Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Джи Шу, Джиан Жанг, Глобальное существование для системы слабо связанных нелинейных уравнений Шрёдингера, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 5, 686–691

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:24:06

Глобальное существование для системы слабо связанных нелинейных уравнений Шрёдингера

Джи Шу, Джиан Жанг

В статье обсуждаются слабо связанные нелинейные уравнения Шрёдингера в суперкритическом случае. Используя наилучшую константу неравенства Гальярдо–Ниренберга, мы получили достаточное условие глобального существования решений, и это условие выражено через стационарные решения (нелинейное основное состояние).

Библиография: 19 названий.

1. Введение. Мы изучаем задачу Коши в случае слабо связанных нелинейных уравнений Шрёдингера:

$$\begin{cases} i\varphi_t + \Delta\varphi + (|\varphi|^{2p} + \beta|\psi|^{p+1}|\varphi|^{p-1})\varphi = 0, \\ i\psi_t + \Delta\psi + (|\psi|^{2p} + \beta|\varphi|^{p+1}|\psi|^{p-1})\psi = 0, \\ \varphi(0, x) = \varphi_0(x), \quad \psi(0, x) = \psi_0(x), \end{cases} \quad (1)$$

где $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi = \varphi(t, x)$ и $\psi = \psi(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ обозначают комплексные амплитуды двух взаимодействующих волн в нелинейных оптических средах соответственно, $\beta > 0$, $i = \sqrt{-1}$, Δ – оператор Лапласа на $\mathbb{R}^N$ и

$$1 \leq p < \frac{2}{(N-2)^+} = \begin{cases} \frac{2}{N-2}, & N \geq 3, \\ \infty, & N = 1, 2. \end{cases}$$

Система (1) возникает как модель, описывающая распространение поляризованных лазерных лучей в двоякопреломляющей среде Керра в нелинейной оптике (см., например, [1]–[4]).

В случае единственного нелинейного уравнения Шрёдингера

$$i\varphi_t + \Delta\varphi + |\varphi|^{2p}\varphi = 0, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

было получено много результатов; например, Жинибр и Вело [5] и Като [6] установили локальную корректность и глобальное существование в энергетическом пространстве $H^1(\mathbb{R}^N)$. Гласси [7], Огава и Цуцуми [8], [9] изучали свойства расходимости в решениях для некоторых начальных данных. Берестицкий и Казенав [10],

Работа выполнена при поддержке Китайского фонда поддержки национальных естественных наук (гранты №№ 10747148, 10771151) и Фонда поддержки научных исследований департамента образования Сычуаньской провинции (грант № 08ZA041).

Вайнштейн [11] и Чжан [12], [13] с помощью вариационных аргументов продемонстрировали некоторые интересные критерии расходимости и глобального существования.

Казенав [14] установил локальное существование решений в пространстве энергий $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ для системы (1), когда $p = 1$. Шу и Чжан [15] получили жесткое условие глобального существования с помощью взаимноограниченного вариационного аргумента. Цуцуми и Чжан [16] доказали, что расходимость в решениях задачи Коши достигается при конечных временах в случае некоторых начальных данных, особенно в случае класса достаточно больших данных. В то же время, они также доказали нестабильность стоячих волн. Действительно, достаточное условие для расходимости в эволюционных задачах обеспечивается решениями для основного состояния в доказательстве Цуцуми и Чжан [16]. К тому же, Амбросетти и Коло-радо [17], Майя, Монтефуско и Пеллачи [18] изучали существование стоячих волн для системы [1].

В этой статье мы рассматриваем суперкритический случай $p > 2/N$. Мы используем наилучшую константу неравенства Гальярдо–Ниренберга и получаем достаточное условие глобального существования решений системы (1). Бегу также приступил к рассмотрению нашей идеи в работе [19].

Эта статья построена следующим образом. Во втором пункте мы приводим некоторые предварительные сведения, касающиеся слабосвязанных нелинейных уравнений Шрёдингера. В третьем пункте мы формулируем достаточное условие глобального существования решений.

2. Предварительные сведения. Для простоты обозначим $\int_{\mathbb{R}^N} dx$ через $\int dx$.

Из работы Казенава [14] мы можем получить корректность задачи Коши (1) в пространстве энергий $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $(\varphi_0, \psi_0) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$. Тогда существует единственное решение (φ, ψ) задачи Коши (1) в $C([0, T]; H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N))$ для некоторого $T \in (0, \infty]$ (максимальное время существования), и либо $T = \infty$ (глобальное существование), либо $T < \infty$ и $\lim_{t \rightarrow T} (\|\varphi\|_{H^1} + \|\psi\|_{H^1}) = \infty$ (расходимость).

Справедлива следующая лемма из работы Цуцуми и Чжана [16].

ЛЕММА 2.2. Пусть $(\varphi_0, \psi_0) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ и (φ, ψ) будут решением задачи Коши (1) в $C([0, T]; H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N))$. Введем функционал энергии

$$E(\varphi, \psi) = \|\nabla \varphi\|_2^2 + \|\nabla \psi\|_2^2 - \frac{1}{p+1} (\|\varphi\|_{2p+2}^{2p+2} + 2\beta \|\varphi\psi\|_{p+1}^{p+1} + \|\psi\|_{2p+2}^{2p+2}).$$

Тогда получаем

$$\|\varphi\|_2^2 = \|\varphi_0\|_2^2, \quad \|\psi\|_2^2 = \|\psi_0\|_2^2, \quad (2)$$

$$E(\varphi, \psi) \equiv E(\varphi_0, \psi_0). \quad (3)$$

Из работы Майи, Монтефуско и Пеллачи [18] (см. также работу Вайнштейна [11]) имеем

ЛЕММА 2.3. Пусть $1 \leq p < 2/(N-2)^+$ и $U(x)$, $V(x)$ – решения для основного состояния следующей нелинейной эллиптической системы:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = (|u|^{2p} + \beta|v|^{p+1}|u|^{p-1})u, \\ -\Delta v + v = (|v|^{2p} + \beta|u|^{p+1}|v|^{p-1})v, \\ (u, v) \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (4)$$

Тогда наилучшая положительная константа C_* неравенства Гальярдо–Ниренберга

$$\|u\|_{2p+2}^{2p+2} + 2\beta\|uv\|_{p+1}^{p+1} + \|v\|_{2p+2}^{2p+2} \leq C_*(\|u\|_2^2 + \|v\|_2^2)^{p+1-Np/2}(\|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2)^{Np/2} \quad (5)$$

записывается как

$$C_* = \frac{2(p+1)p^{p-N/2}}{Np^{N/2}(2p+2-pN)^{p+1-Np/2}} \left(\frac{2p+2-pN}{p} \right)^p (\|U\|_2^2 + \|V\|_2^2)^{-p}. \quad (6)$$

3. Достаточное условие глобального существования. Мы приводим главный результат этой статьи в этом пункте.

Во-первых, запишем вещественнозначную функцию $g(\lambda)$ в $\mathbb{R}$ следующим образом:

$$g(\lambda) = \left(\frac{Np-2}{2-p(N-2)} \right)^{(Np-2)/(N+2-(N-2)(2p+1))} \times (\|U\|_2^2 + \|V\|_2^2)^{2p/(N+2-(N-2)(2p+1))} \lambda^{-(Np-2)/(N+2-(N-2)(2p+1))}, \quad (7)$$

где $\lambda > 0$, $2/N < p < 2/(N-2)$ и $U(x)$, $V(x)$ – решения системы (4) для основного состояния.

Имеем следующее предложение из работы Бегу [19].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ – открытый интервал, $t_0 \in I$, $\theta > 1$, $a > 0$, $b > 0$ и $\Phi(t) \in C(I; \mathbb{R}^+)$. Положим $f(x) = a - x + bx^\theta$ для любых $x \geq 0$, $x_* = (b\theta)^{-1/(\theta-1)}$ и $b_* = (\theta-1)/\theta x_*$. Примем, что $\Phi(t_0) < x_*$, $a \leq b_*$ и $f \circ \Phi > 0$. Тогда $\Phi(t) < x_*$ для любого $t \in I$.

Далее мы приводим достаточное условие глобального существования.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $2/N < p < 2/(N-2)^+$ и $U(x)$, $V(x)$ – решения системы (4) для основного состояния. Если $\|\varphi_0\|_2^2 + \|\psi_0\|_2^2 \leq g(\|\nabla\varphi_0\|_2^2 + \|\nabla\psi_0\|_2^2)$, то решение $(\varphi(t, x), \psi(t, x))$ задачи Коши (1) существует глобально в $H^1 \times H^1$. Более того,

$$\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2 < \frac{Np}{Np-2} E(\varphi_0, \psi_0). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2), (3) и леммы 2.3 имеем

$$\begin{aligned} & \|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2 \\ &= E(\varphi, \psi) + \frac{1}{p+1} (\|\varphi\|_{2p+2}^{2p+2} + 2\beta\|\varphi\psi\|_{p+1}^{p+1} + \|\psi\|_{2p+2}^{2p+2}) \\ &= E(\varphi_0, \psi_0) + \frac{1}{p+1} (\|\varphi\|_{2p+2}^{2p+2} + 2\beta\|\varphi\psi\|_{p+1}^{p+1} + \|\psi\|_{2p+2}^{2p+2}) \\ &\leq \|\nabla\varphi_0\|_2^2 + \|\nabla\psi_0\|_2^2 + \frac{1}{p+1} C_*(\|\varphi\|_2^2 + \|\psi\|_2^2)^{p+1-Np/2} (\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2)^{Np/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|\nabla\varphi_0\|_2^2 + \|\nabla\psi_0\|_2^2 + \frac{1}{p+1} C_*(\|\varphi_0\|_2^2 + \|\psi_0\|_2^2)^{p+1-Np/2} (\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2)^{Np/2} \\ &:= a + b(\Phi(t))^\theta. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $2/N < p < 2/(N-2)$,

$$a := \|\nabla\varphi_0\|_2^2 + \|\nabla\psi_0\|_2^2 > 0, \quad b := \frac{1}{p+1} C_*(\|\varphi_0\|_2^2 + \|\psi_0\|_2^2)^{p+1-Np/2} > 0,$$

$\theta := Np/2 > 1$ и $\Phi(t) = \|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2$. Очевидно, $\Phi(0) = a$. В то же время, мы определяем $f(x) = a - x + bx^\theta$. Таким образом, (9) становится

$$f \circ \Phi(t) = a - \Phi(t) + b(\Phi(t))^\theta > 0. \quad (10)$$

С другой стороны, так как $\|\varphi_0\|_2^2 + \|\psi_0\|_2^2 \leq g(\|\nabla\varphi_0\|_2^2 + \|\nabla\psi_0\|_2^2) = g(a)$, имеем

$$\begin{aligned} \|\varphi_0\|_2^2 + \|\psi_0\|_2^2 &\leq \left(\frac{Np-2}{2-p(N-2)} \right)^{(Np-2)/(N+2-(N-2)(2p+1))} \\ &\quad \times (\|U\|_2^2 + \|V\|_2^2)^{2p/(N+2-(N-2)(2p+1))} a^{-(Np-2)/(N+2-(N-2)(2p+1))}, \end{aligned} \quad (11)$$

что дает

$$a \leq \frac{Np-2}{2-p(N-2)} (\|U\|_2^2 + \|V\|_2^2)^{2p/(Np-2)} (\|\varphi_0\|_2^2 + \|\psi_0\|_2^2)^{-(N+2-(N-2)(2p+1))/(Np-2)} \quad (12)$$

с $2/N < p < 2/(N-2)$.

Пусть теперь $x_* = (b\theta)^{-1/(\theta-1)}$ и $b_* = (\theta-1)/\theta x_*$. Тогда $b_* < x_*$. С другой стороны, из (12) имеем $\Phi(0) = a \leq b_* < x_*$. Итак, с помощью (10) и предложения 3.1 получается, что $\Phi(t) < x_*$. Таким образом, из (2) имеем

$$\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2 + \|\psi\|_2^2 < x_* + \|\varphi_0\|_2^2 + \|\psi_0\|_2^2 = C. \quad (13)$$

Здесь C означает положительную константу. Отсюда следует, что $(\varphi(t, x), \psi(t, x))$ ограничено в $H^1 \times H^1$. Следовательно, решение $(\varphi(t, x), \psi(t, x))$ задачи Коши (1) существует глобально в $H^1 \times H^1$.

Более того,

$E(\varphi_0, \psi_0)$

$$\begin{aligned} &= E(\varphi, \psi) = \|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2 - \frac{1}{p+1} (\|\varphi\|_{2p+2}^{2p+2} + 2\beta\|\varphi\psi\|_{p+1}^{p+1} + \|\psi\|_{2p+2}^{2p+2}) \\ &\geq \|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2 - \frac{1}{p+1} C_*(\|\varphi\|_2^2 + \|\psi\|_2^2)^{p+1-Np/2} (\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2)^{Np/2} \\ &= \|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2 - \frac{1}{p+1} C_*(\|\varphi_0\|_2^2 + \|\psi_0\|_2^2)^{p+1-Np/2} (\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2)^{Np/2} \\ &= (\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2) \left\{ 1 - \frac{2}{Np} \left[\left(\frac{Np}{2(p+1)} C_*(\|\varphi_0\|_2^2 + \|\psi_0\|_2^2)^{p+1-Np/2} \right)^{-2/(Np-2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2)^{-1} \right]^{-(Np-2)/2} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Другими словами, из вышесказанного мы получили $\Phi(t) < x_*$, откуда следует

$$\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2 < \left(\frac{Np}{2(p+1)} C_*(\|\varphi_0\|_2^2 + \|\psi_0\|_2^2)^{p+1-Np/2} \right)^{-2/(Np-2)}. \quad (15)$$

Следовательно,

$$\left(\frac{Np}{2(p+1)} C_*(\|\varphi_0\|_2^2 + \|\psi_0\|_2^2)^{p+1-Np/2} \right)^{-2/(Np-2)} (\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2)^{-1} > 1. \quad (16)$$

Таким образом, имеем

$$0 < \left[\left(\frac{Np}{2(p+1)} C_*(\|\varphi_0\|_2^2 + \|\psi_0\|_2^2)^{p+1-Np/2} \right)^{-2/(Np-2)} (\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2)^{-1} \right]^{-(Np-2)/2} < 1. \quad (17)$$

Тогда из (14) и (17) следует, что

$$E(\varphi_0, \psi_0) > (\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2) \left[1 - \frac{2}{Np} \right] = \frac{Np-2}{2Np} (\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2), \quad (18)$$

т.е.,

$$\|\nabla\varphi\|_2^2 + \|\nabla\psi\|_2^2 < \frac{Np}{Np-2} E(\varphi_0, \psi_0). \quad (19)$$

Доказательство завершено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] L. Bergé, “Wave collapse in physics: principles and applications to light and plasma waves”, *Phys. Rep.*, **303**:5–6 (1998), 259–370.
- [2] G. Fibich, G. Papanicolaou, “Self-focusing in the perturbed and unperturbed nonlinear Schrödinger equation in critical dimension”, *SIAM J. Appl. Math.*, **60**:1 (2000), 183–240.
- [3] M. Lakshmanan, T. Kanna, R. Radhakrishnan, “Shape-changing collisions of coupled bright solitons in birefringent optical fibers”, *Rep. Math. Phys.*, **46**:1–2 (2000), 143–156.
- [4] C. Menyuk, “Nonlinear pulse propagation in birefringent optical fibers”, *IEEE J. Quantum Electron.*, **23**:2 (1987), 174–176.
- [5] J. Ginibre, G. Velo, “On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case”, *J. Funct. Anal.*, **32**:1 (1979), 1–32; “On a class of nonlinear Schrödinger equations. II. Scattering theory, general case”, *J. Funct. Anal.*, **32**:1 (1979), 33–71.
- [6] T. Kato, “On nonlinear Schrödinger equations”, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **46**:1 (1987), 113–129.
- [7] R. T. Glassey, “On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations”, *J. Math. Phys.*, **18**:9 (1977), 1794–1797.
- [8] T. Ogawa, Y. Tsutsumi, “Blow-up of H^1 solution for the nonlinear Schrödinger equation”, *J. Differential Equations*, **92**:2 (1991), 317–330.
- [9] T. Ogawa, Y. Tsutsumi, “Blow-up of H^1 solutions for the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **111**:2 (1991), 487–496.
- [10] H. Berestycki, T. Cazenave, “Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein–Gordon non linéaires”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **293**:9 (1981), 489–492.

- [11] M. I. Weinstein, “Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates”, *Comm. Math. Phys.*, **87**:4 (1983), 567–576.
- [12] J. Zhang, “Sharp conditions of global existence for nonlinear Schrödinger and Klein–Gordon equations”, *Nonlinear Anal. Ser. A. Theory Methods Appl.*, **48**:2 (2002), 191–207.
- [13] J. Zhang, “Cross-constrained variational problem and nonlinear Schrödinger equation”, *Foundations of Computational Mathematics*, Proceedings of Smalefest 2000 (Hong Kong, July 13–17, 2000), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002, 457–469.
- [14] T. Cazenave, *An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equations*, Text. Metodos Matem., **22**, Univ. Federal Publ., Rio de Janeiro, 1989.
- [15] J. Shu, J. Zhang, “Sharp conditions of global existence for a two-wave interaction model in cubic nonlinear media”, *Chinese Ann. Math. Ser. A*, **28**:6 (2007), 843–852.
- [16] Y. Tsutsumi, J. Zhang, “Instability of optical solitons for two-wave interaction model in cubic nonlinear media”, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **8**:2 (1998), 691–713.
- [17] A. Ambrosetti, E. Colorado, “Standing waves of some coupled nonlinear Schrödinger equations”, *J. London Math. Soc.* (2), **75**:1 (2007), 67–82.
- [18] L. A. Maia, E. Montefusco, B. Pellacci, “Positive solutions for a weakly coupled nonlinear Schrödinger system”, *J. Differential Equations*, **229**:2 (2006), 743–767.
- [19] P. Bégout, “Necessary conditions and sufficient conditions for global existence in the nonlinear Schrödinger equation”, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **12**:2 (2002), 817–827.

Джи Шу

Sichuan University, Китай

E-mail: shuji2008@hotmail.com

Поступило

12.07.2008

Джиан Жанг

Sichuan University, Китай