Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Конг, О размерах классов сопряженности конечных групп, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 466–468

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8505>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 16:51:52

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О размерах классов сопряженности конечных групп

К. Конг

1. Введение. Все группы, рассматриваемые в данной статье, конечные. Если G – группа, то x^G – классы сопряженности, содержащие x , и $|x^G|$ – размер класса x^G (следуя Баеру [1], назовем $\text{Ind}_G(x) = |x^G| = |G : C_G(x)|$ индексом элемента x группы G). В остальном, используются стандартные обозначения и терминология, которые читатель может найти в книге [2].

Хорошо известно, что между структурой группы и размерами ее классов сопряженности существует сильная взаимосвязь, и что имеется ряд результатов, полученных при изучении структуры группы при некоторых арифметических условиях на размеры ее классов сопряженности. Например, Ито [3] показал, что если $\{1, m\}$ – размеры классов сопряженности группы G , то G – нильпотентная группа, $m = p^a$ при некотором простом p и $G = P \times A$, где P – силовская p -подгруппа группы G и $A \subseteq Z(G)$. Тот же автор показал в [4], что G – разрешимая группа, если размеры классов сопряженности группы G равны $\{1, n, m\}$. С другой стороны, другие авторы заменяют условия для всех классов сопряженности на условия, относящиеся только к некоторым классам сопряженности, что позволяет исследовать структуру конечной группы. Например, Баер в [1] доказал, что группа G разрешима, если ее элементы, имеющие порядок, равный степени простого числа, т.е., примарный порядок, также имеют индекс, равный степени простого числа. В [5] Широнг Ли доказал, что G разрешима, если конечная группа G имеет в точности два размера классов сопряженности примарных элементов группы G . Недавно в [6] Беркович и Казарин показали, что если индексы всех элементов примарных или бипримарных порядков неабелевой группы G являются степенями простых чисел, то выполняется одно и только одно из следующих утверждений:

- (a) $G = P \times A$, где $P \in \text{Syl}_p(G)$ неабелева, а A абелева;
- (b) $G = F \times A$, где A абелева, а F – ненильпотентная бипримарная холлова подгруппа группы G , содержащая абелевы силовские подгруппы.

В данной работе мы продолжим изучать вопрос о том, как размеры классов сопряженности влияют на структуру конечных групп. Покажем, как, налагая некоторые арифметические условия на размеры классов сопряженности некоторых бипримарных элементов группы G , можно получить ограничения на структуру группы G или ее p -дополнений.

2. Основные определения и предварительные результаты. В этом разделе приводятся леммы, необходимые для доказательства наших основных результатов.

Работа выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (грант № 10771132), фонда SGRC (грант № GZ310), исследовательского гранта Шанхайского университета и Шанхайского проекта по поддержке основных академических дисциплин (грант № J50101).

ЛЕММА 2.1 (Виландт [1; лемма 6]). $O_p(G)$ содержит всякий элемент группы G , порядок и индекс которого являются степенями числа p .

ЛЕММА 2.2 [7; гл. 5, теорема 3.4]. Пусть $A \times B$ – группа автоморфизмов p -группы P , содержащей A в качестве p' -группы и B в качестве p -группы. Если A тривиально действует на $C_P(B)$, то $A = 1$.

ЛЕММА 2.3 [8; теорема 5]. Пусть G – конечная группа и p – простой делитель числа $|G|$. Группа G не содержит примарного p' -элемента, индекс которого делится на p , тогда и только тогда, когда $G = P \times H$, где P – силовская p -подгруппа группы G , а H имеет порядок, взаимно простой с числом p .

3. Основные результаты. Камина в работе [9] доказал следующую теорему. Пусть G – группа такая, что p^a – наивысшая степень простого числа p , на которую делится индекс некоторого элемента группы G . Предположим, что существует p -элемент группы G , индекс которого в точности равен p^a . Тогда G имеет нормальное p -дополнение. Мы докажем следующее обобщение этой теоремы.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть G – группа такая, что p^a – наивысшая степень простого числа p , на которую делится индекс некоторого $\{p, q\}$ -элемента группы G , где q – произвольное простое число, на которое делится порядок группы G . Предположим, что в группе G существует некоторый p -элемент, индекс которого в точности равен p^a . Тогда G имеет нормальное p -дополнение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию предположим, что x – некоторый p -элемент группы G такой, что $[G : C_G(x)] = p^a$. Из леммы 2.1 следует, что нормальное замыкание элемента x будет p -группой, скажем, H . Пусть $Z = C_G(H)$. Теперь $[G : C_G(x)] = p^a$, и, следовательно, если $y \in C_G(x)$ и y имеет порядок, равный степени простого числа, взаимно простой с p , то $[C_G(x) : C_G(xy)]$ – число, взаимно простое с p . В самом деле, в противном случае индекс элемента xy будет делиться на p^{a+1} , что противоречит нашему предположению. Однако $C_G(xy) = C_G(x) \cap C_G(y)$, так как x и y имеют взаимно простые порядки и $[x, y] = 1$. Так как число $[C_G(x) : C_G(xy)]$ взаимно простое с p , можно предположить, что $C_G(xy)$ содержит силовскую p -подгруппу группы $C_G(x)$, скажем, P . Очевидно, $H \cap C_G(x) \leq H$. Так как H – нормальное замыкание в G , имеем $H \cap C_G(x) \leq O_p(C_G(x)) \leq P$. Таким образом, $H \cap C_G(x) \leq qH \cap P$. Так как $C_G(xy) = C_G(x) \cap C_G(y) \subseteq C_G(y)$, получаем, что $P \leq C_G(y)$, откуда следует, что $H \cap C_G(x) \leq H \cap C_G(y)$ или $C_H(x) \leq C_H(y)$. Теперь, применяя лемму 2.2, можно заключить, что $C_H(y) = H$.

Таким образом, в H сосредотачиваются все примарные элементы из $C_G(x)$, порядок которых взаимно простой с p . Можно также заключить, что в H сосредотачиваются все элементы из $C_G(x)$, порядок которых взаимно простой с p . Действительно, для любого элемента из $C_G(x)$, порядок которого взаимно простой с p , можно записать $z = z_1 z_2 \cdots z_s$, где z_i является степенью некоторого простого числа, отличного от p , а z_i попарно коммутируют и $z_i \in C_G(x)$. Из вышесказанного следует, что в H сосредотачиваются все элементы из $C_G(x)$, порядок которых взаимно простой с p .

Так как $[G : C_G(x)] = p^a$, можно заключить, что $[G : Z]$ равняется некоторой степени числа p . Пусть теперь w является некоторым примарным p' -элементом в Z . Из предыдущего следует, что число $[C_G(x) : C_G(w) \cap C_G(x)]$ взаимно просто с p , но, так как Z – нормальная подгруппа группы $C_G(x)$, ясно, что число $[Z : C_Z(w)]$ взаимно просто с p . Таким образом, всякий примарный p' -элемент в Z имеет в Z индекс, взаимно простой с p , и, таким образом, в силу леммы 2.3 имеем $Z = K \times P_1$, где K имеет порядок взаимно простой с p , а P_1 – силовская p -подгруппа группы Z . Так как $[G : Z]$ – некоторая степень числа p , K является нормальным p -дополнением группы G . Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Baer, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **75** (1953), 20–47. [2] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Grad. Texts in Math., **80**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1996. [3] N. Itô, *Nagoya Math. J.*, **6** (1953), 17–28. [4] N. Itô, *Osaka J. Math.*, **7** (1970), 231–251. [5] Shirong Li, *Arch. Math. (Basel)*, **67**:2 (1996), 100–105. [6] Ya. Berkovich, L. Kazarin, *J. Algebra*, **283**:2 (2005), 564–583. [7] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper & Row, New York–London, 1968. [8] Xiaolei Liu, Yanming Wang, Huaquan Wei, *J. Pure Appl. Algebra*, **196**:1 (2005), 111–117. [9] A. R. Camina, *J. London Math. Soc.* (2), **5** (1972), 127–132. [10] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Grundlehren Math. Wiss., **184**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1967. [11] A. R. Camina, R. D. Camina, *J. Group Theory*, **1**:3 (1998), 257–269.

К. Конг

Tianjin Polytechnic University, KHP

E-mail: kqj2929@163.com

Поступило

29.03.2008