Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Атабекян, О мономорфизмах свободных бернсайдовых групп, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 4, 483–490

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8509>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 15:32:27

О мономорфизмах свободных бернсайдовых групп

В. С. Атабекян

В работе доказывается, что для каждого нечетного $n \geq 1039$ существуют слова $u(x, y)$, $v(x, y)$ над групповым алфавитом $\{x, y\}$ такие, что если a, b – любые два некоммутирующих элемента свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$, то для некоторого k элементы $u(a^k, b)$, $v(a^k, b)$ свободно порождают свободную бернсайдовую подгруппу группы $B(m, n)$. Из доказанного, в частности, следует равномерная неаменабельность групп $B(m, n)$ для нечетных $n \geq 1039$.

Библиография: 23 названия.

1. Введение. Пусть F_m – абсолютно свободная группа произвольного ранга m , n – натуральное число, F_m^n – подгруппа, порожденная всевозможными n -ми степенями элементов из F_m . Фактор-группа F_m/F_m^n обозначается через $B(m, n)$. Группа $B(m, n)$ свободна в многообразии всех n -периодических групп и называется *свободной периодической* или *свободной бернсайдовой группой* периода n и ранга m . Хорошо известная теорема Адяна утверждает, что для всех нечетных $n \geq 665$ и $m \geq 2$ группа $B(m, n)$ бесконечна (решение проблемы Бернсайда). Доказательство бесконечности групп $B(m, n)$ при нечетных $n \geq 665$ основано на полной классификации периодических и приведенных слов ранга α , которая дана в работах [1], [2]. Развита в [1], [2] теория, позволившая решить проблему Бернсайда, открыла путь к решению и многих других проблем теории групп (см., например, обзорную статью [3]).

Одним из классических результатов о периодических группах является теорема 5 из работы [4] Адяна, утверждающая, что для всех нечетных $n \geq 665$ и $m \geq 2$ группа $B(m, n)$ неаменабельна.

Напомним, что группа G называется *неаменабельной*, если для некоторого (а следовательно, для любого) конечного порождающего множества X имеет место

$$\inf_A \frac{|\partial_X(A)|}{|A|} > 0,$$

где инфимум берется по всем конечным непустым подмножествам $A \subset G$, а

$$\partial_X(A) = \{a \in A \mid ax \notin A \text{ для некоторого } x \in X^{\pm 1}\}$$

– внутренняя граница подмножества A (см. [5]). Например, любая группа, содержащая абсолютно свободную подгруппу ранга 2, неаменабельна (см. [6]). Группы $B(m, n)$ – первые примеры неаменабельных групп, удовлетворяющие нетривиальному тождеству (тождеству $x^n = 1$).

Более сильная форма неаменабельности является равномерная неаменабельность, введенная позже в совместной работе [5]. Конечно порожденная группа называется *равномерно неаменабельной*, если

$$\inf_X \left(\inf_A \frac{|\partial_X(A)|}{|A|} \right) > 0,$$

где второй инфимум берется по всевозможным конечным порождающим множествам X группы G .

В статье [5] сформулировано следующее утверждение: для $m \geq 2$ и достаточно большого нечетного n ($n > 10^{78}$) свободная бернсайдовая группа $B(m, n)$ является равномерно неаменабельной группой (см. следствие 11.1 [5]). Доказательство этого утверждения в [5] выводится из вышеуказанной теоремы Адяна о неаменабельности групп $B(m, n)$ и из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (теорема 41 [7]). *Для заданного достаточно большого нечетного n ($n > 10^{78}$) и $m \geq 2$ существуют слова $u(x, y)$, $v(x, y)$ в алфавите $\{x, y\}$ такие, что если a, b – два некоммутующих элемента группы $B(m, n)$, то подгруппа H , порожденная элементами $u(a, b)$ и $v(a, b)$, изоморфна свободной бернсайдовой группе $B(2, n)$.*

Предложение 1 было сформулировано Ивановым без доказательства в совместной статье [7]. К сожалению, доказательство этого утверждения до сих пор не опубликовано. Этот факт отмечен также Осиным в работе [8], где предложено другое, обходящее предложение 1, доказательство равномерной неаменабельности групп $B(m, n)$ для всех $m \geq 2$ и нечетных $n > 10^{78}$. В работе [9] автора дано доказательство равномерной неаменабельности не только группы $B(m, n)$, но и любой конечно порожденной нециклической подгруппы групп $B(m, n)$ для всех нечетных $n \geq 1003$. Следует подчеркнуть, что как в [8], так и в [9], существенно используется теорема Адяна о неаменабельности групп $B(m, n)$.

Приведенное выше предложение 1 связано со следующим вопросом Ханны Нейман (см. гл. 4, § 2 [10]).

ВОПРОС 1. При каких условиях подмножество свободной группы данного многообразия порождает свободную группу того же многообразия?

Отметим, что, как доказано Ольшанским в [11], для любого нечетного числа $n > 10^{78}$ ни одна собственная нормальная подгруппа группы $B(m, n)$ не является свободной (положительный ответ на вопрос Адяна из коуровской тетради). Более того, согласно [12] последнее утверждение верно для всех нечетных $n \geq 1003$.

К этой тематике относится и проблема, поставленная Ньюэном.

ВОПРОС 2 (см. проблема 10 [13]). Описать 2-порожденные подгруппы бесконечных групп $B(m, n)$. Для простых n являются ли они свободными бернсайдовыми группами? Для непростых показателей n являются ли они периодическими произведениями в смысле, введенном Адяном в [14]?

Первые примеры подмножеств в свободной группе ранга 2 бернсайдова многообразия, порождающих свободную группу ранга 3 того же многообразия, были указаны Адяном в [14], [1]. А именно, им доказано, что если для данного нечетного $n \geq 665$ элементы a и b являются свободными порождающими группы $B(2, n)$,

то элементы a , bab^{-1} , b^3ab^{-3} свободно порождают подгруппу, изоморфную группе $B(3, n)$. В дальнейшем разными авторами были указаны другие достаточные условия для того, чтобы подмножество свободной группы бернсайдова многообразия порождало свободную группу того же многообразия (см. [15]–[21]).

Нашей целью является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Для любого нечетного $n \geq 1039$ существуют слова $u(x, y)$, $v(x, y)$ над групповым алфавитом $\{x, y\}$ такие, что если a, b – любые два элемента, порождающие нециклическую подгруппу группы $B(m, n)$, то для некоторого p элементы $u(a^p, b)$, $v(a^p, b)$ свободно порождают подгруппу, изоморфную группе $B(2, n)$ (причем, $p = 2^k$ и $0 \leq k \leq 9$).*

Слова $u(x, y)$ и $v(x, y)$, существование которых утверждается в формулировке теоремы 1, указаны в явном виде (см. соотношения (1) и (2) ниже). Обозначив $u_k(x, y) = u(x^{2^k}, y)$, $v_k(x, y) = v(x^{2^k}, y)$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любого нечетного $n \geq 1039$ существуют слова*

$$u_0(x, y), \dots, u_9(x, y), \quad v_0(x, y), \dots, v_9(x, y)$$

над групповым алфавитом $\{x, y\}$ такие, что если a, b – любые два некоммутирующих элемента группы $B(m, n)$, то для некоторого k элементы $u_k(a, b)$, $v_k(a, b)$ свободно порождают подгруппу, изоморфную группе $B(2, n)$.

В доказательстве теоремы 1, помимо фундаментальной монографии [1], ключевую роль играет совместная работа Адяна и Лысёнка [22], где для каждого нечетного числа $n \geq 1003$ была построена бесконечная 2-порожденная группа, каждая максимальная подгруппа которой – циклическая группа порядка n (такие группы называются “монстрами” Тарского). При этом нам приходится заменить неравенство $n \geq 1003$ на $n \geq 1039$ лишь для обеспечения условия $372 \leq (n+1)/2 - 148$ (см. доказательство леммы 3).

Пусть $\phi: B(2, n) \rightarrow B(2, n)$ есть гомоморфизм группы $B(m, n)$, заданный на свободных порождающих x и y формулами $\phi(x) = u(x, y)$, $\phi(y) = v(x, y)$. Ясно, что гомоморфизм $\tau: B(2, n) \rightarrow B(2, n)$, $\tau(x) = x^{2^k}$, $\tau(y) = y$, является автоморфизмом, так как, очевидно, обладает обратным. Из теоремы 1 непосредственно следует, что для некоторого k композиция $\tau \circ \phi$ является мономорфизмом. Следовательно, ϕ тоже есть мономорфизм. Используя эти мономорфизмы, получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. *Существует такой мономорфизм $\phi: B(2, n) \rightarrow B(2, n)$, что для любого эндоморфизма $\varphi: B(2, n) \rightarrow B(2, n)$ с нециклическим образом найдется автоморфизм $\tau: B(2, n) \rightarrow B(2, n)$ такой, что $\varphi \circ \tau \circ \phi$ – мономорфизм.*

Действительно, если $\varphi(x) = a$ и $\varphi(y) = b$, то

$$\varphi \circ \tau \circ \phi(x) = \varphi(\tau(\phi(x))) = u(a^{2^k}, b), \quad \varphi \circ \tau \circ \phi(y) = \varphi(\tau(\phi(y))) = v(a^{2^k}, b),$$

и остается воспользоваться теоремой 1.

Известно, что только многообразие всех групп, многообразие всех абелевых групп и многообразия всех абелевых групп данной простой экспоненты p обладают тем свойством, что всякая подгруппа свободной группы многообразия свободна в этом

многообразии (так называемое свойство шрейеровости, см. [23], [10]). Кроме того, конечно порожденные свободные группы указанных многообразий как финитно аппроксимируемые группы являются хопфовыми. Поэтому любые два элемента, порождающие нециклическую подгруппу свободной группы каждого из указанных многообразий, являются свободными порождающими свободной группы ранга 2 того же многообразия. Тем самым, для свободных групп этих многообразий справедлив аналог теоремы 1, если принимать $u = x$ и $v = y$. Естественно возникает вопрос о нахождении других многообразий, в которых справедлив аналог теоремы 1. Для сравнения отметим, что неизвестно, являются ли хопфовыми группы $B(m, n)$?

Затрагивая поднятые выше вопросы, теорема 1 позволяет также восполнить недостаток в доказательстве равномерной неаменабельности групп $B(m, n)$, данном в работе [5], с улучшенной оценкой для экспоненты n . Для этого достаточно в доказательстве работы [5] вместо теоремы 41 [7] сослаться на теорему 1.

На затронутые темы в определенной степени прольет свет ответ на следующий, на наш взгляд, ключевой

ВОПРОС 3. Верно ли, что если a и b – произвольные два некоммутирующих элемента группы $B(m, n)$ нечетного периода $n \geq 665$, причем a имеет порядок n , то подгруппа $\langle a, bab^{-1} \rangle_{B(m, n)}$ изоморфна группе $B(2, n)$?

2. Доказательство теоремы 1. Пусть

$$w(x, y) \equiv [x, xyx^{-1}] \quad \text{и} \quad W(x, y) \equiv [w(x, y)^d, xw(x, y)^d x^{-1}],$$

где $d = 191$. В качестве слов $u(x, y)$ и $v(x, y)$ выберем слова

$$u(x, y) \equiv W(x, y)^{200} w(x, y) W(x, y)^{200} w(x, y)^2 \dots W(x, y)^{200} w(x, y)^{n-1} W(x, y)^{200}, \quad (1)$$

$$v(x, y) \equiv W(x, y)^{300} w(x, y) W(x, y)^{300} w(x, y)^2 \dots W(x, y)^{300} w(x, y)^{n-1} W(x, y)^{300}. \quad (2)$$

Отправной точкой для нас служит следующее утверждение, доказанное автором в работе [21].

ЛЕММА 1 [21; теорема 2]. Пусть коммутатор $[A^d, Z^{-1}B^dZ]$ в группе $B(2, n, \alpha - 1)$ равен элементарному периоду C ранга α , где A – минимизированный элементарный период ранга γ , B – минимизированный элементарный период ранга β , $Z \in \mathcal{M}_{\alpha-1}$ ($\gamma \leq \beta \leq \alpha - 1$), $d = 191$ и $n \geq 1003$ – произвольное нечетное число. Тогда слова

$$u_1 \equiv C^{200} A C^{200} A^2 \dots A^{n-1} C^{200} \quad \text{и} \quad u_2 \equiv C^{300} A C^{300} A^2 \dots A^{n-1} C^{300}$$

являются базисом свободной бернсайдовой подгруппы ранга 2 группы $B(2, n)$.

ЛЕММА 2. Пусть $n \geq 665$ – произвольное нечетное число. Если a и b не коммутируют в $B(m, n)$ и $a^p \neq 1$, то $w(a^p, b) \neq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $w(a^p, b) = [a^p, ba^p b^{-1}] \stackrel{B(m, n)}{=} 1$, т.е. элементы a^p и $ba^p b^{-1}$ коммутируют. По теореме VI.3.1 [1] Адяна можно найти элемент z порядка n и целые числа r и s такие, что $a^p = z^r$ и $ba^p b^{-1} = z^s$. Из равенства $bz^r b^{-1} = z^s$ следует, что b принадлежит нормализатору подгруппы $\langle z^r \rangle_{B(m, n)}$. Поэтому

$$|\langle z^r, b \rangle_{B(m, n)}| \leq |\langle z^r \rangle| \cdot |\langle b \rangle| \leq n^2.$$

Теорема VII.1.8 [1] Адяна утверждает, что каждая конечная подгруппа группы $B(m, n)$ – циклическая группа. Значит, $\langle z^r, b \rangle_{B(m, n)} = \langle a^p, b \rangle_{B(m, n)}$ – циклическая группа. В частности, b принадлежит централизатору a^p . По теореме VI.3.2 [1] Адяна централизатор любого неединичного элемента группы $B(m, n)$ есть циклическая группа. Поскольку элементы a и b принадлежат централизатору a^p , они лежат в одной циклической подгруппе, тем самым, коммутируют. Полученное противоречие доказывает лемму 2.

ЛЕММА 3. Пусть $n \geq 1039$ – произвольное нечетное число. Если a и b не коммутируют в группе $B(m, n)$ и a сопряжен степени некоторого элементарного периода E ранга γ , то для некоторого $p = 2^k$, где $0 \leq k \leq 9$, элемент $w(a^p, b)$ сопряжен некоторому элементарному периоду ранга $\beta \geq \gamma + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что леммы 2.8, 3.2, 6.6 и 7.2 из работы [22] остаются справедливыми, если в их формулировках и доказательствах эквивалентность в ранге α заменить на эквивалентность в ранге α в смысле монографии [1], а равенство слов в группе Γ_α заменить на равенство в группе $B(m, n, \alpha)$.

Пусть для некоторого слова T имеем $a = TE^rT^{-1}$ в $B(m, n)$. Заменяя при необходимости E на E^{-1} , можем считать, что $1 \leq r \leq (n-1)/2$. Сначала покажем, что для некоторого $186 \leq s \leq (n+1)/2 - 148$ и некоторого целого $0 \leq k \leq 9$ имеет место сравнение $r \cdot 2^k \equiv s \pmod{n}$. Действительно, при $186 \leq r \leq (n+1)/2 - 148$ можно выбрать $k = 0$, а если

$$\frac{186}{2^k} \leq r \leq \frac{372}{2^k}, \quad \text{где } k = 1, \dots, 8,$$

то

$$186 \leq r \cdot 2^k \leq 372 \leq \frac{n+1}{2} - 148$$

(так как $n \geq 1039$). Если же

$$\frac{n+1}{2} - 148 \leq r \leq \frac{n-1}{2},$$

то

$$1 \leq n - 2r \leq 295 \leq \frac{n+1}{2} - 148$$

и можно воспользоваться предыдущими рассуждениями (опять заменив E на E^{-1}). Таким образом, для некоторого $p = 2^k$, где $0 \leq k \leq 9$, имеем $a^p = TE^{rp}T^{-1} = TE^sT^{-1}$ и выполнено неравенство

$$186 \leq s \leq \frac{n+1}{2} - 148.$$

По лемме 2.8 [22] период E можно выбрать минимизированным, а в силу VI.2.4 [1] и IV.3.12 [1] можно считать, что $T^{-1}bT \in \mathcal{M}_\gamma \cap \mathcal{A}_{\gamma+1}$. В силу леммы 2 имеем $T^{-1}w(a^p, b)T \neq 1$ в группе $B(m, n)$, поэтому $[E^s, T^{-1}bTE^sT^{-1}b^{-1}T] \neq 1$ и согласно лемме 3.2 [22] можно указать приведенную форму A коммутатора $[E^s, T^{-1}bTE^s \times T^{-1}b^{-1}T]$, которая по лемме 7.2 [22] есть элементарный период некоторого ранга $\beta \geq \gamma + 1$. Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Пусть $n \geq 1003$ – произвольное нечетное число. Допустим, что a и b не коммутируют в группе $B(m, n)$, элемент a сопряжен степени некоторого элементарного периода E ранга γ и для некоторого p элемент $w(a^p, b)$ сопряжен некоторому элементарному периоду ранга $\beta \geq \gamma + 1$. Тогда $W(a^p, b) \neq 1$ в $B(m, n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию $a = TE^rT^{-1}$ для некоторого элементарного периода E ранга γ и $w(a^p, b) = UAU^{-1}$, где A есть элементарный период некоторого ранга $\beta > \gamma$. Предположим, что

$$W(a^p, b) = [w(a^p, b)^d, a^p w(a^p, b)^d a^{-p}] \stackrel{B(m, n)}{=} 1.$$

Тогда по теореме VI.3.1 [1] можно найти элемент c порядка n и целые числа t и s такие, что

$$UA^dU^{-1} = c^t \quad \text{и} \quad a^pUA^dU^{-1}a^{-p} = c^s.$$

Отсюда, как и в лемме 2, следует, что $\langle c^t, a^p \rangle_{B(m, n)}$ – циклическая группа. Поскольку элемент c^t имеет порядок n (так как элементарный период A имеет порядок n и $(d, n) = 1$), получается, что некоторая степень элементарного периода E ранга γ сопряжена в группе $B(m, n)$ некоторой степени элементарного периода A ранга $\beta \geq \gamma + 1$. Это противоречит лемме 6.6 [22]. Значит, $W(a^p, b) \neq 1$ в $B(m, n)$. Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $n \geq 1039$ – произвольное нечетное число и a и b – два некоммутирующих элемента группы $B(2, n)$. Тогда для некоторого $p = 2^k$, где $0 \leq k \leq 9$, слова $u(a^p, b)$, $v(a^p, b)$ свободно порождают свободную бернсайдовую подгруппу группы $B(2, n)$, где слова $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определены равенствами (1) и (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По VI.2.5 [1] элемент a сопряжен в группе $B(2, n)$ степени некоторого элементарного периода E ранга $\gamma \geq 1$. Согласно лемме 3 для некоторого слова U , для некоторого $p = 2^k$ и для некоторого элементарного периода A ранга $\beta > \gamma$ имеют место равенства

$$w(a^p, b) = UAU^{-1} \quad \text{и} \quad W(a^p, b) = [UA^dU^{-1}, a^pUA^dU^{-1}a^{-p}]$$

в $B(2, n)$. В силу леммы 2.8 [22] период A можно считать минимизированным. По лемме 3 $W(a^p, b) \neq 1$ в $B(2, n)$. В силу VI.2.4 [1] и IV.3.12 [1] можно предположить, что $U^{-1}a^pU \in \mathcal{M}_\beta \cap \mathcal{A}_{\beta+1}$. Согласно 3.2 [22] выберем некоторую приведенную форму G коммутатора $[A^d, (U^{-1}a^pU)A^d(U^{-1}a^{-p}U)]$, которая согласно лемме 7.2 [22] есть элементарный период некоторого ранга $\delta \geq \beta + 1$. В силу соотношения (3.6) работы [22] коммутатор $[A^d, (U^{-1}a^pU)A^d(U^{-1}a^{-p}U)]$ и его приведенная форма G связаны соотношением

$$G \stackrel{B(m, n, \delta-1)}{=} t[A^d, U^{-1}a^pUA^dU^{-1}a^{-p}U]t^{-1}$$

для некоторого $t \in \Theta(A, A_1)$ (см. определения 2.3 и 3.1 [22]), где A_1 – циклический сдвиг слова A . Из II.3.5 [1] и II.6.13 [1] следует, что A_1 – тоже минимизированный элементарный период ранга γ , а по VI.2.4 [1] и IV.3.12 [1] для некоторого $Z \in \mathcal{M}_{\delta-1} \cap \mathcal{A}_\delta$ имеем

$$G \stackrel{\delta-1}{=} [A_1^d, ZA^dZ^{-1}], \quad \text{где} \quad Z \stackrel{\delta-1}{=} tU^{-1}a^pU.$$

Применив лемму 1, заключаем, что слова

$$G^{200}A_1G^{200}A_1^2G^{200}A_1^{n-1}G^{200} \quad \text{и} \quad G^{300}A_1G^{300}A_1^2G^{300}A_1^{n-1}G^{300}$$

свободно порождают свободную бернсайдовую подгруппу ранга 2 группы $B(2, n)$. Остается заметить, что $Ut^{-1}A_1tU^{-1} = w(a^p, b)$, $Ut^{-1}GtU^{-1} = W(a^p, b)$ в группе $B(2, n)$ и, следовательно,

$$u(a^p, b) = (Ut^{-1})(G^{200}A_1G^{200}A_1^2G^{200}A_1^{n-1}G^{200})(Ut^{-1})^{-1},$$

$$v(a^p, b) = (Ut^{-1})(G^{300}A_1G^{300}A_1^2G^{300}A_1^{n-1}G^{300})(Ut^{-1})^{-1}.$$

Лемма 5 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Из теоремы Адяна VI.3.7 [1] непосредственно следует, что для любого нечетного $n \geq 665$ и конечного m группа $B(m, n)$ изоморфно вкладывается в группу $B(2, n)$ (см. также [15]). Поэтому теорему 1 достаточно доказать в случае $m = 2$. А в этом случае справедливость теоремы 1 вытекает из леммы 5.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, М., 1975.
- [2] П. С. Новиков, С. И. Адян, “О бесконечных периодических группах. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:1 (1968), 212–244; “О бесконечных периодических группах. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:2 (1968), 251–524; “О бесконечных периодических группах. III”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:3 (1968), 709–731.
- [3] С. И. Адян, “Исследования по проблеме Бернсайда и связанным с ней вопросам”, *Алгебра, математическая логика, теория чисел, топология*, Сборник обзорных статей. 1, Тр. МИАН, **168**, Наука, М., 1984, 171–196.
- [4] С. И. Адян, “Случайные блуждания на свободных периодических группах”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:6 (1982), 1139–1149.
- [5] G. N. Arzhantseva, J. Burillo, M. Lustig, L. Reeves, H. Short, E. Ventura, “Uniform non-amenability”, *Adv. Math.*, **197**:2 (2005), 499–522.
- [6] J. von Neumann, “Zur allgemeinen Theorie des Masses”, *Fund. Math.*, **13** (1929), 73–116.
- [7] S. V. Ivanov, A. Yu. Ol’shanskii, “Some applications of graded diagrams in combinatorial group theory”, *Groups – St. Andrews 1989*, Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **160**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991, 258–308.
- [8] D. V. Osin, “Uniform non-amenability of free Burnside groups”, *Arch. Math. (Basel)*, **88**:5 (2007), 403–412.
- [9] В. С. Атабекян, “Равномерная неаменабельность подгрупп свободных бернсайдовых групп нечетного периода”, *Матем. заметки*, **85**:4 (2009), 516–523.
- [10] Х. Нейман, *Многообразие групп*, Мир, М., 1969.
- [11] A. Yu. Ol’shanskii, “Self-normalization of free subgroups in the free Burnside groups”, *Groups, Rings, Lie and Hopf Algebras* (St. John’s, NF, 2001), Math. Appl., **555**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2003, 179–187.
- [12] V. Atabekyan, “Normal subgroups in free Burnside groups of odd period”, *Armen. J. Math.*, **1**:2 (2008), 25–29.
- [13] M. F. Newman, “Problems”, *Burnside groups* (Proc. Workshop, Univ. Bielefeld, Bielefeld, 1977), Lecture Notes in Math., **806**, Springer-Verlag, Berlin, 1980, 249–254.
- [14] С. И. Адян, “Периодическое произведение групп”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей, посвященный академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его 85-летию, Тр. МИАН, **142**, Наука, М., 1976, 3–21.

- [15] В. Л. Ширванян, “Вложение группы $B(\infty, n)$ в группу $B(2, n)$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:1 (1976), 190–208.
- [16] В. С. Атабекян, *Об аппроксимации и подгруппах свободных периодических групп*, деп. в ВИНТИ 5380-B86.
- [17] В. С. Атабекян, “О простых и свободных периодических группах”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1987, № 6, 76–78.
- [18] A. Yu. Ol’shanskii, M. V. Sapir, “Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **96** (2002), 43–169.
- [19] D. Sonkin, “СЕР-subgroups of free Burnside groups of large odd exponents”, *Comm. Algebra*, **31**:10 (2003), 4687–4695.
- [20] S. V. Ivanov, “On subgroups of free Burnside groups of large odd exponent”, *Illinois J. Math.*, **47**:1–2 (2003), 299–304.
- [21] В. С. Атабекян, “О подгруппах свободных бернсайдовых групп нечетного периода $n \geq 1003$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:5 (2009), 3–36.
- [22] С. И. Адян, И. Г. Лысёнок, “О группах, все собственные подгруппы которых конечные циклические”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:5 (1991), 933–990.
- [23] P. M. Neumann, J. Wiegold, “Schreier varieties of groups”, *Math. Z.*, **85** (1964), 392–400.

В. С. Атабекян

Ереванский государственный университет, Армения

E-mail: avarujan@ysu.am

Поступило

10.04.2009