Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Бор, Теорема о множителях абсолютной суммируемости, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 4, 491–496

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8510>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:34:36

Теорема о множителях абсолютной суммируемости

Х. Бор

В данной работе теорема о множителях $[\overline{N}, p_n]_k$ -суммируемости бесконечного ряда доказана при более слабых условиях. Также получен новый результат относительно множителей $|C, 1|_k$ -суммируемости.

Библиография: 8 названий.

1. Введение. Положительная последовательность (b_n) называется *почти возрастающей*, если существует положительная возрастающая последовательность (c_n) и две положительные константы A и B такие, что $Ac_n \leq b_n \leq Bc_n$ (см. [1]). Через $\mathcal{BV}_\theta$ обозначим выражение $\mathcal{BV} \cap \mathcal{C}_\theta$, где $\mathcal{C}_\theta$ и $\mathcal{BV}$ – множества всех нулевых последовательностей и всех последовательностей с ограниченной вариацией соответственно. Пусть $\sum a_n$ – заданный бесконечный ряд, последовательность частичных сумм которого обозначим через (s_n) . Через u_n и t_n обозначим n -е $(C, 1)$ -средние последовательностей (s_n) и (na_n) соответственно. Ряд $\sum a_n$ называется *суммируемым* $|C, 1|_k$, $k \geq 1$, если (см. [2], [3])

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |u_n - u_{n-1}|^k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n|^k}{n} < \infty. \quad (1)$$

Пусть (p_n) – последовательность положительных чисел таких, что

$$P_n = \sum_{v=0}^n p_v \rightarrow \infty \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad P_{-i} = p_{-i} = 0, \quad i \geq 1. \quad (2)$$

Преобразование одной последовательности в другую

$$\sigma_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v \quad (3)$$

задает последовательность (σ_n) *средних Рисса* (или просто $(\overline{N}, p_n)$ -*средних*) последовательности (s_n) , порожденной последовательностью коэффициентов (p_n) (см. [4]). Ряд $\sum a_n$ называется $[\overline{N}, p_n]_k$ -*суммируемым* при $k \geq 1$, если (см. [5])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\Delta \sigma_{n-1}|^k < \infty, \quad (4)$$

где

$$\Delta\sigma_{n-1} = \sigma_n - \sigma_{n-1} = -\frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n P_{v-1} a_v, \quad n \geq 1. \quad (5)$$

В частном случае $p_n = 1$ при всех n $|\overline{N}, p_n|_k$ -суммируемость сводится к $|C, 1|_k$ -суммируемости.

2. Известный результат. Недавно Бор [6] доказал следующую теорему о множителях $|\overline{N}, p_n|_k$ -суммируемости.

ТЕОРЕМА А. Пусть (X_n) – почти возрастающая последовательность, и пусть существуют последовательности (β_n) и (λ_n) такие, что

$$|\Delta\lambda_n| \leq \beta_n, \quad (6)$$

$$\beta_n \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |\Delta\beta_n| X_n < \infty, \quad (8)$$

$$|\lambda_n| X_n = O(1). \quad (9)$$

Если

$$\sum_{v=1}^n \frac{|t_v|^k}{v} = O(X_n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (10)$$

и (p_n) – последовательность такая, что

$$P_n = O(np_n), \quad (11)$$

$$P_n \Delta p_n = O(p_n p_{n+1}), \quad (12)$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_n \lambda_n}{np_n}$$

является $|\overline{N}, p_n|_k$ -суммируемым при $k \geq 1$.

3. Основной результат. Цель данной работы – доказать теорему А при более слабых условиях. Следовательно, нам нужно понятие квази- β -степенной возрастающей последовательности. Положительная последовательность (γ_n) называется квази- β -степенной возрастающей последовательностью, если существует постоянная $K = K(\beta, \gamma) \geq 1$ такая, что неравенство

$$Kn^\beta \gamma_n \geq m^\beta \gamma_m \quad (13)$$

выполняется при всех $n \geq m \geq 1$. Следует заметить, что всякая почти возрастающая последовательность является квази- β -степенной возрастающей последовательностью для любого неотрицательного β , но обратное неверно при $\beta > 0$. Более того, для любого положительного β существует квази- β -степенная возрастающая последовательность, стремящаяся к бесконечности, которая не является почти возрастающей. Действительно, если (γ_n) – почти возрастающая последовательность, т.е. если неравенство

$$Ac_n \leq \gamma_n \leq Bc_n, \quad (14)$$

выполняется при всех n с некоторой возрастающей последовательностью (c_n) , то при любых $n \geq m \geq 1$ неравенство

$$\gamma_m \leq Bc_m \leq Bc_n \leq \frac{B}{A} \gamma_n \quad (15)$$

также выполняется, откуда следует, что неравенство (13) очевидным образом выполняется при любых $\beta \geq 0$ и $K = B/A$. Таким образом, любая почти возрастающая последовательность является квази- β -степенной возрастающей последовательностью при любых $\beta \geq 0$. Теперь мы можем показать, что обратное утверждение не выполняется. Для этого, предположим, что $\gamma_n = n^{-\beta}$ при $\beta > 0$. Тогда $\gamma_n \rightarrow 0$. Таким образом, очевидно, что эта последовательность не является почти возрастающей последовательностью (более подробное доказательство можно найти в [7]).

Теперь докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть $(\lambda_n) \in \mathcal{BV}$, и пусть (X_n) – квази- β -степенная возрастающая последовательность при некотором $0 < \beta < 1$. Если условия (6)–(12) выполнены, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{P_n \lambda_n}{np_n}$$

является $|\overline{N}, p_n|_k$ -суммируемым при $k \geq 1$.

Заметим, что если (X_n) является почти возрастающей последовательностью, то мы получаем теорему А.

Для доказательства нашей теоремы, нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 1 [7]. Если последовательности (X_n) , (β_n) и (λ_n) удовлетворяют условиям теоремы, то выполнены следующие условия:

$$nX_n\beta_n = O(1), \quad (16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n X_n < \infty. \quad (17)$$

ЛЕММА 2 [8]. Если условия (11) и (12) выполнены, то $\Delta(P_n/p_n n^2) = O(1/n^2)$.

4. Доказательство теоремы. Пусть (T_n) – последовательность $(\overline{N}, p_n)$ -средних ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n P_n \lambda_n)/(np_n)$. Тогда по определению имеем

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=1}^n p_v \sum_{r=1}^v \frac{a_r P_r \lambda_r}{r p_r} = \frac{1}{P_n} \sum_{v=1}^n (P_n - P_{v-1}) \frac{a_v P_v \lambda_v}{v p_v}. \quad (18)$$

Далее, при $n \geq 1$ получим

$$T_n - T_{n-1} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n \frac{P_{v-1} P_v a_v \lambda_v}{v p_v} = \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n \frac{P_{v-1} P_v a_v \lambda_v}{v^2 p_v}.$$

Применяя преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned}
 T_n - T_{n-1} &= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n \Delta \left(\frac{P_{v-1} P_v \lambda_v}{v^2 p_v} \right) \sum_{r=1}^v r a_r + \frac{\lambda_n}{n^2} \sum_{v=1}^n v a_v \\
 &= \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} (v+1) t_v p_v \frac{\lambda_v}{v^2} + \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v P_v \Delta \lambda_v (v+1) \frac{t_v}{v^2 p_v} \\
 &\quad - \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} P_v \lambda_{v+1} (v+1) t_v \Delta \left(\frac{P_v}{v^2 p_v} \right) + \lambda_n t_n \frac{n+1}{n^2} \\
 &= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4}.
 \end{aligned}$$

Так как

$$|T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4}|^k \leq 4^k (|T_{n,1}|^k + |T_{n,2}|^k + |T_{n,3}|^k + |T_{n,4}|^k),$$

для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,r}|^k < \infty \quad \text{при} \quad r = 1, 2, 3, 4. \quad (19)$$

Теперь, применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,1}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} p_v |t_v| |\lambda_v| \frac{1}{v} \right\}^k \\
 &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k p_v |t_v|^k |\lambda_v|^k \frac{1}{v^k} \left\{ \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \right\}^{k-1} \\
 &= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k p_v |t_v|^k |\lambda_v|^k \frac{1}{v^k} \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \\
 &= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k |\lambda_v|^{k-1} |\lambda_v| p_v |t_v|^k \frac{1}{P_v} \frac{1}{v^k} \\
 &= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{k-1} |\lambda_v| |t_v|^k \frac{1}{v^k} = O(1) \sum_{v=1}^m v^{k-1} \frac{1}{v^k} |\lambda_v| |t_v|^k \\
 &= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_v| \frac{|t_v|^k}{v} = O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta |\lambda_v| \sum_{r=1}^v \frac{|t_r|^k}{r} + O(1) |\lambda_m| \sum_{v=1}^m \frac{|t_v|^k}{v} \\
 &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta \lambda_v| X_v + O(1) |\lambda_m| X_m \\
 &= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \beta_v X_v + O(1) |\lambda_m| X_m = O(1)
 \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$ в силу (6), (9), (10), (11) и (15).

Далее, так как $(P_v/v) = O(p_v)$ в силу (11), получим

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,2}|^k = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} |\Delta \lambda_v| p_v |t_v| \right\}^k$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k (\beta_v)^k |t_v|^k p_v \left\{ \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k (\beta_v)^k |t_v|^k p_v \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{k-1} (\beta_v)^k |t_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{k-1} (v\beta_v)^{k-1} v\beta_v \frac{1}{v^k} |t_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m v^{k-1} v\beta_v \frac{1}{v^k} |t_v|^k = O(1) \sum_{v=1}^m v\beta_v \frac{|t_v|^k}{v} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta(v\beta_v) \sum_{r=1}^v \frac{|t_r|^k}{r} + O(1) m\beta_m \sum_{v=1}^m \frac{|t_v|^k}{v} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} v|\Delta\beta_v|X_v + O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \beta_v X_v + O(1) m\beta_m X_m \\
&= O(1) \quad \text{при } m \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

в силу (6), (8), (10), (11), (14) и (15).

Теперь, поскольку $\Delta(P_v/v^2 p_v) = O(1/v^2)$ в силу леммы 2, имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,3}|^k &= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} P_v |\lambda_{v+1}| |t_v| \frac{1}{v} \frac{v+1}{v} \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} p_v |\lambda_{v+1}| \frac{1}{v} |t_v| \right\}^k \\
&= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k p_v \frac{1}{v^k} |\lambda_{v+1}|^k |t_v|^k \left\{ \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \right\}^{k-1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^k p_v \frac{1}{v^k} |\lambda_{v+1}|^{k-1} |\lambda_{v+1}| |t_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{k-1} \frac{1}{v^k} |\lambda_{v+1}| |t_v|^k = O(1) \sum_{v=1}^m v^{k-1} \frac{1}{v^k} |\lambda_{v+1}| |t_v|^k \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m |\lambda_{v+1}| \frac{|t_v|^k}{v} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} \Delta|\lambda_{v+1}| \sum_{r=1}^v \frac{|t_r|^k}{r} + O(1) |\lambda_{m+1}| \sum_{v=1}^m \frac{|t_v|^k}{v} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta\lambda_{v+1}| X_v + O(1) |\lambda_{m+1}| X_m \\
&= O(1) \sum_{v=1}^{m-1} |\Delta\lambda_{v+1}| X_{v+1} + O(1) |\lambda_{m+1}| X_{m+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= O(1) \sum_{v=2}^m |\Delta \lambda_v| X_v + O(1) |\lambda_{m+1}| X_{m+1} \\
&= O(1) \sum_{v=1}^m \beta_v X_v + O(1) |\lambda_{m+1}| X_{m+1} = O(1)
\end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$ в силу (6), (9), (10), (11) и (15).

Наконец, аналогично $T_{n,3}$, получим

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,4}|^k &= O(1) \sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^k \frac{1}{n^k} |\lambda_n|^k |t_n|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m n^{k-1} \frac{1}{n^k} |\lambda_n|^{k-1} |\lambda_n| |t_n|^k \\
&= O(1) \sum_{n=1}^m |\lambda_n| \frac{|t_n|^k}{n} = O(1) \quad \text{при } m \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Следовательно, окончательно, имеем

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,r}|^k = O(1) \quad \text{при } m \rightarrow \infty \quad \text{при } r = 1, 2, 3, 4.$$

Таким образом, теорема доказана. Если положить $p_n = 1$ при всех n , то мы получаем новый результат относительно множителей $|C, 1|_k$ -суммируемости.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за ценные советы, способствовавшие значительному улучшению данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Aljančić, D. Arandelović, “ O -regularly varying functions”, *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.)*, **22** (1977), 5–22.
- [2] T. M. Flett, “On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **7** (1957), 113–141.
- [3] E. Kogbetliantz, “Sur les séries absolument sommables par la méthode des moyennes arithmétiques”, *Bull. Sci. Math.* (2), **49** (1925), 234–251.
- [4] G. H. Hardy, *Divergent Series*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1949.
- [5] H. Bor, “On two summability methods”, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **97**:1 (1985), 147–149.
- [6] H. Bor, “A note on absolute Riesz summability factors”, *Math. Inequal. Appl.*, **10**:3 (2007), 619–625.
- [7] L. Leindler, “A new application of quasi power increasing sequences”, *Publ. Math. Debrecen*, **58**:4 (2001), 791–796.
- [8] H. Bor, “Absolute summability factors for infinite series”, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **19**:7 (1988), 664–671.

X. Бор

Erciyes University, Турция

E-mail: bor@erciyes.edu.tr, hbor33@gmail.com

Поступило

01.02.2007