Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Покотило, А. А. Шкаликов, Квазиклассическое приближение для несамосопряженной задачи Штурма–Лиувилля с параболическим потенциалом, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 469–473

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8506>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 12:55:51

Квазиклассическое приближение для несамосопряженной задачи Штурма–Лиувилля с параболическим потенциалом

В. И. Покотило, А. А. Шкаликов

1. Постановка задачи. В работе изучается несамосопряженная задача Штурма–Лиувилля вида

$$i\varepsilon y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y(a) = y(b) = 0, \quad (1.1)$$

которая ассоциируется с известным в гидродинамике оператором Орра–Зоммерфельда. Здесь λ – спектральный параметр, ε – малый параметр, который пропорционален вязкости жидкости и обратно пропорционален числу Рейнольдса, $q(x)$ – скорость стационарного профиля жидкости в канале $a \leq x \leq b$. Исследуется поведение спектра соответствующего семейства дифференциальных операторов

$$L(\varepsilon)y = i\varepsilon y'' + q(x)y, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.2)$$

действующих на отрезке $[a, b]$, с краевыми условиями

$$y(a) = y(b) = 0 \quad (1.3)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ с аналитическими функциями $q(x)$, имеющими один экстремум на отрезке $[a, b]$. Найден предельный спектральный граф рассматриваемой модельной задачи – предельные кривые, вдоль которых происходит концентрация спектра.

В литературе наиболее часто встречаются два стационарных профиля скорости, именно, $q(x) = x$ и $q(x) = x^2$. Первый называется *профилем Куэтта*, второй – *профилем Пуазейля*. Случай профиля Куэтта изучен в работе [1], где предельное множество, вдоль которого концентрируются собственные значения, названо спектральным галстуком. Эта задача получила свое обобщение в работе Шкаликова [2], где был рассмотрен случай монотонного на отрезке профиля течения и доказано, что предельное множество состоит из трех кривых, также по форме напоминающих галстук. В работе [2] также приведены результаты для случая профиля Пуазейля, который подробно изучен в [3] для симметричного квадратичного потенциала и в [4] для несимметричного квадратичного потенциала. В указанных работах предельное множество, около которого концентрируются собственные значения, названо предельным спектральным графом. В нашей работе, которая направлена на обобщение результатов [4], мы также будем придерживаться этой терминологии.

Мы покажем, что спектральный портрет в случае несимметричного квадратичного потенциала, найденный в [4], не случаен; похожая картина наблюдается для широкого класса аналитических функций $q(x)$, обладающих одним экстремумом на заданном отрезке.

В упомянутых работах отмечено, что в случае аналитической функции $q(x)$ спектр концентрируется вблизи некоторых кривых, форма которых определяется геометрией линий Стокса уравнения (1.1). Для понимания основных утверждений, доказанных в данной работе, читателю следует ознакомиться с основными определениями теории графов Стокса, подробное изложение которой можно найти, например, в [5].

Для простоты можно считать, что $q(x)$ продолжается во всю комплексную плоскость как целая функция, но можно ограничиться только требованием ее аналитичности в окрестности отрезка $[a, b]$ вдобавок к основным условиям, которые сформулированы ниже. Не ограничивая общности, мы можем рассматривать случай $a < 0 < b$,

$0 = q(0) < q(a) < q(b)$, полагая, что функция $q(x)$ убывает на отрезке $[a, 0]$ и возрастает на отрезке $[0, b]$. Тогда область значений функции $q(x)$ при $x \in [a, b]$ есть отрезок $[0, q(b)]$. В этом случае область значений квадратичной формы изучаемого семейства операторов (Ly, y) лежит в полуполосе

$$\Pi = \{\lambda \in C \mid \operatorname{Im} \lambda < 0, 0 < \operatorname{Re} \lambda < q(b)\}.$$

Так как спектр оператора заключен в его числовом образе, то при любом $\varepsilon > 0$ собственные значения задачи лежат в этой полуполосе.

Теперь сформулируем основные условия на функцию $q(x)$.

УСЛОВИЕ (i). Функция $q(x)$ вещественна при $x \in [a, b]$, убывает на отрезке $[a, 0]$ и возрастает на отрезке $[0, b]$, причем $a < 0 < b$, $0 = q(0) < q(a) < q(b)$. Существуют не пересекающиеся области $G_1, G_2 \subset C$, имеющие в качестве части своей границы отрезки $[a, 0]$ и $[0, b]$ соответственно, такие, что $q(z)$ аналитична в G_1, G_2 и биективно отображает $\overline{G}_1$ на полуполосу $\overline{\Pi}_1$, а $\overline{G}_2$ на полуполосу $\overline{\Pi}$ (здесь черта означает замыкание областей), где

$$\Pi_1 = \{\lambda \in C \mid \operatorname{Im} \lambda < 0, 0 < \operatorname{Re} \lambda < q(a)\}.$$

УСЛОВИЕ (ii). При любом $c \in (0, q(a))$ прообраз луча $r_c = \{\lambda \mid \lambda = c - it, 0 \leq t < \infty\}$ в G_1 есть функция относительно мнимой оси, т.е. любая прямая $\operatorname{Im} \lambda = \text{const}$ пересекает прообраз луча r_c только один раз, либо не пересекает вовсе. Аналогично, при любом $c \in (0, q(b))$ прообраз луча r_c в G_2 есть функция относительно мнимой оси.

Из этих условий по принципу соответствия границ следует, что область G_1 полностью лежит в верхней полуплоскости, а область G_2 полностью лежит в нижней. Примерами функций, удовлетворяющих сформулированным двум условиям, могут служить $q(x) = x^2$ на отрезке $[-1, 2]$, $q(x) = 1 - \cos(x)$ на отрезке $[-\pi/2, \pi]$ и другие.

2. Предельные спектральные кривые и граф Стокса. Пусть ξ_λ^1 – единственный корень уравнения $q(z) - \lambda = 0$, лежащий в G_1 , определенный при $\lambda \in \Pi_1$. Аналогично, ξ_λ^2 – единственный корень уравнения $q(z) - \lambda = 0$, лежащий в G_2 , определенный при $\lambda \in \Pi$.

Введем ветвь $\sqrt{\lambda}$, которую всюду далее будем называть основной:

$$\operatorname{Arg}(\sqrt{\lambda}) \in \left(\frac{-\pi}{2}, 0 \right) \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} \lambda < 0.$$

В работах [4], [2] отмечено, что все предельные линии концентрации спектра можно разбить на кривые следующих трех типов.

1) **Сингулярные линии** – характеризуются тем, что один из концов отрезка $[a, b]$ лежит на графе Стокса C_λ рассматриваемого уравнения. В нашем случае это кривые $\tilde{\gamma}_a^1, \tilde{\gamma}_a^2, \tilde{\gamma}_b^1, \tilde{\gamma}_b^2$, где, например,

$$\tilde{\gamma}_a^1 = \left\{ \lambda \in \Pi_1 \mid \operatorname{Re} \int_{\xi_\lambda^1}^a \sqrt{i(q(x) - \lambda)} d\xi = 0 \right\}.$$

Однако не все точки некой сингулярной кривой $\tilde{\gamma}$ принадлежат предельному спектральному графу. Мы должны исключить точки $\mu \in \tilde{\gamma}$, обладающие следующим свойством: имеется путь в комплексной λ -плоскости, соединяющий точки a и b , который пересекает только одну линию Стокса графа C_λ при любом $\lambda \in U_\delta(\mu)$, если δ достаточно мало. После удаления всех таких точек мы получим некие кривые γ_a^1, γ_a^2 и γ_b^2 .

2) *Критические линии* – для всех точек μ данного типа геометрия графов Стокса не сохраняется в любой окрестности $U_\delta(\mu)$. В нашем случае имеется только одна критическая линия $\tilde{\gamma}_0$, которая соответствует сложному графу Стокса:

$$\tilde{\gamma}_0 = \left\{ \lambda \in \Pi_1 \mid \operatorname{Re} \int_{\xi_\lambda^1}^{\xi_\lambda^2} \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)} d\xi = 0 \right\}.$$

Здесь мы снова должны исключить точки критических линий, которые обладают описанным выше свойством. После этого получим некую кривую γ_0 .

3) *Главная линия* $\tilde{\gamma}_\infty$ – характеризуется тем, что для всех точек λ такой кривой выполнено уравнение

$$Q(\lambda) = \operatorname{Re} \int_a^b \sqrt{i(q(x) - \lambda)} dx = 0.$$

Часть этой линии γ_∞ между $-i\infty$ и первым пересечением с сингулярной или критической линией должна быть включена в предельный спектральный граф. Это соответствует тем λ , для которых граф Стокса является простым, а концы отрезка $[a, b]$ лежат в одной канонической области.

Используя свойства функции $q(x)$, можно доказать ряд важных свойств кривых $\tilde{\gamma}_a^1$, $\tilde{\gamma}_a^2$, $\tilde{\gamma}_b^1$, $\tilde{\gamma}_b^2$, $\tilde{\gamma}_0$, $\tilde{\gamma}_\infty$.

ЛЕММА 2.1. *Кривая $\tilde{\gamma}_a^1$ (соответственно $\tilde{\gamma}_b^2$, $\tilde{\gamma}_0$) проходит через граничную точку $q(a)$ (соответственно точку $q(b)$, 0) полуполосы Π и является функцией относительно вещественной оси.*

ЛЕММА 2.2. *Кривая $\tilde{\gamma}_\infty$ является функцией относительно мнимой оси, имеющей асимптотику*

$$c_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b q(x) dx \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

ЛЕММА 2.3. 1. *Кривые $\tilde{\gamma}_a^1$, $\tilde{\gamma}_a^2$, $\tilde{\gamma}_0$ пересекаются в точке $\lambda_1 \in \Pi_1$. Никаких других точек пересечения у этих кривых нет.*

2. *Кривые $\tilde{\gamma}_a^2$, $\tilde{\gamma}_b^2$, $\tilde{\gamma}_\infty$ пересекаются в точке $\lambda_2 \in \Pi$. Никаких других точек пересечения у этих кривых нет.*

3. *Кривые $\tilde{\gamma}_a^1$, $\tilde{\gamma}_b^2$ не пересекаются.*

4. *Никакая из упомянутых кривых не имеет самопересечений.*

Доказательство этих утверждений во многом аналогично рассуждениям, проведенным в работе [2] для случая монотонного потенциала.

Обозначим через γ_0 часть кривой $\tilde{\gamma}_0$ между 0 и λ_1 , через γ_a^1 – часть кривой $\tilde{\gamma}_a^1$, заключенную между точками $q(a)$ и λ_1 , через γ_a^2 – часть кривой $\tilde{\gamma}_a^2$, заключенную между точками λ_1 и λ_2 , через γ_b^2 – часть кривой $\tilde{\gamma}_b^2$, заключенную между точками $q(b)$ и λ_2 , наконец, через γ_∞ – часть кривой $\tilde{\gamma}_\infty$, заключенную между λ_2 и $-i\infty$. Положим

$$\Gamma = \gamma_0 \cup \gamma_a^1 \cup \gamma_a^2 \cup \gamma_b^2 \cup \gamma_\infty.$$

Ниже мы покажем, что Γ есть предельный спектральный граф изучаемой задачи. Это означает следующее: любая точка $\lambda \in \Gamma$ является точкой концентрации собственных значений, а все остальные точки $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ этим свойством не обладают.

ТЕОРЕМА 2.1. *При любом $\tau > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что все собственные значения задачи (1.2), (1.3) при $\varepsilon < \varepsilon_0$ лежат внутри τ -окрестности графа Γ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее используем результаты асимптотической теории для обыкновенных дифференциальных уравнений, с которыми можно познакомиться в [5].

Важную роль в этой теории играют функции

$$S_1(z, \lambda) = \int_{\xi_\lambda^1}^z \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)} d\xi, \quad S_2(z, \lambda) = \int_{\xi_\lambda^2}^z \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)} d\xi,$$

которые мы определяем при $\lambda \in \Pi_1$ и $\lambda \in \Pi$ соответственно. Здесь мы опускаем ряд технических деталей, связанных с голоморфностью и аналитичностью, необходимых для дальнейшего корректного использования этих функций. При фиксированном $\lambda \in \Pi_1$, $\lambda \in \Pi$ множество

$$\{z \mid \operatorname{Re} S_{1,2}(z, \lambda) = 0\}$$

определяет кривые в z -плоскости, которые называются *линиями Стокса*. Точки ξ_λ^1 и ξ_λ^2 принадлежат этому множеству и из них выходит по три линии, образуя два комплекса Стокса. Граф Стокса, образованный этими комплексами, может быть сложным – тогда он содержит конечную линию Стокса, соединяющую точки ξ_λ^1 и ξ_λ^2 . В случае простого графа Стокса – две линии каждого комплекса асимптотически стремятся к линиям второго комплекса. Условно будем называть их *внутренними*, а третью линию каждого комплекса – *внешней*. Введем для них следующие обозначения: $l_{1,2}^1$ (соответственно $l_{1,2}^2$) – внутренние линии комплекса Стокса с центром в ξ_λ^1 (соответственно ξ_λ^2), а l_3^1 и l_3^2 – внешние, причем l_1^1 асимптотически стремится к l_2^2 , а l_1^2 к l_2^1 .

Пусть $\lambda = c - it$. Из условий (i), (ii) мы имеем, что $\xi_\lambda^1 \in G_1$ лежит в верхней полуплоскости, $\xi_\lambda^2 \in G_2$ лежит в нижней полуплоскости. При этом выполнена следующая цепочка неравенств:

$$a < \xi_c^1 < 0 < \xi_c^2 < b.$$

Принципиальную роль для дальнейшего играет следующее утверждение.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\lambda \in \Pi \setminus (\gamma_0 \cup \gamma_a^1 \cup \gamma_a^2 \cup \gamma_b^2)$. Рассмотрим следующие случаи:

- 1) точка λ лежит выше кривых γ_0 и $\tilde{\gamma}_a^1$;
- 2) λ лежит ниже кривой γ_0 , но выше кривой $\tilde{\gamma}_a^1$;
- 3) $\lambda \in \tilde{\gamma}_a^1 \setminus \gamma_a^1$, т.е. лежит на $\tilde{\gamma}_a^1$, но находится ниже кривой γ_0 ;
- 4) λ лежит ниже кривой $\tilde{\gamma}_a^1$, правее кривой γ_a^2 и выше кривой $\tilde{\gamma}_b^2$;
- 5) λ лежит ниже кривой $\tilde{\gamma}_a^1$, левее кривой γ_a^2 и выше кривой $\tilde{\gamma}_b^2$;
- 6) $\lambda \in \tilde{\gamma}_b^2 \setminus \gamma_b^2$, т.е. лежит на $\tilde{\gamma}_b^2$, но находится левее кривой γ_a^2 ;
- 7) λ лежит ниже кривой $\tilde{\gamma}_b^2$.

Тогда пересечение графом Стокса отрезка $[a, b]$ исчерпывается следующим.

1. Линия l_3^1 проходит через интервал (a, ξ_c^1) , а l_3^2 – через (ξ_c^2, b) . Линии l_2^1 и l_2^2 пересекают интервал (ξ_c^1, ξ_c^2) в точках $x_1(\lambda)$ и $x_2(\lambda)$ соответственно, причем $x_1 < x_2$.
2. Линия l_1^1 проходит через интервал (a, ξ_c^1) , а l_1^2 – через (ξ_c^2, b) . Линии l_2^1 и l_2^2 пересекают интервал (ξ_c^1, ξ_c^2) дважды либо не пересекают вовсе.
3. Линия l_1^1 проходит через точку a , а l_1^2 – через интервал (ξ_c^2, b) . Линии l_2^1 и l_2^2 пересекают интервал (ξ_c^1, ξ_c^2) дважды либо не пересекают вовсе.
4. Одна линия Стокса, выходящая из точки ξ_λ^2 , проходит через интервал (ξ_c^2, b) . Внутренние линии каждого из комплексов, асимптотически не стремящиеся друг к другу, пересекают интервал (a, ξ_c^2) один раз либо два, либо сливаются, либо не пересекают вовсе.
5. Линия l_1^2 проходит через интервал (ξ_c^2, b) , а линия l_2^2 – через (a, ξ_c^1) . Линия l_1^1 пересекает интервал (ξ_c^1, ξ_c^2) дважды либо не пересекают вовсе.
6. Линия l_1^2 проходит через точку b , а линия l_2^2 – через (a, ξ_c^1) . Линия l_1^1 пересекает интервал (ξ_c^1, ξ_c^2) дважды либо не пересекают вовсе.
7. Линии l_1^1 и l_1^2 не пересекают отрезок $[a, b]$. При этом линии l_2^2 и l_2^1 , асимптотически стремящиеся к первым двум, могут пересекать отрезок $[a, b]$ каким-либо образом.

Доказательство этой леммы использует свойства функции $q(x)$ и требует достаточно большого объема технической работы.

Дальнейшее доказательство теоремы основано на понятиях канонической области и линейно независимых асимптотических решений уравнения 1.1 (см. [5]). Здесь мы не приводим деталей рассуждения, поскольку они повторяют доказательство для случая монотонного потенциала, детально представленного в работе Шкалика [2].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. А. Шкалик, *Матем. заметки*, **62**:6 (1997), 950–953. [2] А. А. Шкалик, *Труды международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям — спутника Международного конгресса математиков ISCM-2002 (Москва, МАИ, 11–17 августа, 2002). Часть 3*, СМФН, **3**, МАИ, М., 2003, 89–112. [3] С. Н. Туманов, А. А. Шкалик, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:4 (2002), 177–204. [4] С. Н. Туманов, А. А. Шкалик, *О модельной задаче для уравнения Орра–Зоммерфельда с квадратичным профилем*, [arXiv: math-ph/0212074v1](https://arxiv.org/abs/math-ph/0212074v1). [5] М. В. Федорук, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1983.

В. И. Покотило

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: pokotilo.vadim@gmail.com

Поступило

24.03.2009

А. А. Шкалик

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

E-mail: ashkalikov@yahoo.com