, что диффеоморфизмы $f_{S_m}|_{\Lambda_{S_m}}$, $f_{\text{NRW}}|_{\Lambda_{\text{NRW}}}$ при фиксированном $k \geq 4$ внутренне сопряжены. Покажем, что они окрестностно не сопряжены. Предположим противное. Тогда существует гомеоморфизм $\varphi: U(\Lambda_{S_m}) \rightarrow U(\Lambda_{\text{NRW}})$ некоторых окрестностей $U(\Lambda_{S_m})$, $U(\Lambda_{\text{NRW}})$ множеств Λ_{S_m} , Λ_{NRW} соответственно, который осуществляет сопряженность диффеоморфизмов $f_{S_m}|_{\Lambda_{S_m}}$, $f_{\text{NRW}}|_{\Lambda_{\text{NRW}}}$. В силу конструкции любая точка Λ_{S_m} имеет окрестность U_0 , локально гомеоморфную прямому произведению $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times D^3$ для некоторого $\varepsilon > 0$, причем пересечение Λ_{S_m} с U_0 совпадает с $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{K}$ – стандартное канторово множество в D^3 . Не уменьшая общности, можно считать (перейдя при необходимости к меньшей окрестности), что $U_0 \subset (\Lambda_{S_m})$.

Согласно [13] в $U(\Lambda_{\text{NRW}}) - \Lambda_{\text{NRW}}$ существует простая замкнутая кривая C произвольно малого диаметра, которая не стягивается в точку в множестве $U(\Lambda_{\text{NRW}}) - \Lambda_{\text{NRW}}$. Так как φ – гомеоморфизм, существует C такая, что $\varphi^{-1}(C) \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times D^3$. Поскольку $\varphi(\Lambda_{S_m}) = \Lambda_{\text{NRW}}$, то $\varphi^{-1}(C) \in U(\Lambda_{S_m}) - \Lambda_{S_m}$. Следовательно, $\varphi^{-1}(C)$ деформируется в сечение $\{t_0\} \times D^3$ вдоль слоев тривиального расслоения $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times D^3 \rightarrow \{t_0\} \times D^3$ в некоторую замкнутую кривую, принадлежащую множеству $\{t_0\} \times (D^3 - \mathfrak{K})$. Эта кривая гомотопна нулю в множестве $D^3 - \mathfrak{K}$. Следовательно, $\varphi^{-1}(C)$ гомотопна нулю в $U(\Lambda_{S_m}) - \Lambda_{S_m}$. Тогда C должна быть гомотопна нулю в $U(\Lambda_{\text{NRW}}) - \Lambda_{\text{NRW}}$. Полученное противоречие показывает, что диффеоморфизмы $f_{S_m}|_{\Lambda_{S_m}}$, $f_{\text{NRW}}|_{\Lambda_{\text{NRW}}}$ окрестностно не сопряжены. Мы доказали основное утверждение для $d = 4$ ($n = 3$).

Для $d = n + 1 \geq 5$ воспользуемся обобщением конструкции Антуана, полученной в работе [13] (см. также [26]). Пусть $M = T_1 = T^{n-2} \times D^2$ – компактный n -мерный полноторий ($n \geq 4$), где

$$T^{n-2} = \underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n-2}.$$

Аналогично [11] в [13] строится конфигурация T_2 , состоящая из $k \geq 4$ n -мерных полноториев, которые лежат в T_1 . В частности, существует жесткий поворот $R: T_1 \rightarrow T_1$ периода k , отображающий T_2 в себя. Далее, повторяя метод Антуана, строится нульмерное компактное множество (ожерелье Антуана–Бланкеншипа), дополнение к которому имеет нетривиальную фундаментальную группу. В силу конструкции

из пункта 1 получаем диффеоморфизм

$$f = f_{\text{NRW}}: S^1 \times M \rightarrow f(S^1 \times M) \subset S^1 \times M$$

с одномерным НРВ-соленоидом $\text{Sol}(f) = \Lambda_{\text{NRW}}$. Полностью аналогично случаю $d = 4$ ($n = 3$) показывается, что $f_{Sm}|_{\Lambda_{Sm}}$, $f_{\text{NRW}}|_{\Lambda_{\text{NRW}}}$ внутренне сопряжены, но окрестностно не сопряжены.

Авторы благодарят Д. В. Аносова, В. З. Гринеса и В. С. Медведева за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. В. Аносов, “Гладкие динамические системы. Гл. 1. Исходные понятия”, *Динамические системы – 1*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **1**, ВИНТИ, М., 1985, 156–178.
- [2] Д. В. Аносов, С. Х. Арансон, В. З. Гринес, Р. В. Плыкин, Е. А. Сатаев, А. В. Сафонов, В. В. Солодов, А. Н. Старков, А. М. Степин, С. В. Шлячков, “Динамические системы с гиперболическим поведением”, *Динамические системы – 9*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **66**, ВИНТИ, М., 1991, 5–242.
- [3] R. F. Williams, “One-dimensional non-wandering sets”, *Topology*, **6** (1967), 473–487.
- [4] R. F. Williams, “Expanding attractors”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **43** (1974), 169–203.
- [5] Р. В. Плыкин, “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла”, *Матем. сб.*, **84**:2 (1971), 301–312.
- [6] R. F. Williams, “Classification of subshifts of finite type”, *Ann. of Math.* (2), **98** (1973), 120–153.
- [7] C. Robinson, R. Williams, “Classification of expanding attractors: an example”, *Topology*, **15**:4 (1976), 321–323.
- [8] H. G. Bothe, “The ambient structure of expanding attractors. II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.
- [9] S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817; рус. пер.: С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *УМН*, **25**:1 (1970), 113–185.
- [10] S. Newhouse, “On simple arcs between structurally stable flows”, *Dynamical systems – Warwick 1974*, Proc. Sympos. Appl. Topology and Dynamical Systems (Univ. Warwick, Coventry, 1973/1974), Lecture Notes in Math., **468**, Springer-Verlag, Berlin, 1975, 209–233.
- [11] L. Antoine, “Sur l’homéomorphie de deux figures et de leur voisinages”, *J. Math.* (8), **4** (1921), 221–325.
- [12] Л. В. Келдыш, *Топологические вложения в евклидово пространство*, Тр. МИАН, **81**, Наука, М., 1966.
- [13] W. A. Blankinship, “Generalization of a construction by Antoine”, *Ann. of Math.* (2), **53** (1951), 276–297.
- [14] В. З. Гринес, “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах. I”, *Тр. ММО*, **32** (1975), 35–60; “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах. II”, *Тр. ММО*, **34** (1977), 243–252.
- [15] А. Ю. Жиров, “Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Часть 1. Кодирование, классификация и накрытия”, *Матем. сб.*, **185**:6

- (1994), 3–50; “Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Часть 2. Перечисление и применение к псевдоаносовским диффеоморфизмам”, *Матем. сб.*, **185**:9 (1994), 29–80; “Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Часть 3. Алгоритм классификации”, *Матем. сб.*, **186**:2 (1995), 59–82.
- [16] Р. В. Плыкин, “О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов”, *УМН*, **39**:6 (1984), 75–113.
- [17] V. Z. Grines, “Topological classification of one-dimensional attractors and repellers of A -diffeomorphisms of surfaces by means of automorphisms of fundamental groups of supports”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **95**:5 (1999), 2523–2545.
- [18] V. Z. Grines, “On topological classification of A -diffeomorphisms of surfaces”, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:1 (2000), 97–126.
- [19] V. Z. Grines, R. V. Plykin, “Topological classification of amply situated attractors of A -diffeomorphisms of surfaces”, *Methods of Qualitative Theory of Differential Equations and Related Topics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **200**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 135–148.
- [20] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, “О топологической классификации ориентируемых аттракторов на n -мерном торе”, *УМН*, **34**:4 (1979), 185–186.
- [21] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, “О грубых диффеоморфизмах с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности один”, *Докл. РАН*, **374**:6 (2000), 735–737.
- [22] Р. В. Плыкин, “О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов”, *УМН*, **35**:3 (1980), 94–104.
- [23] L. H. Loomis, S. Sternberg, *Advanced Calculus*, Jones and Bartlett Publ., Boston, MA, 1968.
- [24] C. Robinson, *Dynamical Systems. Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, Stud. Adv. Math., CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.
- [25] Л. Куратовский, *Топология*, Т. 1, Мир, М., 1966.
- [26] А. А. Иванов, “Изотопия компактов в евклидовых пространствах”, *Докл. АН СССР*, **71**:6 (1950), 1021–1022.

Е. В. Жужома

Нижегородский государственный педагогический университет

E-mail: zhuzhoma@mail.ru

Поступило

18.02.2009

Н. В. Исаенкова

Нижегородский государственный педагогический университет

E-mail: nisaenkova@mail.ru