Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Степанов, В. Н. Шелепова, Заметка о солитонах
Риччи, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 474–
477

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:47:40

Заметка о солитонах Риччи

С. Е. Степанов, В. Н. Шелепова

1. Введение. Определение солитона Риччи принадлежит Гамильтону. Солитон Риччи задается системой уравнений эллиптического типа для солитона и некоторого ассоциированного с ним векторного поля. За исключением случая градиентности, других, сколько-нибудь геометрических свойств этого векторного поля, при изучении солитонов Риччи в литературе не рассматривалось, в противоположность, например, понятию солитона Ямабе в теории потоков Ямабе, определение которого, как и солитона Риччи, связано с векторным, но уже конформно киллинговым полем. В настоящей статье мы сделаем акцент на описании солитонов Риччи за счет геометризации понятия участвующего в его определении векторного поля.

2. Солитоны Риччи. Семейство римановых метрик $g_t = g(t)$ на n -мерном ($n \geq 3$) гладком многообразии M , определенных на включающем нуль временном интервале $J \subset \mathbb{R}$, называется *потоком Риччи*, если выполняются уравнения Гамильтона потока Риччи (см. [1; с. 21], [2; с. 98])

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2 \operatorname{Ric}_0 \quad (2.1)$$

для $g_0 = g(0)$ и тензора Риччи Ric_0 метрики g_0 . С самоподобным решением уравнений (2.1) связано понятие *солитона Риччи* (см. [1; с. 22–23]), как метрики g_0 , удовлетворяющей уравнениям

$$-2 \operatorname{Ric}_0 = L_{X_0} g_0 + 2\lambda g_0 \quad (2.2)$$

для некоторого векторного поля X_0 на M , производной Ли L_{X_0} по отношению к X_0 и постоянной λ . Для $\lambda = 0$ солитон Риччи называется *устойчивым*, для $\lambda < 0$ – *стягивающимся* и, наконец, для $\lambda > 0$ – *растягивающимся*. Метрика g_0 называется *градиентным солитоном Риччи* (см. [1; с. 22], [2; с. 154]), если X_0 является градиентом некоторой функции f .

3. Основные результаты. Векторное поле X на римановом многообразии (M, g_0) называется *инфинитезимальным гармоническим преобразованием*, если индуцированная им 1-параметрическая группа локальных преобразований многообразия (M, g_0) состоит из локальных гармонических диффеоморфизмов (см. [3], [4]). Справедлива

ТЕОРЕМА 1. *Векторное поле X_0 на многообразии M , ассоциированное с солитоном Риччи g_0 , является инфинитезимальным гармоническим преобразованием на римановом многообразии (M, g_0) .*

Как это показано в [3], инфинитезимальные гармонические преобразования на римановом многообразии (M, g_0) составляют ядро лапласиана Яно (см. [5; с. 40]). На основании этого факта доказывается

СЛЕДСТВИЕ 1. *На компактном многообразии M не существует солитона Риччи g_0 и ассоциированного с ним векторного поля X_0 таких, что $\operatorname{Ric}_0(X_0, X_0) < 0$.*

Заметим, что в следствии 1 условие $\operatorname{Ric}_0(X_0, X_0) < 0$ можно заменить более жестким требованием $\operatorname{Ric}_0 < 0$, в результате чего $X_0 \equiv 0$ и растягивающийся солитон становится тривиальным, т.е. $\operatorname{Ric}_0 = -\lambda g_0$. Из теоремы 1 также выводится

СЛЕДСТВИЕ 2. *На компактном многообразии M не существует нетривиальных растягивающихся солитонов Риччи.*

Напомним, что конформно киллингово векторное поле X на римановом многообразии (M, g_0) индуцирует 1-параметрическую группу локальных конформных диффеоморфизмов (M, g_0) и задается уравнением

$$L_X g_0 = 2n^{-1}(\operatorname{div} X)g_0$$

(см., например, [2; с. 516], [6; глава II, § 6]). Если подобное поле X является инфинитезимальным гармоническим преобразованием, то $\operatorname{div} X = \operatorname{const}$ при $n > 2$ (см. [4]). Справедлива также

ЛЕММА 1. *Векторное поле X_0 , ассоциированное с солитоном Риччи g_0 , будет конформно киллинговым тогда и только тогда, когда g_0 будет метрикой Эйнштейна.*

Для получения характеристики стягивающихся солитонов Риччи докажем сначала, что справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Если на компактном многообразии M скалярная кривизна s_0 солитона Риччи g_0 удовлетворяет условию $ds_0(X_0) \leq 0$ для ассоциированного с g_0 поля X_0 , то g_0 будет метрикой Эйнштейна.*

На основании леммы из теоремы 2 выводится

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если на 3-мерном односвязном компактном многообразии M скалярная кривизна s_0 стягивающегося солитона Риччи g_0 удовлетворяет условию $ds_0(X_0) \leq 0$ для ассоциированного с g_0 векторного поля X_0 , то риманово многообразие (M, g_0) будет изометричным сфере $\mathbb{S}^3$.*

Заметим, что и в текстах теоремы 2 и следствия 3 условие $ds_0(X_0) \leq 0$ можно заменить более жестким требованием $s_0 = \operatorname{const}$.

4. Доказательство утверждений. В локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ многообразия M уравнения солитона Риччи примут вид

$$-2R_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i + 2\lambda g_{ij}. \quad (4.1)$$

Здесь $X_i = g_{ij}X^j$, R_{ij} и g_{ij} – компоненты векторного поля X_0 , тензоров Риччи Ric_0 и g_0 , а ∇_k – символ ковариантного дифференцирования в направлении $\partial_k = \partial/\partial x^k$, в записи которых символ “0” мы для упрощения обозначений опускаем.

Сверткой с g^{ij} из (4.1) получаем для X_0 выражение его дивергенции

$$\operatorname{div} X_0 := \nabla_i X^i = -(s_0 + n\lambda), \quad (4.2)$$

где $s_0 = g^{ij}R_{ij}$ – скалярная кривизна метрики g_{ij} . Благодаря (4.2), уравнениям (4.1) можно придать вид

$$2(n^{-1}s_0g_{ij} - R_{ij}) = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i - 2n^{-1}(\operatorname{div} X)g_{ij}.$$

Осталось напомнить, что g_0 является метрикой Эйнштейна (см. [7; с. 65]), если $\operatorname{Ric}_0 = \mu \cdot g_0$, где, как нетрудно установить, $\mu = n^{-1}s_0$. Лемма доказана.

Ковариантным образом продифференцируем обе части (4.1) в направлении $\partial_k = \partial/\partial x^k$, а затем проведя альтернацию, получим

$$2(\nabla_i R_{kj} - \nabla_k R_{ij}) = \nabla_k \nabla_i X_j - \nabla_i \nabla_k X_j + \nabla_k \nabla_j X_i - \nabla_i \nabla_j X_k. \quad (4.3)$$

Воспользуемся в (4.3) тождеством Риччи $\nabla_k \nabla_i X_j - \nabla_i \nabla_k X_j = -X_l R_{jki}^l$, затем свернем обе части полученного равенства с g^{ij} и, наконец, прибегнем к тождеству $2\nabla_l R_j^l = \nabla_j s_0$; в итоге получим

$$-\nabla_k s_0 = -X_l R_k^l + \nabla_k \nabla_l X^l - g^{ij} \nabla_i \nabla_j X_k. \quad (4.4)$$

Из (4.2) следует равенство $-\nabla_k s_0 = \nabla_k \nabla_l X^l$, которое позволяет представить (4.4) в следующем виде:

$$g^{ij} \nabla_i \nabla_j X^k + R_l^k X^l = 0,$$

где

$$\square X^k = -(g^{ij} \nabla_i \nabla_j X^k + R_l^k X^l) \quad (4.5)$$

– оператор Яно (см. [5; с. 40]), который, как это доказано в [3], является лапласианом. Теорема 1 доказана.

Всюду далее будем предполагать, что M – компактное многообразие. Вслед за Номидзу (см. [5; с. 63]), рассматривая для M его ориентируемое двулистное накрытие, воспользуемся интегральной формулой

$$\int_M ((g^{ij} \nabla_i \nabla_j X^k) X_k + |\nabla X|^2) dV = 0,$$

справедливой для любого векторного поля X на M (см. также [8; гл. II, § 1, формула (1.2)]). Данной формуле в соответствие с (4.5) придадим вид

$$\int_M ((g \square X, X) + \text{Ric}(X, X) - |\nabla X|^2) dV = 0. \quad (4.6)$$

Теперь очевидно, что для солитона Риччи g_0 условие $\text{Ric}_0(X_0, X_0) < 0$ несовместимо с интегральным уравнением (4.6). Следствие 1 доказано.

Приведем теперь два известных факта. С одной стороны (см. [6; § 2, пункт 2.3], [9]), на компактном многообразии M растягивающийся солитон Риччи является градиентным. С другой стороны, доказано (см. [7], [9]), что на компактном многообразии M градиентный растягивающийся солитон Риччи g_0 является метрикой Эйнштейна. В результате (см. также [9]), на компактном многообразии M растягивающийся солитон Риччи является метрикой Эйнштейна. Но для метрики Эйнштейна g_0 ее скалярная кривизна $s_0 = \text{const}$ при $n \geq 3$ (см. [10; с. 66]). В этом случае из (4.2) следует $\nabla_i X^i = -(s_0 + n\lambda) = \text{const}$, что для компактного риманова многообразия (M, g_0) в силу теоремы Грина $\int_M (\nabla_i X^i) dV = 0$ означает $s_0 = -n\lambda$. Тогда для растягивающегося солитона Риччи g_0 его скалярная кривизна $s_0 < 0$ и, следовательно, $\text{Ric}_0(X_0, X_0) = n^{-1} s_0 |X_0|^2 \leq 0$. Отсюда с учетом предыдущего следствия выводится справедливость следствия 2.

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся интегральной формулой (см. [8; глава II, § 1, формула (1.14)])

$$\int_M (g(\square X - n^{-1}(n-2)d(\text{div } X), X) - 2^{-1}|L_X g - 2n^{-1}(\text{div } X)g|^2) dV = 0.$$

Для солитона Риччи g_0 эта формула принимает вид

$$\int_M (n^{-1}(n-2)g_0(ds_0, X_0) - 2^{-1}|L_{X_0} g - 2n^{-1}(\text{div } X_0)g_0|^2) dV = 0. \quad (4.7)$$

Если предположить, что $g_0(ds_0, X_0) := ds_0(X_0) \leq 0$, или, в частности, что $s_0 = \text{const}$, то из (4.7) следует, что $L_{X_0} g = 2n^{-1}(\text{div } X_0)g_0$. С учетом этого на основании леммы заключаем, что солитон Риччи g_0 – метрика Эйнштейна. Если $n = 3$, многообразие M односвязное и g_0 – стягивающийся солитон Риччи, то (M, g_0) будет римановым многообразием постоянной кривизны $K = [n(n-1)]^{-1}s_0 > 0$ (см. [10; с. 66]), изометричным сфере $\mathbb{S}^3$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Chow, D. Knopf, *The Ricci Flow: an Introduction*, Math. Surveys Monogr., **110**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004. [2] B. Chow, P. Lu, L. Ni, *Hamilton's Ricci Flow*, Grad. Stud. Math., **77**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006. [3] S. E. Stepanov, I. G. Shandra, *Ann. Global Anal. Geom.*, **24**:3 (2003), 291–299. [4] С. Е. Степанов, И. Г. Шандра, *Алгебра и анализ*, **16**:2 (2004), 154–171. [5] И. Кобаяси, *Группы преобразований в дифференциальной геометрии*, Наука, М., 1986. [6] G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, [arXiv: math.DG/0211159v1](https://arxiv.org/abs/math/0211159v1). [7] R. S. Hamilton, *Surveys in Differential Geometry. II* (Cambridge, MA, 1993), Cambridge Int. Press, Cambridge, 1995, 7–136. [8] K. Yano, *Integral Formulas in Riemannian Geometry*, Pure Appl. Math., **1**, Marcel Dekker, New York, 1970. [9] H.-D. Cao, *Chinese Ann. Math. Ser. B*, **27**:2 (2006), 121–142. [10] А. Бессе, *Многообразия Эйнштейна*, Т. 1, Мир, М., 1990.

С. Е. Степанов

Владимирский государственный педагогический университет

E-mail: stepanov@vtsnet.ru

Поступило

23.05.2007

В. Н. Шелепова

Владимирский государственный педагогический университет