Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Лю Сиа-Фень, Алгебры с периодическими сдвигами степеней Ext, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 5, 705–724

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 16:09:19

Алгебры с периодическими сдвигами степеней Ext

Лю Сиа-Фень

Вводятся так называемые λ -кошулевы алгебры и λ -кошулевы модули. Даны различные эквивалентные описания λ -кошулевых алгебр в терминах их минимальной градуированной проективной резольвенты и Ext-алгебры Ионеда $E(A) = \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(\mathbb{F}, \mathbb{F})$. Обсуждается “ λ -кошулевость” конечно порожденных градуированных модулей и вводятся понятия (сильно) слабо λ -кошулевых модулей. Наконец, обсуждается A_∞ -структура Ext-алгебры Ионеда λ -кошулевой алгебры.

Библиография: 15 названий.

Введение

Кошулева алгебра, введенная Придди в 1970 г. [1], – это квадратичная алгебра с линейной резольвентой. Такую алгебру можно рассматривать как положительно градуированную алгебру, которая “так близка к полупростым, как только можно” [2]. Тридцатью годами позже под влиянием кубических регулярных алгебр Артина–Шелтера [3] Бергер включил в это понятие высшие однородные алгебры [4] (более подробное обсуждение понятия d -кошулевых алгебр приведено в [5]), или высшие кошулевы алгебры [6] (где кошулевость излагалась на языке A_∞ -алгебр). Много хороших гомологических свойств кошулевых и d -кошулевых алгебр было найдено в различных областях исследования коммутативных и некоммутативных алгебр – в алгебраической топологии, алгебраической геометрии, квантовых группах и теории алгебр Ли ([2], [7] и т.д.). В последнее время многие авторы проявили интерес к этим алгебрам и были получены различные обобщения ([5], [6] и т.д.).

В настоящей статье предполагается, что все градуированные алгебры $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ порождены первой степенью, причем $A_0 = \mathbb{F}$, где $\mathbb{F}$ – произвольное поле. Мы вводим новый класс d -однородных алгебр, так называемых λ -кошулевых алгебр, который является обобщением семейства классических d -кошулевых алгебр; определение приведено в следующем разделе. Эти алгебры образуют класс d -однородных алгебр, включающий классические d -кошулевы алгебры в качестве особых примеров. Однако λ -кошулевы алгебры ведут себя до некоторой степени подобно классическим кошулевым и d -кошулевым алгебрам. Например, следующие утверждения хорошо известны (см. [5]–[7], соответственно):

- A является кошулевой алгеброй тогда и только тогда, когда $E(A)$ минимально порождена ext-степенью 1 (и $\text{Ext}_A^1(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \text{Ext}_A^1(\mathbb{F}, \mathbb{F})_1$);

- A является d -кошулевой алгеброй тогда и только тогда, когда $E(A)$ минимально порождена ext-степенями 1, 2 и $\text{Ext}_A^2(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \text{Ext}_A^2(\mathbb{F}, \mathbb{F})_d$.

Что же касается нашего нового объекта, λ -кошулевых алгебр, то справедлива

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть $A = \mathbb{F} \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$ – градуированная алгебра, порожденная A_1 . В этом случае A является λ -кошулевой алгеброй тогда и только тогда, когда $E(A)$ минимально порождена ext-степенями 1, 2, 4, ..., $2k$, ..., $2|\lambda|$ и $\text{Ext}_A^i(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \text{Ext}_A^i(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{\delta_\lambda(i)}$ при $i = 2, 4, \dots, 2k, \dots, 2|\lambda|$, $k \in \mathbb{N}$, где определения λ , $|\lambda|$ и δ_λ даны в разделе 1 ниже.

Нетрудно видеть, что для кошулевых, d -кошулевых и λ -кошулевых алгебр все порождающие пространства Ext-алгебр Ионеда

$$E(A) = \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(\mathbb{F}, \mathbb{F})$$

содержат слагаемое, имеющее ext-степень 1, т.е. $\text{Ext}_A^1(\mathbb{F}, \mathbb{F})$, но число слагаемых высших ext-степеней ($\text{Ext}_A^{\geq 2}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$) различно. Почему? Для λ -кошулевых алгебр мы получаем следующий результат, являющийся простым следствием теоремы 0.1 (это – основные результаты раздела 2).

ТЕОРЕМА 0.2. Пусть A – λ -кошулева алгебра и $E(A)$ – ее Ext-алгебра Ионеда. Тогда $\|A\| = h(A)$, где определения $\|A\|$ и $h(A)$ приведены в следующем разделе. Таким образом, для λ -кошулевой алгебры A число слагаемых высших ext-степеней в порождающем пространстве $E(A)$ равно значению степени-скачка алгебры A .

Следующий пример помогает понять теорему 0.2.

ПРИМЕР 0.3. Пусть A – кошулева алгебра и $\mathbf{P}$ – минимальная градуированная проективная резольвента тривиального A -модуля $\mathbb{F}$,

$$\mathbf{P}: \dots \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{F} \rightarrow 0.$$

По определению каждый модуль P_n порожден степенью $\delta(n) = n$ для всех $n \geq 0$. Таким образом,

$$\delta(i+1) - \delta(i) = 1$$

для всех $i \geq 0$. Итак, $\|A\| = 0$. Как мы видели выше, $h(A) = 0$.

Подобным образом, если A – d -кошулева алгебра ($d > 2$) и $\mathbf{P}$ – минимальная градуированная проективная резольвента тривиального A -модуля $\mathbb{F}$, то по определению при $n \geq 0$ модуль P_n порожден степенью $\delta'(n)$, где

$$\delta'(n) = \begin{cases} \frac{nd}{2}, & \text{если } n \text{ четно,} \\ \frac{(n-1)d}{2} + 1, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Заметим, что при $k \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \delta'(2k+2) - \delta'(2k+1) &= d - 1 > 1, \\ \delta'(2k+1) - \delta'(2k) &= 1, \end{aligned}$$

т.е. $\|A\| = 1$. Как мы видели выше, $h(A) = 1$.

В том же разделе вводится понятие λ -кошулева модуля. Нетрудно видеть, что эти модули – чистые градуированные модули, т.е. они могут быть порождены одной из степеней. В связи с [8] желательно изучить “ λ -кошулевость” произвольных конечно порожденных градуированных модулей. Следуя этой путеводной нити, мы определяем так называемые *слабо λ -кошулевы модули* и *сильно слабо λ -кошулевы модули*. Мы показываем, что (сильно) слабо λ -кошулевы модули могут быть аппроксимированы λ -кошулевыми модулями. Следующие утверждения являются основными результатами раздела 3.

ТЕОРЕМА 0.4. Пусть A – λ -кошулева алгебра. Справедливы следующие утверждения.

(i) Пусть M – произвольный конечно порожденный градуированный A -модуль, $\{S_{d_0}, S_{d_1}, \dots, S_{d_p}\}$ – множество минимальных однородных порождающих пространств для M . Мы вправе предполагать, что $S_{d_i} \subseteq M_{d_i}$ при $0 \leq i \leq p$, и что $d_0 < d_1 < \dots < d_p$. Тогда M допускает естественную фильтрацию:

$$\mathcal{F}M: 0 \subset U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_p = M,$$

где $U_0 = \langle S_{d_0} \rangle$, $U_1 = \langle S_{d_0}, S_{d_1} \rangle$, $\dots$, $U_p = \langle S_{d_0}, S_{d_1}, \dots, S_{d_p} \rangle$. В таком случае M является слабо λ -кошулевым модулем тогда и только тогда, когда все факторы U_i/U_{i-1} являются λ -кошулевыми модулями при $0 \leq i \leq p$, где мы предполагаем, что $U_{-1} = 0$.

(ii) Пусть A – λ -кошулева алгебра и $M \in \text{gr}(A)$. Если M – слабо λ -кошулев модуль, то $\mathcal{E}(M) := \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(M, \mathbb{F}) \in \text{gr}_0(E(A))$.

Для сильно слабо λ -кошулевых модулей справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 0.5. Пусть A – λ -кошулева алгебра. Справедливы следующие утверждения.

(i) Воспользуемся обозначениями теоремы 0.4 (i). В таком случае M является сильно слабо λ -кошулевым модулем тогда и только тогда, когда все $\langle S_{d_i} \rangle$ являются λ -кошулевыми модулями и M совершенен.

(ii) Пусть M – совершенный градуированный модуль. В таком случае M сильно слабо λ -кошулев тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}(M) \in \text{gr}_0(E(A))$.

Поскольку узнать, является ли градуированная алгебра A λ -кошулевой, можно по ее Ext-алгебре Ионеда, разумно изучить другие аспекты структуры Ext-алгебр Ионеда. Ext-алгебры Ионеда расширенных алгебр имеют структуру A_∞ -алгебр (см. [6] или раздел 4 ниже). Впервые введены A_∞ -алгебры были Сташеффом в 1960-е гг. [9]. С тех пор многочисленные теории, включающие в себя рассматриваемую тему, были открыты в огромном количестве в различных областях математики и физики. В частности, Келлер впервые применил A_∞ -алгебры в теории некоммутативных алгебр и теории представлений ([10]–[13]). Другая вводная статья об A_∞ -алгебрах, связанная с теорией колец, – это статья [14] Лю, Палмиери, Ву и Жанга. По поводу ее применений в теории колец мы отсылаем читателя к [14], [3] и т.д. за подробностями.

Мы покажем, что для λ -кошулевых алгебр их Ext-алгебры Ионеда снабжены следующей A_∞ -структурой.

ТЕОРЕМА 0.6. Пусть A – λ -кошулева алгебра, $\{m_l\}$ – всевозможные A_∞ -структуры на $E(A)$. Если

$$m_l(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_l) \neq 0$$

для некоторых $\alpha_j \in \text{Ext}_A^{2|\lambda|+i_j}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ с $0 \leq i_j \leq 2|\lambda| - 1$, то

$$\delta_\lambda(i_1 + i_2 + \cdots + i_l + 2 - l) = \delta_\lambda(i_1) + \delta_\lambda(i_2) + \cdots + \delta_\lambda(i_l).$$

Во всей статье символы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$ означают множества целых и неотрицательных целых чисел, соответственно, а $\mathbb{F}$ означает произвольное поле.

1. Обозначения, определения и свойства

В этой статье предполагается, что все градуированные $\mathbb{F}$ -алгебры $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ имеют следующие свойства:

- (i) $A_0 = \mathbb{F}$;
- (ii) A порождена степенью 1, т.е. $A_i \cdot A_j = A_{i+j}$ для всех $0 \leq i, j < \infty$;
- (iii) $\dim_{\mathbb{F}} A_i < \infty$ для всех $i \geq 0$.

Градуированный радикал Джекобсона алгебры A , обозначаемый символом J , очевидно равен $\bigoplus_{i \geq 1} A_i$. Нас интересует категория $\text{Gr}(A)$ градуированных A -модулей и ее полная подкатегория $\text{gr}(A)$ конечно порожденных модулей. Морфизмы в этих категориях, обозначаемые символом $\text{Hom}_A(M, N)$, являются A -модульными отображениями степени нуль для градуированных модулей M и N . Обозначим через $\text{Gr}_s(A)$ и $\text{gr}_s(A)$ полные подкатегории $\text{Gr}(A)$ и $\text{gr}(A)$, объекты которых порождены степенью s . Объект категории $\text{Gr}_s(A)$ или $\text{gr}_s(A)$ называется *чистым* A -модулем.

Будучи снабженной произведением Ионеда, прямая сумма

$$\text{Ext}_A^*(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(\mathbb{F}, \mathbb{F})$$

становится ассоциативной градуированной алгеброй, которую мы называем *Ext-алгеброй Ионеда* или *кошулевой двойственной* к алгебре A . Для простоты будем писать $E(A) = \text{Ext}_A^*(\mathbb{F}, \mathbb{F})$. Пусть M – градуированный A -модуль. Мы аналогично вводим сумму

$$\mathcal{E}(M) = \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(M, \mathbb{F}),$$

которая является биградуированным $E(A)$ -модулем, и тоже называем его *кошулевым двойственным* к M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть A – градуированная алгебра, $E(A) = \bigoplus_{i \geq 0} \text{Ext}_A^i(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ – ее Ext-алгебра Ионеда. Назовем сумму $\text{Ext}_A^{\geq 2}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ частью *высших ext-степеней* алгебры $E(A)$. Пусть $h(A)$ – число высших ext-степеней в градуированном порождающем пространстве Ext-алгебры Ионеда $E(A)$. Иначе говоря, если V – градуированное порождающее пространство $E(A)$, то

$$h(A) = \#\{d \geq 2 \mid \text{Ext}_A^d(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Дадим теперь определение нашего нового объекта, а именно, λ -кошулевых алгебр.

Пусть $\lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – периодическая функция; пусть $|\lambda|$ – ее наименьший период. Предположим, что $\lambda(1) \geq 2$ и что λ строго возрастает на интервале $[1, |\lambda|]$. Введем функцию

$$\delta_\lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

со следующими свойствами:

- (а) $\delta_\lambda(0) = 0$, $\delta_\lambda(1) = 1$, $\delta_\lambda(2) = d$, где $d = \lambda(1) + 1$ – некоторое фиксированное целое;
- (b) $\delta_\lambda(2n + 1) - \delta_\lambda(2n) = 1$ для всех $n \geq 0$;
- (с) $\delta_\lambda(2n) - \delta_\lambda(2n - 1) = \lambda(n)$ для всех $n \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $M \in \text{gr}(A)$. В таком случае M называется λ -кошулевым модулем, если M допускает такую минимальную градуированную проективную резольвенту

$$\mathbf{P}: \cdots \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M[s] \rightarrow 0,$$

что каждый модуль P_n порожден степенью $\delta_\lambda(n)$ для всех $n \geq 0$, где $[\cdot]$ – функтор сдвига и s целое. Градуированная алгебра $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ называется λ -кошулевой алгеброй, если тривиальный A -модуль $\mathbb{F}$ является λ -кошулевым модулем.

Пусть $\mathcal{K}_\lambda^d(A)$ обозначает категорию λ -кошулевых модулей.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. (а) Пусть A – λ -кошулева алгебра. Число скачков степеней алгебры A – это период $|\lambda|$ функции λ ; он обозначается символом $\|A\|$.

(b) В частности, если $|\lambda| = 2$ и λ определяется правилом $\lambda(1) = d - 1$ и $\lambda(2) = s + d - 1$ для целых $d \geq 3$ и $s > 0$, то можно взять δ_λ в качестве δ_d^s , и функция δ_d^s может быть выписана явно,

$$\delta_d^s(n) = \begin{cases} \frac{nd}{2} + \frac{ns}{4}, & \text{если } n \equiv 0(4), \\ \frac{(n-1)d}{2} + \frac{(n-1)s}{4} + 1, & \text{если } n \equiv 1(4), \\ \frac{(n)d}{2} + \frac{(n-2)s}{4}, & \text{если } n \equiv 2(4), \\ \frac{(n-1)d}{2} + \frac{(n-3)s}{4} + 1, & \text{если } n \equiv 3(4). \end{cases}$$

ПРИМЕР 1.3. Классические d -кошулевы алгебры образуют специальный класс λ -кошулевых алгебр с $|\lambda| = 1$.

Следующее утверждение дает эквивалентное описание λ -кошулевых алгебр в терминах их минимальных градуированных проективных резольвент, что позволяет придать смысл этому понятию в неградуированном случае.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть A – градуированная алгебра и

$$\mathbf{P}: \cdots \rightarrow P_n \xrightarrow{f_n} \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} \mathbb{F} \rightarrow 0$$

– минимальная градуированная проективная резольвента тривиального A -модуля $\mathbb{F}$. В таком случае A является λ -кошулевой алгеброй с $\|A\| = T \geq 1$ тогда и только тогда, когда существует такое целое $T \geq 1$, что

1) *при $i \equiv 2n \pmod{2T}$, $n \in [0, T-1]$ имеем*

$$\ker f_i \subseteq JP_i, \quad J \ker f_i = J^2 P_i \cap \ker f_i;$$

2) *при $i \equiv 2n-1 \pmod{2T}$, $n \in [1, T]$, имеем*

$$\ker f_i \subseteq J^{\lambda(n)} P_i, \quad J \ker f_i = J^{\lambda(n)+1} P_i \cap \ker f_i.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать теорему при $T = 2$, потому что остальные случаи могут быть доказаны несложной индукцией. При $T = 2$ можно переформулировать теорему следующим образом: *А является λ -кошулевой алгеброй с $\|A\| = 2$ тогда и только тогда, когда*

1) *при $i \equiv 0 \pmod{4}$ или $i \equiv 2 \pmod{4}$ имеем*

$$\ker f_i \subseteq JP_i, \quad J \ker f_i = J^2 P_i \cap \ker f_i;$$

2) *при $i \equiv 1 \pmod{4}$ имеем*

$$\ker f_i \subseteq J^{d-1} P_i, \quad J \ker f_i = J^d P_i \cap \ker f_i;$$

3) *при $i \equiv 3 \pmod{4}$ имеем*

$$\ker f_i \subseteq J^{d+s-1} P_i, \quad J \ker f_i = J^{d+s} P_i \cap \ker f_i.$$

($\Leftarrow$) Очевидно.

($\Rightarrow$) Предположим, что A – λ -кошулева алгебра с минимальной резольвентой. Тогда P_i порождена степенью $\delta_d^s(i)$ для всех $i \geq 0$. Если $i \equiv 0 \pmod{4}$ или $i \equiv 2 \pmod{4}$, то можно проверить, что $\ker f_i \subseteq JP_i$ и $J \ker f_i = J^2 P_i \cap \ker f_i$, аналогично рассуждению в предложении 3.1 в [7]. Важными являются другие случаи.

Предположим, что $i = 4k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как

$$P_{i+1} \rightarrow \ker f_i \rightarrow 0$$

– градуированное проективное накрытие и P_{i+1} порожден степенью

$$\delta_d^s(i+1) = \delta_d^s(4k+2) = \frac{(4k+2)d}{2} + \frac{(4k+2-2)s}{4} = (2k+1)d + ks,$$

таким образом, ядро $\ker f_i$ порождено степенью $(2k+1)d + ks$. Заметим, что P_i порожден степенью

$$\delta_d^s(i) = \delta_d^s(4k+1) = \frac{(4k+1-1)d}{2} + \frac{(4k+1-1)s}{4} + 1 = 2kd + ks + 1.$$

Следовательно, $\ker f_i \subseteq J^{d-1} P_i$ и $J \ker f_i \subseteq J^d P_i \cap \ker f_i$, поскольку P_i порожден степенью $\delta_d^s(i)$. Пусть теперь $y \in J^d P_i \cap \ker f_i$ – однородный элемент. Так как степень y выше, чем $\delta_d^s(i+1) + 1$, то $y \in J \ker f_i$.

Предположим, что $i = 4k+3$, $k \in \mathbb{Z}$. Аналогичным образом, ядро $\ker f_i$ порождено степенью

$$\delta_d^s(i+1) = \delta_d^s(4k+4) = \frac{(4k+4)d}{2} + \frac{(4k+4-4)s}{4} = 2kd + 2d + ks$$

и P_i порожден степенью

$$\delta_d^s(i) = \delta_d^s(4k+3) = \frac{(4k+3-1)d}{2} + \frac{(4k+3-3)s}{4} + 1 = (2k+1)d + ks + 1.$$

Оставшаяся часть доказательства протекает так же, как в случае $i = 4k+1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Это завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Для λ -кошулевых модулей есть аналогичные эквивалентные описания. Пусть A – λ -кошулева алгебра с $\|A\| = T \geq 1$. При $M \in \text{gr}_l(A)$ предположим, что

$$\mathbf{P}: \dots \rightarrow P_n \xrightarrow{f_n} \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0$$

– минимальная градуированная проективная резольвента M . В этом случае M является λ -кошулевым модулем тогда и только тогда, когда

1) при $i \equiv 2n \pmod{2T}$, $n \in [0, T-1]$, имеем

$$\ker f_i \subseteq JP_i, \quad J \ker f_i = J^2 P_i \cap \ker f_i;$$

2) при $i \equiv 2n-1 \pmod{2T}$, $n \in [1, T]$, имеем

$$\ker f_i \subseteq J^{\lambda(n)} P_i, \quad J \ker f_i = J^{\lambda(n)+1} P_i \cap \ker f_i.$$

Замечание 1.2 является мотивацией для введения так называемых *слабо λ -кошулевых модулей*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пусть A – λ -кошулева алгебра с $\|A\| = T \geq 1$. Скажем, что $M \in \text{gr}(A)$ – *слабо λ -кошулев модуль*, если существует такая минимальная градуированная проективная резольвента модуля M ,

$$\dots \rightarrow P_i \xrightarrow{f_i} \dots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

что при $i, k \geq 0$ выполняются следующие условия:

1) при $i \equiv 2n \pmod{2T}$, $n \in [0, T-1]$, имеем

$$\ker f_i \subseteq JP_i, \quad J^k \ker f_i = J^{k+1} P_i \cap \ker f_i;$$

2) при $i \equiv 2n-1 \pmod{2T}$, $n \in [1, T]$, имеем

$$\ker f_i \subseteq J^{\lambda(n)} P_i, \quad J^k \ker f_i = J^{\lambda(n)+k} P_i \cap \ker f_i.$$

Пусть $\mathcal{WK}_\lambda^d(A)$ означает категорию слабо λ -кошулевых модулей.

ПРИМЕР 1.6. Пусть Γ – колчан

Пусть $A = \mathbb{F}\Gamma/(u_1 u_2 u_3)$. Тогда A – λ -кошулева алгебра с $\|A\| = 1$. Пусть $e_1, \dots, e_5$ – идемпотенты A , соответствующие вершинам. Пусть $V = \mathbb{F}v_0 \oplus \mathbb{F}v_1$ – градуированное

векторное пространство с базисом v_0, v_1 . Предположим, что степень v_0 равна 0, а степень v_1 равна 1. Определим $\mathbb{F}$ -модульное действие на V следующим образом: $e_4 \cdot v_0 = v_0$ и $e_i \cdot v_0 = 0$ при $i \neq 4$; $e_5 \cdot v_1 = v_1$ и $e_i \cdot v_1 = 0$ при $i \neq 5$. Пусть

$$M = \frac{A \otimes_{\mathbb{F}} V}{\langle u_2 \otimes_{\mathbb{F}} u_3 \otimes_{\mathbb{F}} v_0 - u_4 \otimes_{\mathbb{F}} v_1 \rangle}.$$

Теперь нетрудно проверить, что M – слабо λ -кошулев модуль.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Пусть $M \in \text{gr}(A)$. Тогда можно найти такое множество $S^M = \{S_{k_0}, S_{k_1}, \dots, S_{k_s}\}$, образованное $\mathbb{F}$ -подмодулями M , что

- (a) $k_0 < k_1 < \dots < k_s$;
- (b) каждый подмодуль S_{k_i} сосредоточен в степени k_i ;
- (c) $M/JM = S_{k_0} \oplus S_{k_1} \oplus \dots \oplus S_{k_s}$ как градуированные $\mathbb{F}$ -модули.

Подмодули $\langle S_{k_i} \rangle$ называются *градуированными чистыми подмодулями* (GP-подмодулями) модуля M .

Если M – прямая сумма своих GP-подмодулей, т.е.

$$M = \langle S_{k_0} \rangle \oplus \langle S_{k_1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle S_{k_s} \rangle,$$

мы называем M *совершенным* модулем. *Сильно слабо λ -кошулев модуль* – это модуль, который одновременно совершенен и слабо λ -кошулев. Нетрудно видеть, что любой чистый градуированный модуль совершенен и любой λ -кошулев модуль – сильно слабо кусочно-кошулев модуль.

Ни здесь, ни в дальнейшем понятие кусочно-кошулева модуля не вводится.

Обозначим категории совершенных градуированных модулей и сильно слабо λ -кошулевых модулей символами $\mathcal{P}(A)$ и $\mathcal{SWK}_{\lambda}^d(A)$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Пусть $M \in \text{gr}(A)$. Воспользуемся теми же обозначениями, что и в определении 1.7. Тогда справедливы следующие равносильные утверждения:

- 1) $M \in \mathcal{P}(A)$;
- 2) $\langle S_{k_0}, S_{k_1}, \dots, S_{k_i} \rangle \in \mathcal{P}(A)$, где $0 \leq i \leq s$;
- 3) $\langle S_{k_i} \rangle = \langle S_{k_j}, S_{k_{j+1}}, \dots, S_{k_i}, \dots \rangle / \langle S_{k_j}, S_{k_{j+1}}, \dots, \hat{S}_{k_i}, \dots \rangle$, где $\hat{S}_{k_i}$ означает, что S_{k_i} должен быть исключен.

2. λ -кошулевы алгебры и модули

2.1. Об Ext-алгебре Ионеда $E(A)$. Следующая теорема является основным результатом этого раздела.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть A – градуированная алгебра и $E(A)$ – ее Ext-алгебра Ионеда. Пусть $\lambda: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – периодическая функция, введенная в разделе 1. В этом случае A является λ -кошулевой алгеброй тогда и только тогда, когда

- 1) $E(A)$ минимально порождена в ext-степенях $1, 2, 4, 2k, \dots, 2|\lambda|$;
- 2) $\text{Ext}_A^{2k}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \text{Ext}_A^{2k}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{\delta_{\lambda}(2k)}$, где $k = 1, 2, \dots, |\lambda|$.

Кроме того, мы доказываем, что $h(A) = \|A\|$, где A – λ -кошулева алгебра.

ЛЕММА 2.2 [5]. Пусть A – градуированная $\mathbb{F}$ -алгебра. Предположим, что $\mathbf{P}$ – минимальная градуированная проективная резольвента тривиального A -модуля $\mathbb{F}$

и P_n конечно порожден с порождающими степени $f(n)$, где $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ – функция. Предположим, что $f(i+j) = f(i) + f(j)$. Тогда отображение Ионеды

$$\text{Ext}_A^i(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \otimes_{\mathbb{F}} \text{Ext}_A^j(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \rightarrow \text{Ext}_A^{i+j}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$$

сюръективно. Кроме того,

$$\text{Ext}_A^{i+j}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \text{Ext}_A^i(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \text{Ext}_A^j(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \text{Ext}_A^j(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \text{Ext}_A^i(\mathbb{F}, \mathbb{F}).$$

ЛЕММА 2.3. Пусть δ_λ и λ определены так же, как и выше. Тогда $\delta_\lambda(n+2k|\lambda|) = \delta_\lambda(n) + \delta_\lambda(2k|\lambda|)$ для всех $k, n \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что $\delta_\lambda(n+2|\lambda|) = \delta_\lambda(n) + \delta_\lambda(2|\lambda|)$. Пусть $n = 2k$. Нужно доказать, что $\delta_\lambda(2k+2|\lambda|) = \delta_\lambda(2k) + \delta_\lambda(2|\lambda|)$. По предположению, $\lambda(k+|\lambda|) = \lambda(k)$ и

$$\delta_\lambda(2k+2|\lambda|) - \delta_\lambda(2k) = \lambda(k+1) + \lambda(k+2) + \cdots + \lambda(k+|\lambda|) + |\lambda|.$$

Для завершения доказательства нужно показать, что

$$\delta_\lambda(2|\lambda|) = \lambda(k+1) + \lambda(k+2) + \cdots + \lambda(k+|\lambda|) + |\lambda|.$$

По предположению

$$\delta_\lambda(2|\lambda|) - \delta_\lambda(0) = \lambda(1) + \lambda(2) + \cdots + \lambda(|\lambda|) + |\lambda|.$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{|\lambda|} \lambda(i) = \sum_{i=1}^{|\lambda|} \lambda(k+i),$$

где k – фиксированное целое.

Если $n = 2k+1$, то

$$\delta_\lambda(2k+1+2|\lambda|) = \delta_\lambda(2k+2|\lambda|) + 1 = \delta_\lambda(2k) + \delta_\lambda(2|\lambda|) + 1 = \delta_\lambda(2k+1) + \delta_\lambda(2|\lambda|).$$

Это завершает доказательство.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Имеем $\delta_d^s(n+4k) = \delta_d^s(n) + \delta_d^s(4k)$ для всех $k \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это сразу следует из леммы 2.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть A – λ -кошулева алгебра, связанная с δ_d^s , и пусть $E(A)$ – ее Ext-алгебра Ионеды. Тогда $E(A)$ имеет следующие свойства:

- 1) $\text{Ext}_A^{4k_1+1}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \text{Ext}_A^{4k_2+1}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = 0$ для всех $k_1, k_2 \geq 0$;
- 2) $\text{Ext}_A^{4k_1+1}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \text{Ext}_A^{4k_2+3}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = 0$ для всех $k_1, k_2 \geq 0$;
- 3) $\text{Ext}_A^{4k_1+2}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \text{Ext}_A^{4k_2+2}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = 0$ для всех $k_1, k_2 \geq 0$;
- 4) $\text{Ext}_A^{4k_1+2}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \text{Ext}_A^{4k_2+3}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = 0$ для всех $k_1, k_2 \geq 0$;
- 5) $\text{Ext}_A^{4k_1+3}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \text{Ext}_A^{4k_2+3}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = 0$ для всех $k_1, k_2 \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем только утверждение 1), поскольку остальные доказательства аналогичны:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^{4k_1+1}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \text{Ext}_A^{4k_2+1}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) &= \text{Ext}_A^{4k_1+1}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{2k_1d+k_1s+1} \cdot \text{Ext}_A^{4k_2+1}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{2k_2d+k_2s+1} \\ &\subset \text{Ext}_A^{4k_1+4k_2+2}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{2k_1d+2k_2d+k_1s+k_2s+2}. \end{aligned}$$

Однако

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_A^{4k_1+4k_2+2}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) &= \mathrm{Ext}_A^{4k_1+4k_2+2}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{[2(k_1+k_2)+1]d+(k_1+k_2)s} \\ &= \mathrm{Ext}_A^{4k_1+4k_2+2}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{2k_1d+2k_2d+k_1s+k_2s+d}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathrm{Ext}_A^{4k_1+1}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \mathrm{Ext}_A^{4k_2+1}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = 0$, поскольку $d \geq 3$.

Теперь мы можем доказать теорему 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Мы докажем теорему только в случае $|\lambda| = 2$, потому что доказательство в других случаях аналогично. Если $|\lambda| = 2$, то δ_λ то же, что и δ_d^s .

Сначала докажем свойство “минимальности”. Таким образом, нужно доказать, что

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_A^1(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \mathrm{Ext}_A^1(\mathbb{F}, \mathbb{F}) &= 0, \\ \mathrm{Ext}_A^1(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \mathrm{Ext}_A^3(\mathbb{F}, \mathbb{F}) &= \mathrm{Ext}_A^3(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \mathrm{Ext}_A^1(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = 0, \\ \mathrm{Ext}_A^2(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \mathrm{Ext}_A^2(\mathbb{F}, \mathbb{F}) &= 0,\end{aligned}$$

что очевидно следует из предложения 2.5.

Предположим, что A – λ -кошулева алгебра с $|\lambda| = 2$. Утверждение 2) очевидно. Легко видеть, что

$$\mathrm{Ext}_A^3(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \mathrm{Ext}_A^1(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \mathrm{Ext}_A^2(\mathbb{F}, \mathbb{F}),$$

поскольку $\delta_d^s(3) = \delta_d^s(1) + \delta_d^s(2)$ по лемме 2.2. Предположим, что утверждение справедливо для чисел, меньших n , где $n \geq 4$. Рассмотрим теперь случай числа n . По следствию 2.4 $\delta_d^s(n) = \delta_d^s(n-4) + \delta_d^s(4)$. По лемме 2.2 имеем

$$\mathrm{Ext}_A^n(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \mathrm{Ext}_A^4(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \mathrm{Ext}_A^{n-4}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$$

по предположению индукции, что завершает доказательство.

Обратно, легко видеть, что $\mathrm{Ext}_A^i(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \mathrm{Ext}_A^i(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{\delta_d^s(i)}$ при $0 \leq i \leq 4$. Рассмотрим теперь $\mathrm{Ext}_A^5(\mathbb{F}, \mathbb{F})$. По предложению 2.5

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_A^5(\mathbb{F}, \mathbb{F}) &= \mathrm{Ext}_A^1(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \mathrm{Ext}_A^4(\mathbb{F}, \mathbb{F}) + \mathrm{Ext}_A^4(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \mathrm{Ext}_A^1(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \\ &= \mathrm{Ext}_A^1(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{\delta_d^s(1)} \cdot \mathrm{Ext}_A^4(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{\delta_d^s(4)} + \mathrm{Ext}_A^4(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{\delta_d^s(4)} \cdot \mathrm{Ext}_A^1(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{\delta_d^s(1)},\end{aligned}$$

откуда $\mathrm{Ext}_A^5(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \mathrm{Ext}_A^5(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{\delta_d^s(5)}$.

Для $\mathrm{Ext}_A^6(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ по предложению 2.5

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_A^6(\mathbb{F}, \mathbb{F}) &= \mathrm{Ext}_A^2(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \mathrm{Ext}_A^4(\mathbb{F}, \mathbb{F}) + \mathrm{Ext}_A^4(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cdot \mathrm{Ext}_A^2(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \\ &= \mathrm{Ext}_A^2(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{\delta_d^s(2)} \cdot \mathrm{Ext}_A^4(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{\delta_d^s(4)} + \mathrm{Ext}_A^4(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{\delta_d^s(4)} \cdot \mathrm{Ext}_A^2(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{\delta_d^s(2)},\end{aligned}$$

откуда $\mathrm{Ext}_A^6(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \mathrm{Ext}_A^6(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{\delta_d^s(6)}$. По индукции

$$\mathrm{Ext}_A^n(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \mathrm{Ext}_A^n(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{\delta_d^s(n)}$$

для всех $n \geq 5$. Это завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. λ -кошулевы алгебры принадлежат семейству “ δ -кошулевых алгебр”, введенных Грином и Маркосом в [15]. Сформулируем третий вопрос из статьи [15]: *существует ли такое $N \in \mathbb{N}$, что Ext-алгебры Ионеда всех δ -кошулевых алгебр порождены степенями $1, 2, \dots, N$?*

По теореме 2.1 λ -кошулевы алгебры дают отрицательный ответ на вопрос, поскольку можно построить λ -кошулеву алгебру для $|\lambda| > N$.

ТЕОРЕМА 2.6. *Пусть A – λ -кошулева алгебра и $E(A)$ – ее Ext-алгебра Ионеда. Тогда $\|A\| = h(A)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.1

$$\|A\| = \#\{\lambda(1), \lambda(2), \dots, \lambda(|\lambda|)\} = |\lambda| = h(A).$$

2.2. Некоторые основные свойства λ -кошулевых модулей. Напомним, что символ $\mathcal{K}_\lambda^d(A)$ означает категорию λ -кошулевых модулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *Пусть A – λ -кошулева алгебра и M – такой конечно порожденный градуированный A -модуль, что он порожден степенью нуль. В этом случае $M \in \mathcal{K}_\lambda^d(A)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}(M)$ порожден степенью нуль как градуированный $E(A)$ -модуль.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это простое следствие предложения 3.5 в [5].

Следующее предложение показывает, что категория $\mathcal{K}_\lambda^d(A)$ замкнута относительно расширений и относительно взятия коядер мономорфизмов. Мы опускаем доказательства, поскольку они очевидны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. *Пусть*

$$0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

– короткая точная последовательность в категории конечно порожденных градуированных A -модулей, где A – λ -кошулева алгебра. Тогда

- 1) если K и N – объекты $\mathcal{K}_\lambda^d(A)$, то и $M \in \mathcal{K}_\lambda^d(A)$;
- 2) если K и M – объекты $\mathcal{K}_\lambda^d(A)$, то и $M/K \cong N \in \mathcal{K}_\lambda^d(A)$.

ЛЕММА 2.9. *Пусть A – λ -кошулева алгебра с $\|A\| = |\lambda|$ и M – λ -кошулев модуль. Пусть $J = \bigoplus_{i \geq 1} A_i$ – градуированный радикал Джекобсона алгебры A . Тогда последовательности*

$$0 \rightarrow \Omega^n(M) \rightarrow \Omega^n(M/JM) \rightarrow \Omega^{n-1}(JM) \rightarrow 0$$

точны для всех $n \geq 1$. Все модули в этих точных последовательностях порождены степенью $\delta_\lambda(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow JM \rightarrow M \rightarrow M/JM \rightarrow 0$$

и коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^1(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M/JM) & \longrightarrow & JM \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Q_0^M & \xrightarrow{=} & Q_0^M & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & JM & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/JM \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

где Q_0^M – градуированное проективное накрытие M и M/JM . По индукции это завершает доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. Пусть A – λ -кошулева алгебра с $\|A\| = T$ и $M \in \mathcal{K}_\lambda^d(A)$. Тогда

- 1) все $(2kT)^e$ сизигии $\Omega^{2kT}(M)[- \delta_\lambda(2kT)]$ лежат в $\mathcal{K}_\lambda^d(A)$;
- 2) все $(2kT - 1)^e$ сизигии $\Omega^{2kT-1}(JM)[- \delta_\lambda(2kT)]$ лежат в $\mathcal{K}_\lambda^d(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем 1). По предположению $M \in \mathcal{K}_\lambda^d(A)$, и M допускает минимальную градуированную проективную резольвенту

$$Q: \cdots \rightarrow Q_n \xrightarrow{f_n} \cdots \rightarrow Q_1 \xrightarrow{f_1} Q_0 \xrightarrow{f_0} M \rightarrow 0,$$

в которой любой Q_n порожден степенью $\delta_\lambda(n)$, что приводит к минимальной градуированной проективной резольвенте сизигии $\Omega^{2kT}(M)[- \delta_\lambda(2kT)]$, а именно,

$$Q: \cdots \rightarrow Q_{2kT+1}[- \delta_\lambda(2kT)] \xrightarrow{f_{2kT+1}} Q_{2kT}[- \delta_\lambda(2kT)] \xrightarrow{f_{2kT}} \Omega^{2kT}(M)[- \delta_\lambda(2kT)] \rightarrow 0.$$

По определению $\Omega^{2kT}(M)[- \delta_\lambda(2kT)] \in \mathcal{K}_\lambda^d(A)$.

Для доказательства утверждения 2) по лемме 2.9 имеем следующую точную последовательность:

$$0 \rightarrow \Omega^{2kT}(M)[- \delta_\lambda(2kT)] \rightarrow \Omega^{2kT}(M/JM)[- \delta_\lambda(2kT)] \rightarrow \Omega^{2kT-1}(JM)[- \delta_\lambda(2kT)] \rightarrow 0,$$

все градуированные модули в этой точной последовательности порождены степенью нуль. По 1) $\Omega^{2kT}(M)[- \delta_\lambda(2kT)] \in \mathcal{K}_\lambda^d(A)$ и, очевидно, $\Omega^{2kT}(M/JM)[- \delta_\lambda(2kT)] \in \mathcal{K}_\lambda^d(A)$. По предложению 2.8 $\Omega^{2kT-1}(JM)[- \delta_\lambda(2kT)] \in \mathcal{K}_\lambda^d(A)$.

3. λ -кошулевость конечно порожденных градуированных модулей

3.1. Слабо λ -кошулевы модули. В этом разделе символ A обозначает λ -кошулеву алгебру.

ЛЕММА 3.1. Пусть

$$0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

– точная последовательность в $\text{gr}(A)$. Справедливы следующие утверждения:

- 1) если K и M – слабо λ -кошулевы модули с $J^k K = K \cap J^k M$ для всех $k \geq 0$, то N – слабо λ -кошулев модуль;
- 2) если K и N – слабо λ -кошулевы модули с $JK = K \cap JM$, то M – слабо λ -кошулев модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем только утверждение 1), поскольку 2) доказывается аналогично.

По предположению имеет место следующая коммутативная диаграмма, поскольку $J^k K = K \cap J^k M$ для всех $k \geq 0$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^1(K) & \longrightarrow & \Omega^1(M) & \longrightarrow & \Omega^1(N) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & P_0^K & \longrightarrow & P_0^M & \longrightarrow & P_0^N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

где P_0^K , P_0^M и P_0^N – градуированные проективные накрытия K , M и N соответственно. С помощью рассуждения, сходного с рассуждением в [7], можно получить следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^2(K) & \longrightarrow & \Omega^2(M) & \longrightarrow & \Omega^2(N) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & J^{\lambda(1)} P_1^K & \longrightarrow & J^{\lambda(1)} P_1^M & \longrightarrow & J^{\lambda(1)} P_1^N \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & J^{\lambda(1)} \Omega^1(K) & \longrightarrow & J^{\lambda(1)} \Omega^1(M) & \longrightarrow & J^{\lambda(1)} \Omega^1(N) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

Тензорно умножая предыдущую диаграмму с помощью функтора $A/J^k \otimes_A \cdot$, видим, что морфизм

$$A/J^k \otimes_A J^{\lambda(1)} \Omega^1(K) \rightarrow A/J^k \otimes_A J^{\lambda(1)} \Omega^1(M)$$

является мономорфизмом, поскольку

$$\begin{aligned} J^{k+\lambda(1)}\Omega^1(M) \cap J^{\lambda(1)}\Omega^1(K) &= J^{k+\lambda(1)}\Omega^1(M) \cap J^{\lambda(1)}\Omega^1(K) \cap \Omega^1(K) \\ &= J^{k+\lambda(1)}\Omega^1(K) \cap J^{\lambda(1)}\Omega^1(K) \\ &= J^{k+\lambda(1)}\Omega^1(K). \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место следующая коммутативная диаграмма с точными строками и столбцами:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & A/J^k \otimes_A \Omega^2(K) & \longrightarrow & A/J^k \otimes_A \Omega^2(M) & \longrightarrow & A/J^k \otimes_A \Omega^2(N) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & A/J^k \otimes_A J^{\lambda(1)}P_1^K & \longrightarrow & A/J^k \otimes_A J^{\lambda(1)}P_1^M & \longrightarrow & A/J^k \otimes_A J^{\lambda(1)}P_1^N & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & A/J^k \otimes_A J^{\lambda(1)}\Omega^1(K) & \longrightarrow & A/J^k \otimes_A J^{\lambda(1)}\Omega^1(M) & \longrightarrow & A/J^k \otimes_A J^{\lambda(1)}\Omega^1(N) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

Но

$$A/J^k \otimes_A \Omega^2(K) \rightarrow A/J^k \otimes_A \Omega^2(M)$$

– мономорфизм. Следовательно,

$$J^k\Omega^2(K) = \Omega^2(K) \cap J^k\Omega^2(M)$$

для всех $k \geq 0$. По 3×3 -лемме

$$A/J^k \otimes_A \Omega^2(N) \rightarrow A/J^k \otimes_A J^{\lambda(1)}P_1^N$$

– мономорфизм. Следовательно,

$$J^k\Omega^2(N) = \Omega^2(N) \cap J^{k+\lambda(1)}P_1^N.$$

Повторяя приведенное выше рассуждение, видим, что N – слабо λ -кошулев модуль, что завершает доказательство.

ЛЕММА 3.2. Пусть $M = \bigoplus_{i \geq 0} M_i \in \mathcal{KK}_\lambda^d(A)$ с $M_0 \neq 0$. Положим $K_M = \langle M_0 \rangle$. Тогда

- 1) K_M – λ -кошулев модуль;
- 2) $K_M \cap J^k M = J^k K_M$ для любого $k \geq 0$;
- 3) M/K_M – слабо λ -кошулев модуль.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем первое утверждение леммы по индукции. Пусть

$$\cdots \rightarrow Q_n \rightarrow \cdots \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow K_M \rightarrow 0$$

– минимальная градуированная проективная резольвента K_M . Нам нужно показать, что каждый модуль Q_i порожден степенью $\delta_\lambda(i)$. Как и в доказательстве теоремы 2.4 в [8], имеем следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^2(K_M) & \longrightarrow & P_1^1 & \longrightarrow & \Omega^1(K_M) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow i & & \downarrow j \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^2(M) & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & \Omega^1(M) \longrightarrow 0 \end{array}$$

где i и j – естественные вложения.

Мы утверждаем, что $\langle \Omega^2(M)_d \rangle = \Omega^2(K_M)$. Действительно, $\Omega^2(M) \subseteq J^{\lambda(1)}P_1$, поскольку M слабо λ -кошулев. Таким образом, получаем следующую точную последовательность:

$$0 \rightarrow \Omega^2(M) \rightarrow J^{\lambda(1)}P_1 \rightarrow J^{\lambda(1)}\Omega^1(M) \rightarrow 0.$$

Так как

$$\Omega^2(M) \cap J^k(J^{\lambda(1)}P_1) = \Omega^2(M) \cap J^{k+\lambda(1)}P_1 = J^k\Omega^2(M),$$

то

$$\langle \Omega^2(M)_d \rangle = \Omega^2(M) \cap \langle (J^{\lambda(1)}P_1)_d \rangle = \Omega^2(M) \cap \langle (J^{\lambda(1)}P_1^1)_d \rangle.$$

Имеем

$$\Omega^2(M) \cap \langle (J^{\lambda(1)}P_1^1)_d \rangle = \Omega^2(M) \cap P_1^1 = \Omega^2(K_M),$$

поскольку P_1^1 порождена степенью 1. Следовательно, $\Omega^2(K_M) = \langle \Omega^2(M)_d \rangle$ порождена степенью d . Следовательно, Q_2 порождена степенью $d = \delta_\lambda(2)$. По индукции мы можем получить следующие уравнения для всех $i \geq 2$:

$$\langle \Omega^i(M)_{\delta_\lambda(i)} \rangle = \Omega^i(K_M).$$

С помощью индукции и леммы 3.1 доказательство легко завершить.

Мы можем теперь доказать теорему 0.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.4. (i) Предположим, что M – слабо λ -кошулев модуль. Если $p = 0$, то теорема тривиальна. Предположим теперь, что $p \geq 1$. Применяя лемму 3.2 (сдвигом степени), получаем, что U_0 – λ -кошулев модуль, и что $U_0 \cap J^k M = J^k U_0$ для всех $k \geq 0$. Пусть $W = M/U_0$. По лемме 3.1 W – слабо λ -кошулев модуль. Ясно, что носитель W расположен в степенях, не меньших d_1 . Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow K_W \rightarrow W \rightarrow W/K_W \rightarrow 0,$$

где $K_W = \langle W_{d_1} \rangle = U_1/U_0$. Снова применяя лемму 3.2, получаем, что K_W – λ -кошулев модуль и $K_W \cap J^k M = J^k K_W$ для всех $k \geq 0$. Повторяя это рассуждение, получаем, что все факторы U_i/U_{i-1} являются λ -кошулевыми модулями для $0 \leq i \leq p$.

Обратно, рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow U_0 \rightarrow U_1 \rightarrow U_1/U_0 \rightarrow 0.$$

Очевидно, $JU_0 = U_0 \cap JU_1$. Так как U_0 и U_1/U_0 являются λ -кошулевыми модулями, получаем, что U_1 – слабо λ -кошулев модуль по лемме 3.1. Применяя лемму 3.1 несколько раз, получаем, что M – слабо λ -кошулев модуль, поскольку $JU_i = U_0 \cap JU_{i+1}$ для всех $0 \leq i \leq p$.

(ii) Предположим, что порождающие модуля M лежат в слагаемых со степенями $k_0 < k_1 < \dots < k_p$. Проведем рассуждение по индукции. Если $p = 0$, то M чистый и притом M – λ -кошулев модуль. Тогда $\mathcal{E}(M) \in \text{gr}(E(A))$ по предложению 2.10. Предположим, что утверждение выполняется при числе слагаемых, меньшем p . Так как M – слабо λ -кошулев модуль, M допускает такую цепочку подмодулей

$$0 \subset U_0 \subset U_1 \subset \dots \subset U_p = M,$$

что все факторы U_i/U_{i-1} являются λ -кошулевыми модулями. Рассмотрим следующую точную последовательность:

$$0 \rightarrow U_0 \rightarrow M \rightarrow M/U_0 \rightarrow 0.$$

Из доказательства леммы 3.1 мы получаем следующую точную последовательность для всех $n \geq 0$:

$$0 \rightarrow \Omega^n(U_0) \rightarrow \Omega^n(M) \rightarrow \Omega^n(M/U_0) \rightarrow 0,$$

откуда получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{E}(M/U_0) \rightarrow \mathcal{E}(M) \rightarrow \mathcal{E}(U_0) \rightarrow 0.$$

Очевидно, что $\mathcal{E}(U_0) \in \text{gr}(E(A))$, и число порождающих пространств для M/U_0 меньше p . По предположению индукции $\mathcal{E}(M/U_0) \in \text{gr}(E(A))$. Поэтому $\mathcal{E}(M) \in \text{gr}(E(A))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 0.5. (i) Доказывается повторением доказательства теоремы 0.4 (i).

(ii) Согласно доказательству теоремы 0.4, (ii), если $M \in \mathcal{P}(A)$ – сильно кусочно-кошулев модуль, то

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M) &= \bigoplus_{n \geq 0} \text{Ext}_A^n(\langle S_{d_0}, S_{d_1}, \dots, S_{d_p} \rangle, \mathbb{F}) \\ &= \bigoplus_{n \geq 0} \text{Ext}_A^n(\langle S_{d_0} \rangle \oplus \langle S_{d_1} \rangle \oplus \dots \oplus \langle S_{d_p} \rangle, \mathbb{F}) \\ &= \bigoplus_{n \geq 0} (\text{Ext}_A^n(\langle S_{d_0} \rangle, \mathbb{F}) \oplus \text{Ext}_A^n(\langle S_{d_1} \rangle, \mathbb{F}) \oplus \dots \oplus \text{Ext}_A^n(\langle S_{d_p} \rangle, \mathbb{F})) \\ &= \left(\bigoplus_{n \geq 0} (\text{Ext}_A^n(\langle S_{d_0} \rangle, \mathbb{F})) \right) \oplus \left(\bigoplus_{n \geq 0} (\text{Ext}_A^n(\langle S_{d_1} \rangle, \mathbb{F})) \right) \oplus \dots \\ &\quad \oplus \left(\bigoplus_{n \geq 0} (\text{Ext}_A^n(\langle S_{d_p} \rangle, \mathbb{F})) \right). \end{aligned}$$

Заметим теперь, что если $M \in \mathcal{P}(A)$, то $M \in \mathcal{S}\mathcal{W}\mathcal{K}_\lambda^d(A)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{E}(\langle S_{d_i} \rangle) \in \text{gr}_0(E(A))$, и доказательство очевидно.

3.2. Построение сильно слабо λ -кошулевым модулей по слабо λ -кошулевым модулям. Напомним сначала определение хорошо известного функтора $\mathbf{G}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть $M = M_i \oplus M_{i+1} \oplus M_{i+2} \oplus \dots$ – градуированный A -модуль с $M_i \neq 0$. Тогда целое число i называется *старшей степенью* M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.4. Пусть $M \in \text{gr}(A)$. Тогда можно градуировать M заново следующим образом:

$$M/JM \oplus JM/J^2M \oplus J^2M/J^3M \oplus \dots \quad (1)$$

Модуль, построенный по формуле (1), обозначается символом $\mathbf{G}(M)$. Это – градуированный $\mathbf{G}(A)$ -модуль относительно градуировки

$$\mathbf{G}(M) = \bigoplus_{i \geq 0} J^i M / J^{i+1} M,$$

где $J^0 = A$. Более точно,

$$(\mathbf{G}(M))_0 = M/JM, \quad (\mathbf{G}(M))_1 = JM/J^2M, \quad \dots$$

Таким образом, $\mathbf{G}$ можно рассматривать как функтор из $\text{gr}(A)$ в $\text{gr}_0(A)$,

$$\mathbf{G}: \text{gr}(A) \rightarrow \text{gr}_0(A)$$

по правилам

$$\mathbf{G}(M) = M/JM \oplus JM/J^2M \oplus J^2M/J^3M \oplus \dots,$$

$$\mathbf{G}(M \xrightarrow{f} N) = \mathbf{G}(M) \xrightarrow{\mathbf{G}(f)} \mathbf{G}(N),$$

где $M, N \in \text{gr}(A)$, $f \in \text{Hom}_A(M, N)$ и $\mathbf{G}(f)(x + J^{i+1}M) = f(x) + J^{i+1}N$ для $x \in J^i M$.

Назовем $\mathbf{G}$ *ассоциированным градуированным функтором* (кратко *$\mathbf{G}$ -функтором*) и $\mathbf{G}(M)$ – *ассоциированным градуированным модулем для M* (кратко *$\mathbf{G}$ -модулем*).

Мы можем аналогично определить алгебру $\mathbf{G}(A)$ для градуированной алгебры A .

Перечислим основные свойства функтора $\mathbf{G}$. Мы опускаем доказательство, поскольку оно носит канонический характер.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть $M \in \text{gr}(A)$. Тогда

- 1) $\mathbf{G}(A) \cong A$ как градуированная $\mathbb{F}$ -алгебра;
- 2) $\mathbf{G}(M) \in \text{gr}_0(\mathbf{G}(A)) = \text{gr}_0(A)$;
- 3) если M чистый, то $\mathbf{G}(M)[i] \cong M$ как градуированный A -модуль для некоторого i ;
- 4) $\mathbf{G}^2 = \mathbf{G}$;
- 5) $\mathbf{G}(J^n M) \cong J^n \mathbf{G}(M)$ для всех $n \geq 0$;
- 6) $M \in \text{gr}(A)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{G}(M) \in \text{gr}(A)$;
- 7) $\mathbf{G}$ сохраняет конечные прямые суммы;
- 8) если $P \in \text{gr}(A)$ – градуированный проективный модуль, то $\mathbf{G}(P)$ – чистый градуированный проективный $\mathbf{G}(A)$ -модуль;
- 9) если $f \in \text{Hom}_A(M, N)$ – эпиморфизм, то $\mathbf{G}(f)$ – тоже эпиморфизм (из $\mathbf{G}(M)$ в $\mathbf{G}(N)$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть $M \in \text{gr}(A)$ порожден степенями $d_0 < d_1 < \dots < d_p$. Тогда существуют такие градуированные чистые A -модули $K_0, K_1, \dots, K_p$, что

- (i) $M \cong \bigoplus_{i=0}^p K_i$ как A_0 -модули;
- (ii) $\mathbf{G}(M) \cong \mathbf{G}(\bigoplus_{i=0}^p K_i)$;
- (iii) $\mathbf{G}(M) \cong \bigoplus_{i=0}^p K_i[-d_i]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению старшая степень M равна d_0 . Пусть $S_{d_0}, S_{d_1}, \dots, S_{d_p}$ – минимальные порождающие пространства для M и каждое S_{d_i} является A_0 -модулем, состоящим из однородных элементов степени d_i , $0 \leq i \leq p$. Пусть $K_0 = \langle S_{d_0} \rangle$, где $\langle S_{d_0} \rangle$ обозначает градуированный A -подмодуль в M , порожденный S_{d_0} . Пусть

$$K_1 = \langle (M/\langle S_{d_0} \rangle)_{d_1} \rangle, \quad K_2 = \langle ((M/\langle S_{d_0} \rangle)/K_1)_{d_2} \rangle, \quad \dots$$

Теперь легко видеть, что каждый K_i является градуированным чистым модулем, порожденным степенями d_i . Из построения каждого K_i ясно, что утверждения (i), (ii) и (iii) выполняются.

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть $M \in \mathcal{W}\mathcal{P}_\lambda^d(A)$. Примем обозначения предложения 3.6. Тогда $\bigoplus_{i=0}^j K_i \in \mathcal{S}\mathcal{W}\mathcal{P}_\lambda^d(A)$ для всех $0 \leq j \leq p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 0.4 каждый K_i является (d, λ) -кошулевым модулем и $\bigoplus_{i=0}^j K_i \in \mathcal{P}(A)$ по предложению 3.6. Следовательно, $\bigoplus_{i=0}^j K_i \in \mathcal{S}\mathcal{W}\mathcal{P}(A)$.

4. A_∞ -структуры на $E(A)$

Пусть A – λ -кошулева алгебра и $E(A)$ – ее Ext-алгебра Ионеда. В этом разделе мы обсудим A_∞ -структуру на $E(A)$.

Напомним сначала определение A_∞ -алгебр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. A_∞ -алгеброй над полем $\mathbb{F}$ называется $\mathbb{Z}$ -градуированное векторное пространство

$$E = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} E^n,$$

снабженное семейством градуированных $\mathbb{F}$ -линейных отображений

$$m_n: E^{\otimes n} \rightarrow E, \quad n \geq 1,$$

степени $2 - n$, удовлетворяющих следующим тождествам Стакеффа для всех $n \geq 1$:

$$\mathbf{SI}(n): \quad \sum (-1)^{r+st} m_u(\text{id}^{\otimes r} \otimes m_s \otimes \text{id}^{\otimes t}) = 0,$$

где сумма распространена на все разложения $n = r + s + t$, где $r, t \geq 0$, $s \geq 1$, и $u = r + 1 + t$. Символ “id” означает здесь тождественное отображение E на себя. Заметим, что при применении этих формул к однородным элементам появляются дополнительные знаки в связи с кошулевым правилом знаков. Если E биградуирован, то мы можем также определить биградуированные A_∞ -алгебры аналогичным образом, и все умножения сохраняют вторую степень (подробности см. в [6]).

Умножения $\{m_n\}_{n \geq 3}$ называются *вышними умножениями* на E .

Следующий полезный результат был впервые получен Кадеишвили, см. также [10] и [6].

ЛЕММА 4.2. Пусть A – расширенная (пополненная) дифференциальная биградуированная алгебра и $E = HA$. Тогда существует такая расширенная A_∞ -структура $\{m_i\}$ на E , что $m_1 = 0$, m_2 индуцировано умножением в A , а E квазиизоморфна A как расширенная биградуированная A_∞ -алгебра.

Напомним, что J – градуированный радикал Джекобсона A . Пусть J^* – градуированная двойственная алгебра для J и $T(J^*)$ – тензорная алгебра. Согласно [6] $T(J^*)$ – расширенная дифференциальная биградуированная алгебра и

$$E(A) = \text{Ext}_A^*(\mathbb{F}, \mathbb{F}) \cong H(T(J^*)).$$

По лемме 4.2 $E(A)$ – расширенная биградуированная A_∞ -алгебра с точностью до квазиизоморфизма. Эту A_∞ -структуру на $E(A)$ мы называем индуцированной алгеброй $T(J^*)$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть A – λ -кошулева алгебра и $\{m_l\}$ – всевозможные A_∞ -структуры на $E(A)$, индуцированные алгеброй $T(J^*)$. Если

$$m_l(\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_l) \neq 0$$

для некоторых $\alpha_j \in \text{Ext}_A^{2|\lambda|+i_j}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$ с $0 \leq i_j \leq 2|\lambda| - 1$, то

$$\delta_\lambda(i_1 + i_2 + \cdots + i_l + 2 - l) = \delta_\lambda(i_1) + \delta_\lambda(i_2) + \cdots + \delta_\lambda(i_l).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $E^{2k|\lambda|+i_j} := \text{Ext}_A^{2k|\lambda|+i_j}(\mathbb{F}, \mathbb{F})$. Тогда

$$\text{Ext}_A^{2k|\lambda|+i_j}(\mathbb{F}, \mathbb{F}) = \text{Ext}_A^{2k|\lambda|+i_j}(\mathbb{F}, \mathbb{F})_{\delta_\lambda(2k|\lambda|+i_j)} := E_{\delta_\lambda(2k|\lambda|+i_j)}^{2k|\lambda|+i_j},$$

где $0 \leq i_j \leq 2|\lambda| - 1$. Напомним, что все умножения $\{m_l\}$ сохраняют вторую степень. Имеем

$$\begin{aligned} m_l(E^{2k_1|\lambda|+i_1} \otimes E^{2k_2|\lambda|+i_2} \otimes \cdots \otimes E^{2k_l|\lambda|+i_l}) \\ = m_l(E_{\delta_\lambda(2k_1|\lambda|+i_1)}^{2k_1|\lambda|+i_1} \otimes E_{\delta_\lambda(2k_2|\lambda|+i_2)}^{2k_2|\lambda|+i_2} \otimes \cdots \otimes E_{\delta_\lambda(2k_l|\lambda|+i_l)}^{2k_l|\lambda|+i_l}) \\ \subset E_{\delta_\lambda(2k_1|\lambda|+i_1)+\cdots+\delta_\lambda(2k_l|\lambda|+i_l)}^{2(k_1+k_2+\cdots+k_l)|\lambda|+i_1+i_2+\cdots+i_l+2-l}. \end{aligned}$$

Если $m_l \neq 0$, то мы получаем следующее уравнение:

$$\delta_\lambda(2(k_1+k_2+\cdots+k_l)|\lambda|+i_1+i_2+\cdots+i_l+2-l) = \delta_\lambda(2k_1|\lambda|+i_1) + \cdots + \delta_\lambda(2k_l|\lambda|+i_l).$$

По лемме 2.3 имеем

$$\begin{aligned} \delta_\lambda(2(k_1+k_2+\cdots+k_l)|\lambda|+i_1+i_2+\cdots+i_l+2-l) \\ = \delta_\lambda(2(k_1+k_2+\cdots+k_l)|\lambda|) + \delta_\lambda(i_1+i_2+\cdots+i_l+2-l), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_\lambda(2(k_1+k_2+\cdots+k_l)|\lambda|) &= \delta_\lambda(2k_1|\lambda|) + \delta_\lambda(2k_2|\lambda|) + \cdots + \delta_\lambda(2k_l|\lambda|), \\ \delta_\lambda(2k_j|\lambda|+i_j) &= \delta_\lambda(2k_j|\lambda|) + \delta_\lambda(i_j). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\delta_\lambda(i_1 + i_2 + \cdots + i_l + 2 - l) = \delta_\lambda(i_1) + \delta_\lambda(i_2) + \cdots + \delta_\lambda(i_l).$$

Автор выражает благодарность рецензенту за многочисленные полезные предложения, которые во многом улучшили статью.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. B. Priddy, “Koszul resolutions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **152**:1 (1970), 39–60.
- [2] A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Soergel, “Koszul duality patterns in representation theory”, *J. Amer. Math. Soc.*, **9**:2 (1996), 473–527.
- [3] M. Artin, W. F. Schelter, “Graded algebras of global dimension 3”, *Adv. Math.*, **66**:2 (1987), 171–216.
- [4] R. Berger, “Koszulity for nonquadratic algebras”, *J. Algebra*, **239**:2 (2001), 705–734.
- [5] E. L. Green, E. N. Marcos, R. Martínez-Villa, P. Zhang, “ D -Koszul algebras”, *J. Pure Appl. Algebra*, **193**:1–3 (2004), 141–162.
- [6] J.-W. He, D.-M. Lu, “Higher Koszul algebras and A -infinity algebras”, *J. Algebra*, **293**:2 (2005), 335–362.
- [7] E. L. Green, R. Martínez-Villa, “Koszul and Yoneda algebras”, *Representation Theory of Algebras* (Cocoyoc, 1994), CMS Conf. Proc., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996, 247–297.
- [8] R. Martínez-Villa, D. Zacharia, “Approximations with modules having linear resolutions”, *J. Algebra*, **266**:2 (2003), 671–697.
- [9] J. D. Stasheff, “Homotopy associativity of H -spaces. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108**:2 (1963), 275–292; “Homotopy associativity of H -spaces. II”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **108**:2 (1963), 293–312.
- [10] B. Keller, “Introduction to A -infinity algebras and modules”, *Homology Homotopy Appl.*, **3**:1 (2001), 1–35.
- [11] B. Keller, “Deriving DG categories”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **27**:1 (1994), 63–102.
- [12] B. Keller, “Bimodule complexes via strong homotopy actions”, *Algebr. Represent. Theory*, **3**:4 (2000), 357–376.
- [13] B. Keller, *A-Infinity algebras in representation theory*, Contribution to the Proceedings of ICRA IX, Beijing, 2000.
- [14] D. M. Lu, J. H. Palmieri, Q. S. Wu, J. J. Zhang, “ A_∞ -algebras for ring theorists”, *Algebra Colloq.*, **11**:1 (2004), 91–128.
- [15] E. L. Green, E. N. Marcos, “ δ -Koszul algebras”, *Comm. Algebra*, **33**:6 (2005), 1753–1764.

Лю Сиа-Фень

Zhejiang Normal University, Jinhua, China

E-mail: jiafenglv@zjnu.edu.cn, jiafenglv@zjnu.cn

Поступило

19.07.2007

Исправленный вариант

16.09.2008