Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Лонг Миао, Конечные группы с максимальными под-
группами $\mathcal{M}$ -дополняемых силовских подгрупп, *Ма-
тем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 5, 692–704

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8513>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:53:44

Конечные группы с максимальными подгруппами

$\mathcal{M}$ -дополняемых силовских подгрупп

Лонг Миао

Подгруппа H группы G называется $\mathcal{M}$ -дополняемой в группе G , если существует подгруппа B группы G такая, что $G = HB$ и $TB < G$ для всякой максимальной подгруппы T в H . В данной статье получен следующий результат: пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и пусть H – нормальная подгруппа группы G такая, что $G/H \in \mathcal{F}$. Предположим, что всякая максимальная подгруппа нециклической силовской подгруппы в $F^*(H)$, не имеющая сверхразрешимого дополнения в G , является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G . Тогда $G \in \mathcal{F}$.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Все группы, рассматриваемые в данной статье, конечные. Напомним, что подгруппа H группы G называется *дополняемой* в G , если существует подгруппа K группы G такая, что $HK = G$, и K называется *дополнением* подгруппы H в группе G .

Связь между свойствами подгрупп группы G и структурой группы G интенсивно изучалась многими учеными. В частности, Сринивасан [1] доказал, что конечная группа сверхразрешима, если любая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы нормальна. Позднее, Радаман и Шаалан [2] обобщили результат Сринивасана следующим образом: пусть G – группа, имеющая нормальную подгруппу H такую, что G/H сверхразрешима. Если все максимальные подгруппы любых силовских подгрупп в H являются π -квазинормальными в G , то группа G сверхразрешима. Асаад [3], применяя теорию формаций, получил более сильный результат. Недавно Ванг [4] обобщил результат Сринивасана следующим образом: пусть G – группа с нормальной подгруппой H такой, что G/H сверхразрешима. Если все максимальные подгруппы любых силовских подгрупп в H являются s -дополняемыми в G , то группа G сверхразрешима. Совсем недавно Миао и Гуо [5] доказали, что группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда любая максимальная подгруппа в силовской подгруппе группы G является сверхразрешимой s -дополняемой в G . В данной работе мы анализируем структуру конечных групп следующей природы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Подгруппа H называется $\mathcal{M}$ -дополняемой в конечной группе G , если существует подгруппа B группы G такая, что $G = HB$ и H_1B является

Работа выполнена при поддержке гранта NSFC и Тиан Юаньского фонда математики Китая (грант № 10626047).

собственной подгруппой группы G для любой максимальной подгруппы H_1 в H . В частности, 1 является $\mathcal{M}$ -дополняемой в любой нетривиальной группе, так как множество максимальных подгрупп в 1 пусто.

В основном, мы пользуемся стандартными обозначениями, которые можно найти в [6] и [7]. Через $F(G)$ обозначим подгруппу Фиттинга группы G ; через $F^*(G)$ обозначим обобщенную подгруппу Фиттинга группы G ; через $O_p(G)$ обозначим максимальную нормальную p -подгруппу группы G ; через $\Phi(G)$ обозначим пересечение всех максимальных подгрупп группы G ; через $|G|$ обозначим порядок группы G ; выражение $M < \cdot G$ означает, что M – максимальная подгруппа группы G .

Пусть π – множество простых чисел. Будем говорить, что группа $G \in E_\pi$, если G имеет π -подгруппу Холла. Также будем говорить, что $G \in C_\pi$, если $G \in E_\pi$ и любые две π -подгруппы Холла группы G являются сопряженными в G . Кроме того, будем говорить, что $G \in D_\pi$, если $G \in C_\pi$ и любая π -подгруппа группы G содержится в некоторой π -подгруппе Холла группы G .

Пусть $\mathcal{F}$ – некоторый класс групп. Класс $\mathcal{F}$ называется *формацией*, если выполнены следующие условия:

- (1) если $G \in \mathcal{F}$ и $H \trianglelefteq G$, то $G/H \in \mathcal{F}$;
- (2) если G/M и G/N принадлежат $\mathcal{F}$, то $G/M \cap N$ также принадлежит $\mathcal{F}$.

Ясно, что в случае формации, всякая группа G имеет наименьшую нормальную подгруппу (обозначаемую как $G^{\mathcal{F}}$), для которой частное $G/G^{\mathcal{F}}$ также принадлежит формации $\mathcal{F}$. Нормальная подгруппа $G^{\mathcal{F}}$ называется $\mathcal{F}$ -вычетом группы G . Формация $\mathcal{F}$ называется *насыщенной*, если $G \in \mathcal{F}$ всякий раз, когда $G/\Phi(G) \in \mathcal{F}$. Хорошо известно, что класс всех сверхразрешимых групп и класс всех p -нильпотентных групп являются насыщенными формациями (ср. [7]).

2. Предварительные сведения. Для удобства изложения сначала перечислим некоторые известные результаты, которые понадобятся нам в дальнейшем.

ЛЕММА 2.1. Пусть G – группа, и пусть H – подгруппа группы G . Тогда выполняются следующие условия.

- (1) Если H – $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа группы G , $H \leq M \leq G$, то H – $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа группы M .
- (2) Пусть $N \trianglelefteq G$ и $N \leq H$. Если H – $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа группы G , то H/N является $\mathcal{M}$ -дополняемой подгруппой группы G/N .
- (3) Пусть π – множество простых чисел. Пусть K – нормальная π' -подгруппа и пусть H – π -подгруппа группы G . Тогда H – $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа группы G тогда и только тогда, когда HK/K является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G/K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Если H – $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа группы G , то существует подгруппа B группы G такая, что $G = HB$ и $H_1B < G$ для любой максимальной подгруппы H_1 в H . Таким образом, можно считать, что $L = B \cap M$. Ясно, что $B \cap M \leq M$ и $M = M \cap HB = H(M \cap B)$. Так как $H_1B < G$ для любой максимальной подгруппы H_1 в H , ясно, что $M \cap H_1B = H_1(M \cap B)$ – собственная подгруппа подгруппы M .

(2) Если H – $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа группы G , то существует подгруппа B такая, что $G = HB$ и $H_1B < G$ для любой максимальной подгруппы H_1 в H . Таким образом, имеем $BN < G$. Иначе говоря, пусть T – максимальная подгруппа в H ,

которая содержит N ; тогда $T = T \cap BN = N(T \cap B)$ и, следовательно,

$$TB = N(T \cap B)B = NB = G,$$

что является противоречием. Легко получить $(H/N)(BN/N) = G/N$. Для любой максимальной подгруппы H_1 в H , содержащей N , имеем

$$(H_1/N)(BN/N) = H_1B/N < G/N.$$

Следовательно, H/N — $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа в G/N .

(3) Если H — $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа группы G , то существует подгруппа B группы G такая, что $G = HB$ и $H_1B < G$ для любой максимальной подгруппы H_1 в H . Ясно, что $(HK/K)(BK/K) = G/K$. Поскольку K — нормальная π' -подгруппа и H — π -подгруппа группы G , для любой максимальной подгруппы T/K в HK/K имеем $T = H_1K$, где H_1 — максимальная подгруппа в H . Поэтому

$$(H_1K/K)(BK/K) = H_1BK/K < G/K.$$

Иначе говоря, если $H_1BK = G$, то $|G : H_1B| = |K : K \cap H_1B|$ является π' -числом; с другой стороны, $|G : H_1B| = |HB : H_1B|$ также является π -числом, что приводит к противоречию.

Обратно, если HK/K — $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа в G/K , то можно аналогичным образом показать, что H — $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа группы G .

ЛЕММА 2.2. Пусть P — p -подгруппа группы G , где p — простой делитель числа $|G|$. Если P — $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа группы G , то существует подгруппа B группы G такая, что $|G : P_1B| = p$, где P_1 — максимальная подгруппа в P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как P — $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа в G , то существует подгруппа B группы G такая, что $G = PB$ и $P_1B < G$ для любой максимальной подгруппы P_1 в P . Тогда

$$P_1 \leq P \cap P_1B = P_1(P \cap B) < P.$$

Так как P_1 — максимальная подгруппа в P , имеем $P \cap B \leq P_1$ и, следовательно, $P \cap B = P_1 \cap B$. Поэтому, $|G : P_1B| = |PB : P_1B| = p$.

ЛЕММА 2.3 [6; теорема 1.8.17]. Пусть N — разрешимая нормальная подгруппа группы G ($N \neq 1$). Если $N \cap \Phi(G) = 1$, то подгруппа Фиттинга $F(N)$ в N является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп группы G , которое принадлежит N .

ЛЕММА 2.4 [8]. Если H — подгруппа группы G с $|G : H| = p$, где p — наименьший простой делитель числа $|G|$, то $H \trianglelefteq G$.

ЛЕММА 2.5 [9; лемма 1.9]. Пусть $\mathcal{F}$ — насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и пусть G — группа с нормальной подгруппой E такой, что $G/E \in \mathcal{F}$. Если подгруппа E циклическая, то $G \in \mathcal{F}$.

ЛЕММА 2.6 [10; теорема IV.4.7]. Если P — силовская p -подгруппа группы G и $N \trianglelefteq G$ такая, что $P \cap N \leq \Phi(P)$, то подгруппа N является p -нильпотентной.

ЛЕММА 2.7. Пусть G – конечная группа и пусть P – силовская p -подгруппа группы G , где p – наименьший простой делитель числа $|G|$. Тогда G является p -нильпотентной тогда и только тогда, когда P является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если G – p -нильпотентная группа, то G имеет нормальное p -дополнение D . Для силовской p -подгруппы P группы G и любой максимальной подгруппы P_1 в P легко показать, что $G = PD$ и $P_1D < G$. Следовательно, P – $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа группы G .

Обратно, если P – $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа группы G , то существует подгруппа B группы G такая, что $G = PB$ и $P_1B < G$ для любой максимальной подгруппы P_1 в P . В силу леммы 2.2 имеем $|G : P_1B| = p$ и, следовательно, $P_1B \trianglelefteq G$ в силу леммы 2.4. Так как $|G : P_1B| = |PB : P_1B| = p$, получим $P \cap B = P_1 \cap B$ для любой максимальной подгруппы P_1 в P . Поэтому,

$$P \cap B = \bigcap_{P_1 < P} (P_1 \cap B) = \Phi(P) \cap B.$$

Далее, докажем, что

$$\bigcap_{P_1 < P} (P_1B) = \left(\bigcap_{P_1 < P} P_1 \right) B.$$

Действительно, нам нужно только доказать, что $P_iB \cap P_jB = (P_i \cap P_j)B$ для любых максимальных подгрупп P_i и P_j в P . Ясно, что $P_iB \cap P_jB \supseteq (P_i \cap P_j)B$. С другой стороны, можно выбрать $xb_1 = yb_2 \in P_iB \cap P_jB$ и, следовательно,

$$y^{-1}x = b_2b_1^{-1} \in P \cap B = P_i \cap B = P_j \cap B.$$

Поэтому $x \in P_i \cap P_j$, и мы получим $P_iB \cap P_jB = (P_i \cap P_j)B$.

С другой стороны,

$$\bigcap_{P_1 < P} (P_1B) = \left(\bigcap_{P_1 < P} P_1 \right) B = \Phi(P)B\Phi(P)B \trianglelefteq G.$$

Из соотношения $P \cap \Phi(P)B = \Phi(P)(P \cap B) \leq \Phi(P)$ следует, что $\Phi(P)B$ является p -нильпотентной в силу леммы 2.6. Пусть H – нормальная p' -подгруппа Холла в $\Phi(P)B$. Ясно, что H также является нормальной p' -подгруппой Холла группы G и, следовательно, G – p -нильпотентна. Доказательство закончено.

ЛЕММА 2.8 [11; основная теорема]. Допустим, что конечная группа G имеет π -подгруппу Холла, где π – множество простых чисел, которое не содержит числа 2. Тогда все π -подгруппы Холла группы G являются сопряженными.

ЛЕММА 2.9. Пусть G – конечная группа, и пусть P – силовская p -подгруппа группы G , где p – наименьший простой делитель числа $|G|$. Тогда G – p -нильпотентна тогда и только тогда, когда всякая максимальная подгруппа в P , не имеющая p -нильпотентного дополнения в G , является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Нам остается доказать только достаточность. Предположим, что утверждение неверно и возьмем G в качестве контрпримера наименьшего порядка. Далее, имеем следующие утверждения.

Пусть P_1 – максимальная подгруппа силовской p -подгруппы P группы G , где p – наименьший простой делитель числа $|G|$. Если $|G|_p = p$, то G является p -нильпотентной в силу теоремы Бернсайда относительно p -нильпотентности, что приводит к противоречию.

Таким образом, можно считать, что $|G|_p \geq p^2$. По предположению, если P_1 имеет p -нильпотентное дополнение в G , то существует подгруппа K группы G такая, что $G = P_1 K$ и K является p -нильпотентной. Поэтому имеем $K_{p'} \trianglelefteq K$, где $K_{p'}$ является p' -подгруппой Холла в K и, конечно, p' -подгруппой Холла в G . Следовательно, $G = P_1 N_G(K_{p'})$. Если $P \cap N_G(K_{p'}) = P$, то $K_{p'} \trianglelefteq G$, что приводит к противоречию. Если $P \cap N_G(K_{p'}) = L$, где L – максимальная подгруппа в P , то

$$|G : N_G(K_{p'})| = |P : P \cap N_G(K_{p'})| = |P : L| = p$$

и, следовательно, $N_G(K_{p'}) \trianglelefteq G$ в силу леммы 2.4, что также приводит к противоречию. Таким образом, можно считать, что $P \cap N_G(K_{p'}) \leq L_2 < L_1$, где L_1 – максимальная подгруппа в P и L_2 – максимальная подгруппа в L_1 . Если L_1 имеет p -нильпотентное дополнение в G , то существует p -нильпотентная подгруппа H такая, что $G = L_1 H$. Аналогично, имеем $G = L_1 N_G(H_{p'})$, где $H_{p'}$ – p' -подгруппа Холла в H и, конечно, в G . В силу леммы 2.8 существует элемент x в P такой, что $N_G(K_{p'}) = (N_G(H_{p'}))^x$. Поэтому

$$G = L_1 N_G(H_{p'}) = (L_1 N_G(H_{p'}))^x = L_1 N_G(K_{p'}).$$

Далее,

$$P = P \cap L_1 N_G(K_{p'}) = L_1(P \cap N_G(K_{p'})) = L_1,$$

что приводит к противоречию. Таким образом, можно считать, что L_1 – $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа группы G , и существует подгруппа B группы G такая, что $G = L_1 B$ и $TB < G$ для любой максимальной подгруппы T в L_1 . Поэтому $L_2 B < G$ и $|G : L_2 B| = p$ в силу леммы 2.2. Так как p – наименьший простой делитель числа $|G|$, из леммы 2.4 следует, что $L_2 B \trianglelefteq G$. Ясно, что $G = L_1 B = PB = PL_2 B$, $P \cap L_2 B = L_2(P \cap B)$ – силовская p -подгруппа в $L_2 B$ и $L_2(P \cap B)$ – максимальная подгруппа в P . По предположению, если $L_2(P \cap B)$ – $\mathcal{M}$ -дополняемая подгруппа группы G , то $L_2(P \cap B)$ – $\mathcal{M}$ -дополняемая в $L_2 B$ в силу леммы 2.1 и, следовательно, $L_2 B$ – p -нильпотентная в силу леммы 2.7. Поэтому, G является p -нильпотентной группой.

Таким образом, можно считать, что $L_2(P \cap B)$ имеет p -нильпотентное дополнение R в G . Аналогично, имеем $G = L_2(P \cap B) N_G(R_{p'})$, где $R_{p'}$ – p' -подгруппа Холла в R и, конечно, p' -подгруппа Холла в G . В силу леммы 2.8 существует элемент x подгруппы P такой, что $N_G(K_{p'}) = (N_G(R_{p'}))^x$. Поэтому,

$$G = L_2(P \cap B) N_G(R_{p'}) = (L_2(P \cap B) N_G(R_{p'}))^x = L_2(P \cap B) N_G(K_{p'}).$$

Далее,

$$P = P \cap L_2(P \cap B) N_G(K_{p'}) = L_2(P \cap B)(P \cap N_G(K_{p'})) = L_2(P \cap B),$$

что приводит к противоречию.

Последнее противоречие завершает наше доказательство.

ЛЕММА 2.10 [12]. Пусть G – группа и пусть N – подгруппа группы G . Обобщенная подгруппа Фиттинга $F^*(G)$ группы G является единственной максимальной нормальной квазинильпотентной подгруппой группы G . Тогда

- (1) если N – нормальная подгруппа группы G , то $F^*(N) \leq F^*(G)$;
- (2) $F^*(G) \neq 1$, если $G \neq 1$; действительно,

$$F^*(G)/F(G) = \text{Soc}(F(G)C_G(F(G)))/F(G));$$

- (3) $F^*(F^*(G)) = F^*(G) \geq F(G)$; если $F^*(G)$ – разрешимая подгруппа, то $F^*(G) = F(G)$;
- (4) $C_G(F^*(G)) \leq F(G)$;
- (5) пусть $P \trianglelefteq G$ и $P \leq O_p(G)$; тогда $F^*(G/\Phi(P)) = F^*(G)/\Phi(P)$;
- (6) если K – подгруппа группы G , содержащаяся в $Z(G)$, то имеем $F^*(G/K) = F^*(G)/K$.

ЛЕММА 2.11 [13; теорема 3.1]. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая $\mathcal{U}$, и пусть G – группа, имеющая разрешимую нормальную подгруппу H такую, что $G/H \in \mathcal{F}$. Если для любой максимальной подгруппы M группы G либо $F(H) \leq M$, либо $F(H) \cap M$ является максимальной подгруппой в $F(H)$, то $G \in \mathcal{F}$. Обратное так же верно, если $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

3. Основные результаты.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и пусть H – нормальная подгруппа группы G такая, что $G/H \in \mathcal{F}$. Если любая максимальная подгруппа нециклической силовской подгруппы в H , не имеющая сверхразрешимого дополнения в G , является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G , то $G \in \mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение теоремы неверно, и возьмем G в качестве контрпримера минимального порядка. Кроме того, выполняются следующие утверждения.

- (1) H – разрешимая подгруппа.

В силу леммы 2.9 H имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Пусть P – силовская p -подгруппа в H , где p – наименьший простой делитель числа $|H|$. Тогда P характеризует H и, следовательно, $P \trianglelefteq G$. Кроме того, пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в P . Ясно, что L является элементарной абелевой p -группой.

- (2) $G/L \in \mathcal{F}$ и L – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в H и такая, что $H \cap \Phi(G) = 1$. Далее, $L = F(H) = C_H(L) = P$.

Сначала проверим, что $(G/L, H/L)$ удовлетворяет предположениям относительно (G, H) . Известно, что $H/L \leq G/L$ и $(G/L)/(H/L) \cong G/H \in \mathcal{F}$. Пусть $\bar{Q} = QL/L$ – нециклическая силовская q -подгруппа в H/L . Предположим, что Q – силовская q -подгруппа в H . Ясно, что Q не является циклической. Если $p = q$, то можно считать, что $L \leq P$, где P – силовская p -подгруппа в H . Если $L \leq P = Q$, то, следовательно, каждая максимальная подгруппа в P/L имеет вид P_1/L , где P_1 – максимальная подгруппа в P . По предположению, если P_1 не имеет сверхразрешимого дополнения в G , то P_1 является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G и, следовательно, P_1/L не имеет сверхразрешимого дополнения, и P_1/L является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G/L .

в силу леммы 2.1. Теперь предположим, что $p \neq q$. Пусть $\bar{Q}_1$ – максимальная подгруппа силовской q -подгруппы в $\bar{H}$. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{Q}_1 = Q_1 L / L$, где Q_1 – максимальная подгруппа силовской q -подгруппы в H . Если Q_1 не имеет сверхразрешимого дополнения в G , то Q_1 является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G и, следовательно, $Q_1 L / L$ является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G/L . Поэтому $(G/L, H/L)$ удовлетворяет условиям теоремы. Из минимальности выбора группы G следует, что $G/L \in \mathcal{F}$. Из того, что $\mathcal{F}$ является насыщенной формацией, следует, что L является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G , содержащейся в H и такой, что $L \not\leq \Phi(G)$. В силу леммы 2.3 имеем $F(H) = L$. Из разрешимости H следует, что $L \leq C_H(L) = C_H(F(H)) \leq F(H)$ и, следовательно, $C_H(L) = L = F(H)$.

(3) Заключительное противоречие.

Если L – циклическая подгруппа, то в силу леммы 2.5 имеем $G \in \mathcal{F}$, что приводит к противоречию. Таким образом, можно считать, что L не является циклической. Пусть L_1 – максимальная подгруппа в L . Пусть L_1 имеет сверхразрешимое дополнение в G , т.е. существует подгруппа K группы G такая, что $L_1 K = G$ и K является сверхразрешимой. Из того, что L является минимальной нормальной подгруппой группы G следует, что либо $L \cap K = 1$, либо $L \leq K$. Если $L \leq K$, то $G = K$ является сверхразрешимой, что приводит к противоречию. Поэтому $L \cap K = 1$ и, следовательно, $|L| = p$. Далее, из включения $G/L \in \mathcal{F}$ следует, что $G \in \mathcal{F}$ в силу леммы 2.5, что приводит к противоречию. По предположению L_1 не имеет сверхразрешимого дополнения в G и, следовательно, L_1 является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G . Тогда существует подгруппа B группы G такая, что $G = L_1 B$ и $T B < G$ для любой максимальной подгруппы T в L_1 . В силу леммы 2.2 имеем $|G : T B| = p$ и $L_1 \cap B = T \cap B \leq \Phi(L_1) \leq \Phi(L)$. Так как L – минимальная нормальная подгруппа группы G и $T B$ – максимальная подгруппа группы G , ясно, что $G = L T B$ или $L \leq T B$. Если $G = L T B$, то $|G : T B| = |L : L \cap T B| = |L| = p$ и, следовательно, $G \in \mathcal{F}$ в силу леммы 2.5. Если $L \leq T B$, то $T B = L T B = L B = G$, что приводит к противоречию.

Последнее противоречие завершает наше доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Пусть G – группа. Если любая максимальная подгруппа нециклической силовской подгруппы группы G , не имеющая сверхразрешимого дополнения в G , является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G , то G – сверхразрешимая группа.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. Пусть G – конечная группа, и H – нетривиальная нормальная подгруппа группы G такая, что G/H является сверхразрешимой. Если любая максимальная подгруппа нециклической силовской подгруппы в H является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G , то G – сверхразрешимая группа.

СЛЕДСТВИЕ 3.4 [5; теорема 3.4]. Группа G является сверхразрешимой тогда и только тогда, когда G имеет нормальную подгруппу H такую, что G/H является сверхразрешимой и любая максимальная подгруппа любой силовской подгруппы в H имеет сверхразрешимое s -дополнение в G .

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая все сверхразрешимые группы, и пусть H – подгруппа группы G такая, что $G/H \in \mathcal{F}$. Предположим, что любая максимальная подгруппа нециклической силовской подгруппы в $F^*(H)$, не имеющая сверхразрешимого дополнения в G , является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G . Тогда $G \in \mathcal{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение теоремы неверно и возьмем G в качестве контрпримера минимального порядка. Далее, рассмотрим следующие два случая.

Случай I. $\mathcal{F} = \mathcal{U}$.

Утверждение (1): $H = G$, $F^*(G) = F(G) \neq 1$.

Из следствия 3.2 следует, что $F^*(H)$ является сверхразрешимой. В частности, $F^*(H)$ является разрешимой и, следовательно, $F^*(H) = F(H) \neq 1$ в силу леммы 2.11. Так как H удовлетворяет условиям теоремы, из минимальности выбора G следует, что H является сверхразрешимой, если $H < G$. Далее, докажем, что G является сверхразрешимой, если H – разрешимая подгруппа. Доказательство проведем в несколько этапов.

Для любой максимальной подгруппы M группы G , если $F(H) \leq M$, то G является сверхразрешимой в силу леммы 2.11, что приводит к противоречию. Таким образом, можно считать, что существует, по крайней мере, одна максимальная подгруппа M группы G , не содержащая $F(H)$.

Действительно, так как $F(H) \not\leq M$, существует, по крайней мере, простое число p в множестве $\pi(|H|)$ при $O_p(H) \not\leq M$. Тогда $G = O_p(H)M$ как $O_p(H) \trianglelefteq G$. Если $|O_p(H)| = p$, то $|G : M| = p$ и, следовательно, группа G является сверхразрешимой в силу леммы 2.11. Если $|O_p(H)| > p$ и $O_p(H)$ является циклической, то имеем $\Phi(O_p(H)) \neq 1$. Ясно, что $G/\Phi(O_p(H))$ удовлетворяет условиям теоремы, и из минимальности выбора G следует, что $G/\Phi(O_p(H))$ является сверхразрешимой и, следовательно, G – сверхразрешимая группа, так как $\mathcal{U}$ является насыщенной формацией, что приводит к противоречию. Пусть M_p – силовская p -подгруппа в M . Тогда, как известно, $G_p = O_p(H)M_p$ является силовской p -подгруппой группы G . Теперь пусть P_1 – максимальная подгруппа в G_p , содержащая M_p , и пусть $P_2 = P_1 \cap O_p(H)$. Тогда $P_1 = P_2M_p$. Кроме того, $P_2 \cap M_p = O_p(H) \cap M_p$, так что

$$|O_p(H) : P_2| = |O_p(H)M_p : P_2M_p| = |G_p : P_1| = p,$$

т.е. P_2 – максимальная подгруппа в $O_p(H)$. Следовательно, $P_2(O_p(H) \cap M)$ – подгруппа в $O_p(H)$. Из максимальной P_2 в $O_p(H)$ следует, что $P_2(O_p(H) \cap M) = P_2$ или $O_p(H)$.

Если $P_2(O_p(H) \cap M) = O_p(H)$, то $G = O_p(H)M = P_2M$. Заметим также, что $O_p(H) \cap M = P_2 \cap M$. Таким образом, $O_p(H) = P_2$, что приводит к противоречию.

Таким образом, можно считать, что $P_2(O_p(H) \cap M) = P_2$, т.е. $O_p(H) \cap M \leq P_2$. Ясно, что $O_p(H) \cap M \trianglelefteq G$ и $O_p(H) \cap M \leq (P_2)_G$. С другой стороны, если P_2 имеет сверхразрешимое дополнение в G , то существует подгруппа N группы G такая, что $G = P_2N$ и N является сверхразрешимой группой. Положим $K = (P_2)_G N$; тогда $G = P_2N = P_2K$ и

$$K/K \cap (P_2)_G = K/(P_2)_G = (P_2)_G N / (P_2)_G \cong N/N \cap (P_2)_G \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}.$$

Теперь мы рассмотрим следующие случаи.

1) $K < G$. Пусть K_1 – максимальная подгруппа группы G , содержащая K . Тогда $O_p(H) \cap K_1 \trianglelefteq G$, откуда следует, что $(O_p(H) \cap K_1)M$ является подгруппой группы G . Если $(O_p(H) \cap K_1)M = G = O_p(H)M$, то $O_p(H) \cap K_1 = O_p(H)$, так как $(O_p(H) \cap K_1) \cap M = O_p(H) \cap M$. Отсюда следует, что $O_p(H) \leq K_1$ и, следовательно,

$G = O_p(H)K_1 = K_1$, что противоречит ранее сделанным предположениям относительно K_1 . Таким образом, $(O_p(H) \cap K_1)M = M$ и, следовательно, $O_p(H) \cap K_1 \leq M$. Далее,

$$P_2 \cap K \leq O_p(H) \cap K \leq O_p(H) \cap M \leq (P_2)_G \leq P_2 \cap K,$$

т.е. $O_p(H) \cap K = O_p(H) \cap M = P_2 \cap K$, а это противоречит тому, что $G = P_2K = O_p(H)K$.

2) $K = (P_2)_G N = G$. В этом случае, если $(P_2)_G = 1$, то $N = G \in \mathcal{F}$, что приводит к противоречию. Таким образом, можно считать, что $(P_2)_G \neq 1$. Отсюда следует, что $(P_2)_G M = M$ или $(P_2)_G M = G$. Если $(P_2)_G M = G$, то

$$G = (P_2)_G M = O_p(H)M = P_2M.$$

Заметим, что $O_p(H) \cap M = P_2 \cap M$ и, таким образом, $O_p(H) = P_2$, что также приводит к противоречию. Поэтому, $(P_2)_G M = M$, т.е. $(P_2)_G \leq M$, а тогда $(P_2)_G \leq O_p(H) \cap M \leq (P_2)_G$ и, следовательно, $O_p(H) \cap M = (P_2)_G$. По предположению из $G/(P_2)_G \in \mathcal{U}$ следует, что $|G/(P_2)_G : M/(P_2)_G| = |G : M| = p$, а это означает, что $F(H) \cap M$ имеет простой индекс в $F(H)$ и, следовательно, G также является сверхразрешимой группой в силу леммы 2.11, что приводит к противоречию.

Таким образом, можно считать, что P_2 не имеет сверхразрешимого дополнения в G . Поэтому в силу сделанных предположений P_2 является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G . Тогда существует подгруппа K группы G такая, что $P_2K = G$ и $LK < G$ для любой максимальной подгруппы L в P_2 .

Теперь рассмотрим следующие два случая.

а) $(P_2)_G = P_2$. Если $P_2 \trianglelefteq G$, то $MP_2 = M$ или $MP_2 = G$. Если $P_2M = M$, то $P_2 \leq O_p(H) \cap M \leq P_2$. Поэтому $O_p(H) \cap M = P_2$ и

$$|G : M| = |O_p(H)M : M| = |O_p(H) : O_p(H) \cap M| = p.$$

Это означает, что $F(H) \cap M$ является максимальной подгруппой в $F(H)$ и, следовательно, G является сверхразрешимой группой в силу леммы 2.11, что приводит к противоречию. Если $P_2M = G$, то $G = P_2M = O_p(H)M$. Заметим, что $O_p(H) \cap M = P_2 \cap M$ и, таким образом, $O_p(H) = P_2$, что также приводит к противоречию.

б) $(P_2)_G < P_2$. В этом случае $(P_2)_G K < G$. Иначе говоря, существует максимальная подгруппа L в P_2 такая, что $(P_2)_G \leq L$ и, таким образом, имеем $G = (P_2)_G K \leq LK$, что приводит к противоречию. Предположим, что K_1 является максимальной подгруппой группы G , содержащей $(P_2)_G K$. Тогда $O_p(H) \cap K_1 \trianglelefteq G$, откуда следует, что $(O_p(H) \cap K_1)M$ является подгруппой группы G . Если $(O_p(H) \cap K_1)M = G = O_p(H)M$, то $O_p(H) \cap K_1 = O_p(H)$, так как $(O_p(H) \cap K_1) \cap M = O_p(H) \cap M$. Это значит, что $O_p(H) \leq K_1$ и, следовательно, $G = O_p(H)K_1 = K_1$, что противоречит выбору K_1 . Таким образом, $(O_p(H) \cap K_1)M = M$ и $O_p(H) \cap K_1 \leq M$. Далее,

$$P_2 \cap (P_2)_G K \leq O_p(H) \cap (P_2)_G K \leq O_p(H) \cap M \leq (P_2)_G \leq P_2 \cap (P_2)_G K,$$

т.е.

$$O_p(H) \cap (P_2)_G K = O_p(H) \cap M = P_2 \cap (P_2)_G K.$$

Из соотношений $G = O_p(H)(P_2)_G K = P_2(P_2)_G K$ следует, что $O_p(H) = P_2$, а это приводит к противоречию. Поэтому имеем $G = H$ и $F^*(G) = F^*(H) = F(G)$.

Утверждение (2): *всякая собственная нормальная подгруппа N группы G , содержащая $F^*(G)$, является сверхразрешимой.*

В силу леммы 2.10 имеем

$$F^*(G) = F^*(F^*(G)) \leq F^*(N) \leq F^*(G)$$

и, следовательно, $F^*(N) = F^*(G)$. Действительно, всякая максимальная подгруппа нециклических силовских подгрупп в $F^*(N)$, не имеющая сверхразрешимого дополнения в N , является $\mathcal{M}$ -дополняемой в N в силу леммы 2.1. Следовательно, подгруппа N сверхразрешима в силу минимальности выбора группы G .

Утверждение (3): $\Phi(G) < F(G)$.

Если всякая силовская подгруппа в $F(G)$ является циклической, то $F(G) = H_1 \times \dots \times H_r$, где $H_i, i = 1, \dots, r$, является циклической силовской подгруппой в $F(G)$ и, следовательно, $G/C_G(H_i)$ является абелевой для любого $i \in \{1, \dots, r\}$. Кроме того, известно, что $G/\bigcap_{i=1}^r C_G(H_i) = G/C_G(F(G))$ является абелевой и, следовательно, $G/F(G)$ также является абелевой, так как $C_G(F(G)) = C_G(F^*(G)) \leq F(G)$. Поэтому, мы заключаем, что G – разрешимая группа, а это приводит к противоречию.

Пусть P – нециклическая силовская подгруппа в $F(G)$, и пусть P_1 – максимальная подгруппа в P . По предположению, если P_1 имеет сверхразрешимое дополнение в G , то существует сверхразрешимая подгруппа K группы G такая, что $G = P_1 K$. Если $\Phi(G) = F(G)$, то $P_1 \leq \Phi(G)$ и, следовательно, $G = K$ является сверхразрешимой, что приводит к противоречию. Если P_1 не имеет сверхразрешимого дополнения в G , то P_1 является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G по предположению. Тогда существует подгруппа B группы G такая, что $G = P_1 B$ и $TB < G$ для любой максимальной подгруппы T в P_1 . Если $F(G) = \Phi(G)$, то $G = P_1 B = B$, что также приводит к противоречию.

Утверждение (4): $G = O_p(G)M$, где M – максимальная подгруппа группы G .

Так как $\Phi(G) < F(G)$, то существуют некоторая силовская p -подгруппа $O_p(G)$ в $F(G)$ и максимальная подгруппа M в G такие, что $O_p(G) \not\leq M$ и $G = O_p(G)M$.

Утверждение (5): $O_p(G)$ не является циклической.

Если $|O_p(G)| = p$, то положим $C = C_G(O_p(G))$. Ясно, что $F(G) \leq C \leq G$. Если $C < G$, то C является разрешимой в силу (2). С другой стороны, так как G/C является циклической, ясно, что G – разрешимая группа, а это приводит к противоречию. Таким образом, можно считать, что $C = G$. Пусть теперь $O_p(G) \leq Z(G)$. Тогда рассмотрим фактор-группу $G/O_p(G)$. Из леммы 2.10 следует, что

$$F^*(G/O_p(G)) = F^*(G)/O_p(G) = F(G)/O_p(G).$$

Легко видеть, что $G/O_p(G)$ удовлетворяет условиям теоремы. Поэтому, из минимальности выбора G следует, что $G/O_p(G) \in \mathcal{U}$ и, следовательно, G является сверхразрешимой группой, что снова приводит к противоречию.

Таким образом, можно считать, что $|O_p(G)| > p$. Очевидно, $\Phi(O_p(G)) \neq 1$, и мы видим, что в силу леммы 2.10

$$F^*(G/\Phi(O_p(G))) = F^*(G)/\Phi(O_p(G)) = F(G)/\Phi(O_p(G));$$

затем легко проверить, что фактор-группа $G/\Phi(O_p(G))$ удовлетворяет условиям теоремы. Из минимальности выбора G следует, что $G/\Phi(O_p(G))$ является сверхразрешимой и, следовательно, G – сверхразрешимая группа, так как $\mathcal{U}$ является насыщенной формацией, что приводит к противоречию.

Утверждение (6): *максимальная подгруппа в $O_p(G)$ не имеет сверхразрешимого дополнения в G .*

Пусть P_1 – максимальная подгруппа в $O_p(G)$. По предположению, если P_1 имеет сверхразрешимое дополнение в G , то существует подгруппа K такая, что $G = P_1K$ и K является сверхразрешимой. Следовательно, $G = P_1K = O_p(G)K$. Из разрешимости $O_p(G)$ и $G/O_p(G) \cong K/K \cap O_p(G)$ следует, что G разрешимая группа, что приводит к противоречию.

Утверждение (7): *заключительное противоречие.*

Из утверждения (5) следует, что $\Phi(O_p(G)) = 1$ и, следовательно, $O_p(G)$ является элементарной абелевой p -группой. Далее, рассмотрим следующие два случая.

(7.1) $O_p(G) \cap \Phi(G) \neq 1$.

Если $O_p(G) \cap \Phi(G) \neq 1$, то существует минимальная нормальная подгруппа L группы G , содержащаяся в $O_p(G) \cap \Phi(G)$, и L является элементарной абелевой p -группой. По предположению всякая максимальная подгруппа T в $O_p(G)$ является $\mathcal{M}$ -дополняемой в группе G . Для максимальной подгруппы P_1 в $O_p(G)$, содержащей L , существует подгруппа B группы G такая, что $G = P_1B$ и $C_iB < G$ для любой максимальной подгруппы C_i в P_1 . Сначала ясно, что $L \leq C_iB$ для любой максимальной подгруппы C_i в P_1 . Иначе говоря, существует некоторая C_i такая, что $L \not\leq C_iB$. В силу леммы 2.2 имеем $|G : C_iB| = p$ и

$$P_1 \cap B = C_i \cap B \leq \Phi(P_1) \leq \Phi(O_p(G))$$

для любой максимальной подгруппы C_i в P_1 . Очевидно, C_iB является максимальной подгруппой группы G . Так как $L \leq C_iB$ для некоторой C_i , то $G = LC_iB = C_iB$, поскольку $L \leq \Phi(G)$, а это приводит к противоречию. Кроме того, теперь мы докажем, что $L \leq C_i$ для любой максимальной подгруппы C_i в P_1 . Если это не так, то существует некоторая C_i такая, что $L \not\leq C_i$. Так как C_i – максимальная подгруппа в P_1 , имеем $P_1 = LC_i$. Далее, $C_iB = LC_iB = P_1B = G$, что приводит к противоречию. Следовательно,

$$1 \neq L \leq \bigcap_{C_i < P_1} C_i = \Phi(P_1) \leq \Phi(O_p(G)) = 1,$$

а это также приводит к противоречию.

(7.2) $O_p(G) \cap \Phi(G) = 1$.

Если $O_p(G) \cap \Phi(G) = 1$, то в силу леммы 2.3 $O_p(G)$ является прямым произведением некоторых минимальных нормальных подгрупп в группе G . Обозначим $O_p(G) = R_1 \times \cdots \times R_t$, где R_i – минимальная нормальная подгруппа группы G , $i = 1, 2, \dots, t$. По предположению всякая максимальная подгруппа P_1 в $O_p(G)$ является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G . Существует подгруппа B группы G такая, что $G = P_1B$ и $C_iB < G$ для любой максимальной подгруппы C_i в P_1 . В силу леммы 2.2 имеем $|G : C_iB| = p$ и $P_1 \cap B = C_i \cap B \leq \Phi(P_1)$. Пусть L – какая-либо минимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в P_1 . Далее, покажем, что существует, по крайней мере, одна C_i такая, что $L \not\leq C_iB$. Иначе говоря, если

$L \leq C_i B$ для любого C_i в P_1 , то можно утверждать, что $L \leq C_i$ и, следовательно, $L \leq \bigcap_{C_i < P_1} C_i = \Phi(P_1)$. Если это не так, то существует максимальная подгруппа C_i в P_1 такая, что $L \not\leq C_i$; таким образом, имеем $C_i B = L C_i B = P_1 B = G$, что приводит к противоречию. С другой стороны, $1 < L \leq \Phi(P_1) \leq \Phi(O_p(G)) = 1$, что также приводит к противоречию. Следовательно, существует, по крайней мере, одна C_i в P_1 такая, что $L \not\leq C_i B$. Так как $|G : C_i B| = p$, известно, что $|L| = p$. Таким образом, $O_p(G)$ является прямым произведением некоторых минимальных нормальных подгрупп порядка p группы G .

Для любой подгруппы R_i в $O_p(G)$, где $i \in \{1, \dots, t\}$, рассмотрим $C_G(R_i)$. Ясно, что $F(G) \leq C_G(R_i) \trianglelefteq G$. Если $C_G(R_i) < G$, то $C_G(R_i)$ является разрешимой в силу (2). С другой стороны, так как $G/C_G(R_i)$ циклическая, ясно, что G разрешима, а это приводит к противоречию. Таким образом, предположим, что $C_G(R_i) = G$. Так как $R_i \leq Z(G)$ для любой минимальной нормальной подгруппы R_i в $O_p(G)$, имеем $O_p(G) \leq Z(G)$. Затем рассмотрим фактор-группу $G/O_p(G)$. В силу леммы 2.10 имеем

$$F^*(G/O_p(G)) = F^*(G)/O_p(G) = F(G)/O_p(G).$$

Действительно, $G/O_p(G)$ удовлетворяет условиям теоремы. Поэтому, из минимальности выбора группы G следует, что $G/O_p(G) \in \mathcal{U}$ и, следовательно, G является сверхразрешимой группой, а это приводит к противоречию.

Случай II. $\mathcal{F} \neq \mathcal{U}$.

В случае I было доказано, что H сверхразрешима. В частности, H разрешима и $F(H) = F^*(H)$. Рассуждая так же, как и в утверждении 1 случая I и применяя лемму 2.11, получим, что $G \in \mathcal{F}$, а это приводит к противоречию.

Последнее противоречие завершает наше доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 3.6. Пусть G – конечная группа, и пусть H – нормальная подгруппа группы G такая, что $G/H \in \mathcal{U}$. Если всякая максимальная подгруппа нециклической силовской подгруппы в $F^*(H)$, не имеющая сверхразрешимого дополнения в G , является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G , то $G \in \mathcal{U}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Пусть $\mathcal{F}$ – насыщенная формация, содержащая $\mathcal{U}$. Допустим, что G – конечная группа, имеющая разрешимую нормальную подгруппу H такую, что $G/H \in \mathcal{F}$. Если всякая максимальная подгруппа нециклической силовской подгруппы в $F(H)$ является $\mathcal{M}$ -дополняемой в G , то $G \in \mathcal{F}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Srinivasan, “Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups”, *Israel J. Math.*, **35**:3 (1980), 210–214.
- [2] M. Asaad, M. Ramadan, A. Shaalan, “Influence of π -quasinormality on maximal subgroups of Sylow subgroups of Fitting subgroup of a finite group”, *Arch. Math. (Basel)*, **56**:6 (1991), 521–527.
- [3] M. Asaad, “On maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups”, *Comm. Algebra*, **26**:11 (1998), 3647–3652.
- [4] Y. Wang, “Finite groups with some subgroups of Sylow subgroups c -supplemented”, *J. Algebra*, **224**:2 (2000), 467–478.
- [5] L. Miao, W. Guo, “Finite groups with some primary subgroups $\mathcal{F}$ -s-supplemented”, *Comm. Algebra*, **33**:8 (2005), 2789–2800.

- [6] W. Guo, *The Theory of Classes of Groups*, Math. Appl., **505**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.
- [7] D.J.S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Grad. Texts in Math., **80**, Springer-Verlag, New York, NY, 1993.
- [8] M. Xu, *An Introduction to Finite Groups*, Sci. Press, Beijing, 1999.
- [9] A.N. Skiba, “A note on c -normal subgroups of finite groups”, *Algebra Discrete Math.*, 2005, № 3, 85–95.
- [10] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Grundlehren Math. Wiss., **134**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [11] F. Gross, “Conjugacy of odd order Hall subgroups”, *Bull. London Math. Soc.*, **19**:4 (1987), 311–319.
- [12] B. Huppert, N. Blackburn, *Finite Groups. III*, Grundlehren Math. Wiss., **243**, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [13] Y. Wang, H. Wei, Y. Li, “A generalisation of Kramer’s theorem and its applications”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **65**:3 (2002), 467–475.

Лонг Миао

Yangzhou University, Китай

E-mail: miaolong714@vip.sohu.com

Поступило

29.03.2008

Исправленный вариант

29.06.2008