Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Шварцман, Кручение в абелизации группы Торелли $\mathcal{T}$ как $\mathrm{Sp}(\mathbb{Z}_2)$ -модуль, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 478–480

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 18:19:34

Кручение в абелизации группы Торелли $\mathcal{T}$ как $\mathrm{Sp}(\mathbb{Z}_2)$ -модуль

О. В. Шварцман

1. Определения, обозначения и описание подгруппы кручения по Джонсону. Обозначим через M группу классов отображений замкнутой ориентируемой поверхности рода $g > 2$ и рассмотрим нормальную подгруппу группы M , состоящую из таких классов диффеоморфизмов, которые тождественно действуют на группе гомологий поверхности. Эта подгруппа называется *группой Торелли* и обозначается через $\mathcal{T}$. Известно, что $M/\mathcal{T} = \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z})$ [1].

Пусть $\mathcal{T}^{ab}$ – абелизация группы $\mathcal{T}$. Джонсон показал [2], что подгруппа кручения в группе $\mathcal{T}^{ab}$ суть элементарная абелева 2-группа, которая допускает следующее, удобное для наших целей, описание.

Пусть $(V, (\cdot, \cdot))$ – невырожденное симплектическое пространство размерности $2g$ над полем $\mathbb{Z}_2$. Функция q на V со значениями в $\mathbb{Z}_2$ называется *квадратичной формой, ассоциированной с симплектической формой* $(\cdot, \cdot)$, если

$$q(x+y) = q(x) + q(y) + (x, y) \quad \text{для любых } x, y \in V. \quad (*)$$

Из условия $(*)$ следует, что сумма двух квадратичных форм есть линейная функция. Ясно также, что сумма линейной и квадратичной формы на V есть квадратичная форма. Таким образом, квадратичные формы образуют аффинное пространство Q размерности $2g$ над полем $\mathbb{Z}_2$.

Рассмотрим элемент $x \in V$ как линейную функцию $\bar{x}$ на Q , полагая $\bar{x}(q) \stackrel{\text{def}}{=} q(x)$, $x \in V$, $q \in Q$. (Заметим, что при этом $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y} + (x, y)$).

Через $S(V)$ обозначим $\mathbb{Z}_2$ -алгебру функций на Q , порожденную линейными функциями $\bar{x}$, $x \in V$. В алгебре $S(V)$ имеется естественная фильтрация

$$0 < \mathbb{Z}_2 < S_1(V) < \cdots < S_{2g}(V)$$

пространствами полиномов степени, не выше данной. При этом ассоциированная градуированная алгебра $\oplus S_i(V)/S_{i-1}(V)$ изоморфна внешней алгебре $\oplus \Lambda^i V$.

В пространстве $S_2(V)$ имеется выделенный элемент – арф-инвариант Arf . Если $x_1, y_1, \dots, x_g, y_g$ – стандартный базис в симплектическом пространстве V (т.е. имеем $(x_i, x_j) = (y_i, y_j) = 0$, $(x_i, y_i) = 1$), то

$$\mathrm{Arf} = \bar{x}_1 \bar{y}_1 + \cdots + \bar{x}_g \bar{y}_g.$$

От выбора стандартного базиса полином Arf не зависит.

ТЕОРЕМА 1 [2]. *Подгруппа кручения $W = \mathrm{Tor}_2(\mathcal{T}^{ab}) \simeq S_2(V)/\mathrm{Arf}$. Ранг подгруппы кручения равен*

$$\binom{2g}{2} + \binom{2g}{1}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для поверхности рода $g > 2$ с дыркой $\mathrm{Tor}_2(\mathcal{T}^{ab}) \simeq S^2(V)$.

Эта работа была выполнена в рамках российско-германского проекта “Модулярная группа и группа Торелли”.

2. Цель работы и формулировка результата. На всех рассмотренных объектах естественно действует конечная простая группа $G = \mathrm{Sp}_g(\mathbb{Z}_2)$. Наша цель – описать структуру G -модуля W , указав его композиционный ряд. Отметим, что действие группы G на алгебре $S(V)$ сохраняет фильтрацию. При этом действие, индуцированное на ассоциированной градуированной алгебре, есть стандартное действие симплектической группы на алгебре Грассмана пространства V .

Далее, так как любые два композиционных ряда G -модуля эквивалентны [3], а любой флаг подмодулей можно уплотнить до композиционного ряда, наша задача – уплотнить флаг G -модулей:

$$0 < \mathbb{Z}_2 < S_1(V) < S_1(V) + \mathrm{Arf} < S_2(V).$$

Но G -модуль $S_1(V)/\mathbb{Z}_2$ изоморфен G -модулю V , простота которого хорошо известна [3]. Таким образом, описание композиционного ряда G -модуля W сводится к аналогичной задаче для G -модуля $\Lambda^2 V$, и для ее решения осталось уплотнить флаг

$$0 < \mathrm{arf} < S_2(V)/S_1(V) \simeq \Lambda^2 V,$$

где arf – элемент из $\Lambda^2 V$, равный $x_1 \wedge y_1 + \dots + x_g \wedge y_g$.

ТЕОРЕМА 2. *Композиционный ряд G -модуля $\Lambda^2 V$ имеет вид*

$$0 < \mathrm{arf} < \Lambda^2 V, \quad \dim(\Lambda^2 V / \mathrm{arf}) = \binom{2g}{2} - 1,$$

при нечетном g и

$$0 < \mathrm{arf} < L < \Lambda^2 V, \quad \dim(L / \mathrm{arf}) = \binom{2g}{2} - 2, \quad \dim(\Lambda^2 V / L) = 1,$$

при четном g .

3. Доказательство теоремы 2. Рассмотрим линейное отображение $l: \Lambda^2 V \rightarrow \mathbb{Z}_2$, которое на разложимом бивекторе $u \wedge v$ принимает значение $l(u \wedge v) = (u, v)$. Пусть L – ядро этого отображения. Ясно, что если g четно, то подпространство L содержит элемент arf . Если же g нечетно, то $\mathrm{arf} \notin L$. Разложимый бивектор $\eta = u \wedge v$ называется изотропным (см. [5; гл.9, §5, упражнение 13]), если векторы u и v порождают в V изотропную 2-плоскость (или, что то же самое, если $(u, v) = 0$). Следующая лемма, по-видимому, известна специалистам (см., например, [5; гл.9, §5, упражнение 13б, в], где имеются близкие утверждения в характеристике 0). Из-за неимения точной ссылки привожу ее вместе с доказательством.

ЛЕММА 1. *Как линейное пространство G -модуль L порождается разложимыми изотропными бивекторами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем в V стандартный симплектический базис $x_i, y_i, i = 1, \dots, g$. Тогда любой бивектор запишется в виде

$$w = \sum a_{st} x_s \wedge y_t + \sum b_{pq} x_p \wedge x_q + \sum c_{km} y_k \wedge y_m. \quad (**)$$

Сосредоточимся на “неизотропных” слагаемых типа $x_s \wedge y_s$.

Так как $l(w) = 0$, то по определению l и определению симплектического базиса в разложении (**) участвует четное число слагаемых вида $x_s \wedge y_s$. Но

$$\begin{aligned} & x_{i_1} \wedge y_{i_1} + x_{i_2} \wedge y_{i_2} + \dots + x_{i_{2s}} \wedge y_{i_{2s}} \\ &= (x_{i_1} + \dots + x_{i_{2s}}) \wedge (y_{i_1} + \dots + y_{i_{2s}}) \\ &+ \{\text{сумма изотропных бивекторов типа } x_p \wedge y_q, p \neq q\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $(x_{i_1} + \dots + x_{i_{2s}}) \wedge (y_{i_1} + \dots + y_{i_{2s}})$ – изотропный бивектор. Это показывает, что линейное пространство L порождается разложимыми изотропными бивекторами.

G -инвариантность L следует из определения линейной функции l и G -инвариантности симплектической формы.

Приступим к ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМЫ. Детально разберем случай нечетного g (четный случай вполне аналогичен). Если g нечетно, то G -инвариантный бивектор arf не лежит в L , а потому $\{\text{arf}\} \oplus L = \Lambda^2 V$. Поэтому в нашем случае для доказательства теоремы достаточно рассмотреть нетривиальный G -подмодуль M , содержащийся в L , и доказать, что $M = L$. Для этого нам потребуется

ЛЕММА 2. *Нетривиальный G -подмодуль M в L содержит разложимый изотропный бивектор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что с каждым вектором $w \in V - \{0\}$ связано симплектическое отражение $r_w \in G = \text{Sp}(\mathbb{Z}_2)$, которое действует в пространстве V по формуле $r_w(z) = z + (z, w)w$.

Рассмотрим разложимый бивектор $\beta = u \wedge v$ и вычислим $\beta + r_w(\beta)$. Имеем

$$\begin{aligned} \beta + r_w(\beta) &= u \wedge v + r_w(u) \wedge r_w(v) = u \wedge v + (u + (u, w)w) \wedge (v + (v, w)w) \\ &= u \wedge v + (u \wedge v) + (u, w)v \wedge w + (v, w)u \wedge w = \underbrace{((u, w)v + (v, w)u)}_{\tau} \wedge w. \end{aligned}$$

Легко проверить, что $(\tau, w) = 0$. Таким образом, $\beta + r_w(\beta)$ – это разложимый изотропный бивектор вида $\alpha \wedge w$, или 0, для любого разложимого бивектора $\beta \in \Lambda^2 V$ и любого отражения r_w из группы G .

Пусть M содержит ненулевой бивектор $\eta \in L$. Он представим суммой разложимых бивекторов: $\eta = \beta_1 + \dots + \beta_s$. Но тогда

$$r_w \eta + \eta = (r_w \beta_1 + \beta_1) + \dots + (r_w \beta_s + \beta_s) = q_1 \wedge w + \dots + q_s \wedge w,$$

причем все бивекторы $q_j \wedge w$ изотропны или равны 0. Следовательно, $r_w \eta + \eta$ есть изотропный бивектор $(q_1 + \dots + q_s) \wedge w$ или 0.

Если он не равен 0, то все доказано.

В противном случае $r_w \eta = \eta$ для любого отражения $r_w \in G$. Но группа G порождена симплектическими отражениями [4]. Следовательно, $g\eta = \eta$ для любого элемента $g \in G$. Таким образом, бивектор η инвариантен под действием всей симплектической группы. Но тогда $\eta = \text{arf} \in L$, а при нечетном g бивектор arf не лежит в L . Полученное противоречие показывает, что для некоторого $w \in V - \{0\}$ бивектор $r_w \eta + \eta$ лежит в M . Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что $M = L$. В самом деле, по теореме Витта [4] (о транзитивности действия группы G на множестве всех разложимых изотропных бивекторов (изотропных 2-подпространств)) G -модуль M содержит все разложимые изотропные бивекторы, если он содержит хотя бы один такой бивектор. Но тогда $M = L$ по лемме 1.

Доказательство теоремы закончено.

Я благодарю профессора J. Mennicke (Bielefeld) за постановку задачи, а также моих российских коллег – профессора, академика РАН С.И. Адяна и аспиранта МИАН А.Л. Таламбуцу за внимание к работе и ценные обсуждения.

Наконец, большое спасибо рецензенту. Его (ее) конструктивная критика способствовала значительному “выпрямлению” текста.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Х. Ципанг, Э. Фогт, Х.-Д. Колдевай, *Поверхности и разрывные группы*, Наука, М., 1988. [2] D. Johnson, *Topology*, **24:2** (1985), 127–144. [3] Ч. Кэртис, И. Райнер, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр*, Наука, М., 1969. [4] Э. Артин, *Геометрическая алгебра*, Наука, М., 1969. [5] Н. Бурбаки, *Алгебра. Модули, кольца, формы*, *Элементы математики*, Наука, М., 1966.

О. В. Шварцман

Государственный университет – Высшая школа экономики,

Независимый московский университет

E-mail: ossipsh@gmail.com

Поступило

29.04.2009