Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Ю. Куликова, Замечание о нулевых подпространствах нечетных полиномов, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 4, 543–549

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8511>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 08:03:34

Замечание о нулевых подпространствах нечетных полиномов

Т. Ю. Куликова

В работе получено обобщение теоремы Арона–Хайека о нулевых подпространствах однородных нечетных полиномов (многих переменных) на случай произвольных нечетных полиномов.

Библиография: 5 названий.

1. Введение. В работе Арона и Хайека [1] установлена

ТЕОРЕМА А. Пусть даны $n, k, N \in \mathbb{N}$, n – нечетное, удовлетворяющие соотношению

$$N > k!(\log_2 N)^k \binom{k+n-1}{k-1}. \quad (1)$$

Тогда для любого n -однородного полинома $Q: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ существует линейное подпространство $X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, $\dim X = k$, такое, что $Q|_X \equiv 0$.

(Здесь $Q|_X$ означает ограничение функции Q на множество X .)

Из соотношения (1) можно вывести явную оценку на N :

$$N \geq (k+n)^{3k} \quad (\text{при } k+n \geq 16).$$

Теорема А, полученная с использованием топологических методов, уточняла результат Бёрча [2] (см. также [3]), который (как следствие более общего алгебраического результата) устанавливал для любых $k, n \in \mathbb{N}$, n – нечетное, существование такого $N = N(k, n)$, что для любого n -однородного полинома Q от N переменных (над полем алгебраических чисел) найдется k -мерное подпространство, на котором $Q \equiv 0$. В данной работе мы, модифицируя рассуждения из [1], получаем обобщение теоремы А на случай произвольных нечетных полиномов.

Отметим, что в [1] Арон и Хайек распространяют свой результат и на этот случай, но с кардинальным ухудшением оценки на N , вызванным необходимостью многократного (итерационного) применения теоремы А.

ТЕОРЕМА 1. Пусть даны $k, N \in \mathbb{N}$, а также некоторая совокупность нечетных чисел $G = \{n_s\}_{s=1}^q$. Пусть при этом имеет место неравенство

$$N > k!(\log_2 N)^k (M + k), \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00799а).

где

$$M = M(G) = \sum_{s=1}^q \binom{n_s + k - 1}{k - 1}. \quad (3)$$

Тогда для любого полинома $Q: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, состоящего только из мономов степеней n_s , $s = 1, \dots, q$, существует линейное подпространство $X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, $\dim X = k$, такое, что

$$Q|_X \equiv 0.$$

Теорема A получается из теоремы 1 при $G = \{n\}$, а при $G = \{1, 3, 5, \dots, n\}$ получаем следующий результат для произвольного нечетного полинома степени n .

СЛЕДСТВИЕ. Пусть даны $n, k, N \in \mathbb{N}$, n – нечетное, удовлетворяющие соотношению

$$N > k!(\log_2 N)^k \left(\binom{k + n - 1}{k - 1} \cdot \frac{n + 1}{2} + k \right). \quad (4)$$

Тогда для любого нечетного полинома

$$Q: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}, \quad \deg Q = n,$$

существует линейное подпространство $X \hookrightarrow \mathbb{R}^N$, $\dim X = k$, такое, что $Q|_X \equiv 0$.

2. Предварительные леммы.

ЛЕММА 1. Любая конечная совокупность различных мономов (от k переменных) линейно независима на любом шаре $B_r^k \subset \mathbb{R}^k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по числу переменных k . При $k = 1$ утверждение очевидно. Рассмотрим произвольный ненулевой многочлен $P: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$P(x, \bar{y}) = \sum_{m, \bar{n}} c_{m, \bar{n}} x^m \bar{y}^{\bar{n}},$$

где $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^k$, $\bar{n} \in \mathbb{Z}_+^k$ (суммы по m , $\bar{n}$ конечны; здесь и далее мы используем черту над буквами для обозначения векторов; $\bar{y}^{\bar{n}} := y_1^{n_1} y_2^{n_2} \dots y_k^{n_k}$).

Перепишем P в таком виде:

$$P(x, \bar{y}) = \sum_m \left(\sum_{\bar{n}} c_{m, \bar{n}} \bar{y}^{\bar{n}} \right) x^m.$$

При каждом фиксированном $\bar{y}$ это есть многочлен от одной переменной: $P_{\bar{y}}(x)$. Предположим, что $P(x, \bar{y}) \equiv 0$ на некотором шаре B_r^{k+1} радиуса r . Тогда при каждом фиксированном $y \in B_r^k$ $P_{\bar{y}}(x) \equiv 0$ как многочлен от одной переменной на интервале $(-\sqrt{r^2 - |\bar{y}|^2}, \sqrt{r^2 - |\bar{y}|^2})$. Поскольку для $k = 1$ все доказано, то все коэффициенты многочлена $P_{\bar{y}}(x)$ равны нулю:

$$\forall m \quad \sum_{\bar{n}} c_{m, \bar{n}} \bar{y}^{\bar{n}} \equiv 0.$$

Тогда по предположению индукции все $c_{m, \bar{n}} = 0$, т.е. многочлен $P(x, \bar{y})$ нулевой. Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть даны $k \in \mathbb{N}$ и семейство (различных) мономов от k переменных

$$\mathcal{F} = \{f_j\}_{j=1}^M, \quad f_j = x_1^{\alpha_1^{(j)}} \cdots x_k^{\alpha_k^{(j)}}, \quad j = 1, \dots, M.$$

Тогда существует множество векторов

$$S = S(k, M) \subset \mathbb{R}^k, \quad |S| = M,$$

такое, что для любого полинома $R: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, состоящего только из мономов семейства $\mathcal{F}$ (с произвольными коэффициентами), выполнено

$$R|_S \equiv 0 \quad \implies \quad R|_{\mathbb{R}^k} \equiv 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для однородных полиномов R (т.е. для случая, когда $\mathcal{F}$ – это совокупность всех возможных мономов степени n) эта лемма известна и использовалась в [1], однако нам не удалось найти ее доказательства. Поэтому мы приводим здесь ее доказательство – для общего случая произвольных полиномов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Пусть

$$R(\bar{x}) = \sum_{j=1}^M a_j f_j(\bar{x}), \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_k),$$

– произвольный полином, состоящий из мономов семейства $\mathcal{F}$. Пусть $S = \{\bar{v}^i\}_{i=1}^M$ – некоторая система векторов из $\mathbb{R}^k$. Условие $R|_S \equiv 0$ распишем в виде системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^M a_j f_j(\bar{v}^i) = 0, \quad i = 1, \dots, M. \quad (5)$$

Условие $R(x)|_{\mathbb{R}^k} \equiv 0$ равносильно тому, что

$$a_j = 0, \quad j = 1, \dots, M. \quad (6)$$

Таким образом, нам надо доказать, что существуют такие $\bar{v}^i \in \mathbb{R}^k$, $i = 1, \dots, M$, что условие (5) влечет условие (6). То есть, надо доказать, что существуют $\bar{v}^i$, $i = 1, \dots, M$, такие, что определитель линейной однородной системы уравнений (5) (от переменных a_j , $j = 1, \dots, M$) отличен от нуля.

Воспользуемся известной формулой Бине–Коши [4]

$$\underbrace{\int_{B^k} \cdots \int_{B^k}}_{M \text{ раз}} \det^2 \begin{pmatrix} f_1(\bar{v}^1) & \cdots & f_M(\bar{v}^1) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1(\bar{v}^M) & \cdots & f_M(\bar{v}^M) \end{pmatrix} d\bar{v}^1 \cdots d\bar{v}^M = C_M \det G(f_1, \dots, f_M), \quad (7)$$

где через B^k обозначен единичный шар в $\mathbb{R}^k$, C_M – константа, зависящая только от M , $G(f_1, \dots, f_M)$ – матрица Грама системы $\{f_j\}_{j=1}^M$ на шаре B^k .

Известно, что определитель матрицы Грама системы отличен от нуля тогда и только тогда, когда эта система функций линейно независима (см., например, [5; с. 490]). Поэтому из (7) и леммы 1 вытекает требуемое утверждение. Лемма 2 доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$. Обозначим $L_N = \{1, 2, \dots, N\}$. Упорядоченная система непересекающихся подмножеств множества L_N

$$\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_k), \quad \bigsqcup_{i=1}^k A_i = L_N,$$

называется *упорядоченным разбиением ранга k множества L_N* .

ЛЕММА 3 [1; лемма 2]. Пусть даны $k, N \in \mathbb{N}$, $k \leq N$. Тогда существуют $p = p(k, N) \in \mathbb{N}$, удовлетворяющее оценке

$$p \leq k!(\log_2 N)^k, \quad (8)$$

и семейство разбиений множества L_N ранга k

$$\{\mathcal{A}_I\}_{I=1}^p, \quad \mathcal{A}_I = (A_1^I, \dots, A_k^I),$$

такие, что

$$\forall B \subset L_N, \quad |B| = k, \quad \exists \mathcal{A}_I \in \{\mathcal{A}_I\}_{I=1}^p: \quad |B \cap A_i^I| = 1, \quad i = 1, \dots, k. \quad (9)$$

ЛЕММА 4. Пусть $Q: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольный ненулевой полином. Тогда в $\mathbb{R}^N$ существует базис $\{\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^N\}$ такой, что для любого $m = 1, \dots, N$ полином

$$Q_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q_m := Q(x\bar{z}^m), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

не равен нулю тождественно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{y} \in \mathbb{R}^N$ такой, что $Q(\bar{y}) \neq 0$. Поскольку Q есть непрерывная функция по совокупности переменных, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$Q(\bar{x}) \neq 0 \quad \text{при} \quad |\bar{x} - \bar{y}| < \varepsilon.$$

Выберем в $\mathbb{R}^N$ базис $\{\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^N\}$ так, чтобы все его элементы принадлежали ε -окрестности $\bar{y}$. Тогда $Q(\bar{z}^m) \neq 0$, $m = 1, \dots, N$, откуда и вытекает требуемое утверждение. Лемма 4 доказана.

3. Доказательство теоремы. Пусть в $\mathbb{R}^N$ задан произвольный ненулевой многочлен $Q: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, у которого

$$\text{степени всех мономов принадлежат семейству } G = \{n_s\}_{s=1}^q. \quad (11)$$

Рассмотрим многочлены

$$Q_m(x) := Q(xz^m), \quad m = 1, \dots, N.$$

При каждом $m = 1, \dots, N$ $Q_m(x)$ – это многочлен от одной переменной. Пусть $\{\lambda_{m,i}\}$ – его корни (их конечное число). Обозначим

$$\lambda := \max_{m,i} |\lambda_{m,i}|. \quad (12)$$

В силу леммы 4 в $\mathbb{R}^N$ можно выбрать базис $\{\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^N\}$ так, чтобы

$$Q_m(x) := Q(xz^m) \neq 0, \quad m = 1, \dots, N. \quad (13)$$

Отметим для дальнейшего, что при переходе от канонического базиса к произвольному базису $\{\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^N\}$ структура степеней мономов полинома (т.е. свойство (11)) не меняется. Зафиксируем базис $\{\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^N\}$ и далее будем рассматривать все координаты относительно этого базиса.

Пусть E^k – это пространство, натянутое на первые k векторов выбранного нами базиса:

$$E^k := \text{span}\{\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^k\}.$$

Нам потребуются следующие обозначения. Для любого $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, $\bar{x} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{z}^i$, обозначим

$$P_A(\bar{x}) := \sum_{i \in A} \alpha_i \bar{z}^i, \quad \text{где } A \subset L_N,$$

$$(\bar{v}.\mathcal{A})(\bar{x}) := \sum_{j=1}^k v_j P_{A_j}(\bar{x}),$$

где $\bar{v} = (v_1, \dots, v_k) \in E^k$, $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_k)$ – произвольное упорядоченное разбиение ранга k . (Отметим, что операция $(\bar{v}.\mathcal{A})(\cdot)$ не инвариантна относительно выбора базиса.)

В пространстве E^k рассмотрим множество всех мономов, степени которых принадлежат семейству $G = \{n_s\}_{s=1}^q$ из условия теоремы. Число элементов этого множества задается формулой (3), поскольку число всевозможных мономов степени n от k переменных равно в точности $\binom{n+k-1}{k-1}$. Применим к этому множеству мономов в пространстве E^k лемму 2. Получим систему

$$S = S(k, G) = \{\bar{v}^J\}_{J=1}^M, \quad \bar{v}^J \in E^k, \quad J = 1, \dots, M,$$

такую, что для любого полинома $R: E^k \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющего условию (11), условие $R|_S \equiv 0$ влечет $R|_{E^k} \equiv 0$.

Добавим в систему S векторы z^i , $i = 1, \dots, k$:

$$S' = S \cup \{\bar{v}^{M+1}, \dots, \bar{v}^{M+k}\}, \quad \bar{v}^{M+i} := \bar{z}^i, \quad i = 1, \dots, k. \quad (14)$$

Пусть, далее, $\{\mathcal{A}_I\}_{I=1}^{p(k,N)}$ – семейство упорядоченных разбиений множества L_N ранга k из леммы 3.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{p(k,N)(M+k)}$ и базис в нем (произвольный)

$$\{\bar{e}^{I,J}, I = 1, \dots, p(k,N), J = 1, \dots, M+k\}.$$

Рассмотрим многомерный полином $T: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{p(k,N)(M+k)}$,

$$T(\bar{x}) := \sum_{I=1}^{p(k,N)} \sum_{j=1}^{M+k} Q((\bar{v}^J.\mathcal{A}_I)(\bar{x})) \bar{e}^{I,J}.$$

Отображение T нечетно, так как Q – нечетный полином и $(\bar{v}.\mathcal{A})(-\bar{x}) = -(\bar{v}.\mathcal{A})(\bar{x})$ для любых $\mathcal{A}$, $\bar{v}$, $\bar{x}$.

Оценка (2) из условия теоремы означает, что $N - 1 \geq p(k, N)(M + k)$. Используем, следуя [1], теорему Борсука: для любого непрерывного нечетного отображения $F: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, где S^n – единичная сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$, существует $\bar{x} \in S^n$ такой, что $F(\bar{x}) = 0$. Однако в отличие от [1] мы применим теорему Борсука к отображению T на сфере достаточно большого радиуса: $r > \lambda\sqrt{k}$, где λ определяется формулой (12). Имеем

$$\exists \bar{x}^\circ = (\alpha_1^\circ, \dots, \alpha_N^\circ), \quad |\bar{x}^\circ| > \lambda\sqrt{k}, \quad T(\bar{x}^\circ) = 0.$$

(Здесь, как и всюду, координатное разложение вектора $\bar{x}$ берется относительно фиксированного ранее базиса.) Следовательно, для этого $\bar{x}^\circ$ выполнено

$$Q(\bar{v}^J \cdot \mathcal{A}_I(\bar{x}^\circ)) = 0, \quad I = 1, \dots, p(k, N), \quad J = 1, \dots, M + k. \quad (15)$$

Обозначим $B = \text{supp } \bar{x}^\circ$ – множество номеров ненулевых координат вектора $\bar{x}^\circ$.

Докажем, что $|B| \geq k$. Пусть $|B| < k$. Тогда из того, что $|\bar{x}^\circ| > \lambda\sqrt{k}$, следует, что

$$\exists m \in B: \quad |\alpha_m^\circ| > \lambda. \quad (16)$$

Свойство системы $\{\mathcal{A}_I\}_{I=1}^{p(k, N)}$ (лемма 3) гарантирует нам, что при $0 < |B| < k$

$$\exists \mathcal{A}_I: \quad \exists A_j^I \in \mathcal{A}_I: \quad B \cap A_j^I = \{m\}.$$

Поскольку $j \leq k$, то в силу (14)

$$S' \ni \bar{v}^{M+j} = (0, \dots, 0, \underset{j\text{-е место}}{1}, 0, \dots, 0),$$

поэтому

$$(\bar{v}^{M+j} \cdot \mathcal{A}_I)(\bar{x}^\circ) = (0, \dots, 0, \underset{m\text{-е место}}{\alpha_m^\circ}, 0, \dots, 0).$$

Следовательно,

$$Q((\bar{v}^{M+j} \cdot \mathcal{A}_I)(\bar{x}^\circ)) = Q_m(\alpha_m^\circ) \neq 0,$$

так как $|\alpha_m^\circ|$ больше, чем максимум модулей корней $Q_m(x)$ (см. (12) и (16)). Противоречие с (15).

Итак, мы доказали, что $|B| \geq k$. Дальнейшее доказательство теоремы 1 повторяет доказательство теоремы Арона–Хайека, но мы приведем его здесь для полноты изложения.

Поскольку $|B| \geq k$, то по лемме 3

$$\exists \mathcal{A}_I = (A_1^I, \dots, A_k^I): \quad B \cap A_i^I \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, k.$$

Обозначим

$$\bar{x}^i := P_{A_i^I}(\bar{x}^\circ) \neq 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Очевидно, что все эти векторы линейно независимы. Рассмотрим полином $R = R(\bar{t}): E^k \rightarrow \mathbb{R}$

$$R(t_1, \dots, t_k) := Q\left(\sum_{i=1}^k t_i \bar{x}^i\right) = Q((\bar{t} \cdot \mathcal{A}_I)(\bar{x}^\circ)).$$

Легко проверить, что он имеет ту же структуру степеней мономов (11), что и Q .

При всех $J = 1, \dots, M + k$

$$R(\bar{v}^J) = Q((\bar{v}^J \cdot \mathcal{A}_I)(\bar{x}^\circ)) = 0$$

в силу (15). Значит, $R(\bar{t}) \equiv 0$ на E^k по лемме 2. Таким образом, в качестве искомого нуль-пространства для Q достаточно взять

$$X = \text{span}\{\bar{x}^i\}_{i=1}^k.$$

Действительно, произвольный элемент этого пространства представляется в виде

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^k t_i \bar{x}^i, \quad t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}.$$

Отсюда

$$Q(\bar{x}) = Q\left(\sum_{i=1}^k t_i \bar{x}^i\right) = R(t_1, \dots, t_k) = 0.$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. M. Aron, P. Hájek, “Zero sets of polynomials in several variables”, *Arch. Math. (Basel)*, **86**:6 (2006), 561–568.
- [2] B. J. Birch, “Homogeneous forms of odd degree in a large number of variables”, *Mathematica*, **4** (1957), 102–105.
- [3] R. Aron, R. Gonzalo, A. Zagorodnyuk, “Zeroes of real polynomials”, *Linear and Multilinear Algebra*, **48**:2 (2000), 107–115.
- [4] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.
- [5] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, АФЦ, М., 1999.

Т. Ю. Куликова

Академиздатцентр “Наука” РАН

E-mail: kulikova@mi.ras.ru

Поступило

02.04.2009