Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, О стилтьесовском
залатывании временных шкал, *Матем. заметки*, 2009,
том 86, выпуск 5, 733–735

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:59:03

О стилтьесовском залатывании временных шкал

Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина

В работе показывается, что теория динамических уравнений на временных шкалах (с дырявым, т.е. прерывистым аргументом) допускает существенное упрощение и углубление при опоре на интегрирование по Стилтьесу, обращающее дифференцирование по риссовым мерам.

Библиография: 6 названий.

Последние годы бурное развитие имеет теория (именуемая нами ДУВШ) так называемых динамических уравнений (см., например, [1]–[5])

$$(p(t)x^\Delta(t))^\Delta + q(t)x(\sigma(t)) = 0 \quad (1)$$

на временных шкалах – произвольных замкнутых множествах из $\mathbb{R}$. Отправной в ней является процедура дифференцирования на шкале $\mathbb{T}$:

$$x^\Delta(t_0) = \lim_{s \rightarrow t_0} \frac{x(\sigma(t_0)) - x(s)}{\sigma(t_0) - s}, \quad (2)$$

где $\sigma(t)$ означает $\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$.

Допускаемая в ДУВШ несвязность шкалы $\mathbb{T}$ не может не интриговать, ибо в качестве $\mathbb{T}$ может рассматриваться канторовское множество. Развивая весьма своеобразные технологии и апеллируя к самым разнообразным приложениям, эта теория устремлена к анализу асимптотических свойств решений (при $t \rightarrow \infty, t \in \mathbb{T}$), страдая при этом слабой проработкой основ. Так, считается, что решение $x(t)$ уравнения (1) непрерывно на $\mathbb{T}$ вместе с обеими Δ -производными. Вопрос о существовании таких решений не обсуждается – так же как и вопрос о зависимости решения от параметров и начальных условий. Сложности анализа порождаются не только несвязностью $\mathbb{T}$, но и своеобразием второго слагаемого в (1), где аргумент $\sigma(t)$ означает наличие опережения (при $\sigma(t) \neq t$).

Ниже мы погружаем исходный объект в теорию стандартных представлений одномерного математического анализа.

1. Обозначим через $\mathbb{W}$ дополнение шкалы $\mathbb{T}$ до всей оси $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Множество $\mathbb{W}$ в силу замкнутости $\mathbb{T}$ состоит из не более чем счетного набора интервалов вида $\omega = (\alpha, \beta)$. На каждом из них уравнение (1) как бы отсутствует. Для большей

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00397).

внятности мы будем называть их *дырками* $\mathbb{T}$. Для каждой из них мы точки α и β будем называть соответственно *левым* и *правым краями дырки*.

Обозначим множество тех значений $t \in \mathbb{T}$, для которых $t \neq \sigma(t)$, через $\mathfrak{N}$. Для того, чтобы точка $t \in \mathbb{T}$ являлась левым краем какой-либо дырки, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $t \neq \sigma(t)$. Необычное внешне уравнение (1) отличается от традиционного уравнения $(px')'(t) + q(t)x(t) = 0$ только на множестве $\mathfrak{N}$.

Отметим, что в теории ДУВШ *допустимыми условиями* являются непрерывность на $\mathbb{T}$ коэффициентов p и q и непрерывность на $\mathbb{T}$ решения $x(t)$ уравнения (1) вместе с производными $x^\Delta(t)$ и $(p(t)x^\Delta(t))^\Delta$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть для уравнения (1) выполняются допустимые условия ДУВШ. Тогда существуют функции $P(t)$ и $Q(t)$ с ограниченным изменением на $\mathbb{R}$ и такие, что каждому из допустимых решений $x(t)$ уравнения (1) соответствует определенное и непрерывное на всем $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ решение $\hat{x}(t)$ уравнения

$$[Px']_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta x(t) dQ(t) = 0, \quad (3)$$

совпадающее с $x(t)$ на шкале $\mathbb{T}$.

В уравнении (3) функция $Q(t)$ может быть представлена в виде

$$Q(t) = \int_\alpha^t q_0 ds + \sum_{\tau \in \mathfrak{N}, \tau \leq t} q(\tau)\theta(t - \sigma(\tau)),$$

где $q_0 = q(t)$ при $t = \sigma(t)$ и $q_0 \equiv 0$ на $\mathbb{W}$, $\theta(t)$ – функция Хевисайда.

Согласно [6] непрерывное в форме (3) распространение (1) на $\mathbb{R}$ позволяет обеспечивать для (1) правомочность теорем типа Коши–Пеано и формулировать свойства типа перемежаемости нулей (как в теоремах сравнения Штурма), ставить и эффективно изучать краевые задачи, включая знакорегулярность свойств функции Грина.

2. Уравнение (3) по сути близко к обычному, ибо в случае, когда P и Q абсолютно непрерывны, (3) принимает вид $(pu')' + qu = 0$ при $p = P'$ и $q = Q'$. В то же время форма (3) существенно расширяет объект, допуская разрывы у P и Q и, тем самым, импульсные особенности (типа дельта-функций в коэффициентах). Основы качественной теории общих уравнений вида (3) изложены в [6].

Обозначим через $\mathbb{E}$ (через $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$) множество абсолютно непрерывных на $\mathbb{R}$ (соответственно на $\mathbb{T}$) функций, производные которых имеют ограниченное изменение на $\mathbb{R}$ (на $\mathbb{T}$). Пространство $\mathbb{E}$ полно по норме

$$\|x(t)\| = \sup_{\mathbb{T}} |x(t)| + V_{\mathbb{T}}[x'(t)]. \quad (4)$$

Обозначим через $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}^0$ пространство функций из $\mathbb{E}$, совпадающих на $\mathbb{T}$ с элементами из $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}$ и линейных на каждой дырке $\mathbb{T}$. Пусть функция $q(t): \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ из (1) принадлежит $BV(\mathbb{T})$ (вместе с $p(t)$). Обозначим их продолжения на $\mathbb{W}$ равенствами

$$\hat{P}(t) = p(\alpha - 0), \quad \hat{Q}(t) \equiv 0. \quad (5)$$

Если p и q непрерывны, как это принято в ДУВШ, то уравнение (3) с такими продолжениями $\hat{P}$ и $\hat{Q}$ адекватно (1).

ТЕОРЕМА 2. Если $p, q \in BV(\mathbb{T})$, то для любой задачи Коши

$$x(\xi) = C_0, \quad x'(\xi - 0) = C_1 \quad (x'(\xi + 0) = C_1)$$

уравнение (3) имеет в $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}^0$ единственное решение, непрерывно зависящее по норме (4) в $\mathbb{E}_{\mathbb{T}}^0$ от начальных условий.

Авторы благодарны М. Б. Зверевой и В. Л. Прядиеву за обсуждение результатов работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Бодин, М. Боне, Д. Лутц, “Асимптотическое поведение решений динамических уравнений”, *СМФН*, **1** (2003), 30–39.
- [2] S. Hilger, “Analysis on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus”, *Results Math.*, **18**:1–2 (1990), 18–56.
- [3] M. Bohner, A. Peterson, *Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications*, Birkhäuser, Boston, MA, 2001.
- [4] O. Došlý, S. Hilger, “A necessary and sufficient condition for oscillation of the Sturm–Liouville dynamic equation on time scales”, *J. Comput. Appl. Math.*, **141**:1–2 (2002), 147–158.
- [5] S. H. Saker, “Oscillation of second-order forced nonlinear dynamic equations on time scales”, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **2005** (2005), Paper No. 23, 17 pp.
- [6] Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров, “Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач”, *УМН*, **63**:1 (2008), 111–154.

Ю. В. Покорный

Воронежский государственный университет

E-mail: Pokorny@math.vsu.ru

Поступило

06.03.2009

Ж. И. Бахтина

Воронежский государственный университет

E-mail: Ioanna83@mail.ru