Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Пупырев, Рациональные приближения числа $\sqrt[3]{3}$,
Матем. заметки, 2009, том 86, выпуск 5, 736–747

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 15:03:16

Рациональные приближения числа $\sqrt[3]{3}$

Ю. А. Пупырев

В работе получены оценки вида $\|\xi\alpha^n\| > C^k$ для всех $k \geq K$ для значения $\xi = 3^{1/3}$ и $\alpha = 2$, где K – некоторая эффективная постоянная, а $\|\cdot\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого.

Библиография: 9 названий.

Введение. Последовательность дробных долей степеней фиксированного числа $\alpha > 1$ и более общая последовательность $\{\xi\alpha^n\}$, $n = 1, 2, \dots$, где $\xi \neq 0$ и $\alpha > 1$ – вещественные числа, рассматриваются уже давно и связаны с различными задачами теории чисел. Например, из неравенства $\{(3/2)^k\} \leq 1 - (3/4)^k$, $k \in \mathbb{N}$, следовала бы точная оценка максимального количества слагаемых в проблеме Варинга.

Занимаясь этой задачей Малер [1] показал, что неравенство

$$\left\| \theta \left(\frac{u}{v} \right)^k \right\| \leq C^k$$

для целых u и v и вещественного θ , где $\|\cdot\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого, $\|x\| = \min(\{x\}, 1 - \{x\})$, имеет лишь конечное число решений в целых k для любого $C < 1$. В частности, в случае $\theta = 1$, $u/v = 3/2$, $C = 3/4$ получается указанное выше неравенство для всех $k \geq K$, где K – абсолютная, однако *неэффективная* постоянная. Подобные оценки вида

$$\left\| \left(\frac{3}{2} \right)^k \right\| > C^k \quad \text{для всех } k \geq K \quad (1)$$

с эффективной постоянной K получены Бейкером и Коэтсом [2], Бэйкерсом [3], Дубицкасом [4], Хабсигером [5], а также Зудилиным [6]. В работе Зудилина помимо прочего содержатся оценки для расстояний $\|(4/3)^n\|$ и $\|(5/4)^n\|$. (См. также работы Хабсигера [5] и автора [7] по эффективизации оценок для $\|(3/2)^n\|$, и $\|(4/3)^n\|$.)

В настоящей работе автор получает оценки вида

$$\|\xi\alpha^k\| > C^k \quad \text{для всех } k \geq K$$

для некоторых конкретных значений ξ и α . Так, доказана следующая

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место оценка*

$$\|3^{1/3}2^k\| > 0.3568^k \quad \text{при } k > K. \quad (2)$$

Заметим, что из наилучшей на данный момент эффективной оценки меры числа $3^{1/3}$ [8]

$$\mu(3^{1/3}) = 2.692661368 \dots$$

следовала бы оценка

$$\|3^{1/3}2^k\| > 0.3093^k \quad \text{при } k > K.$$

1. Аппроксимации Паде. Используя равенство

$$3^2 - 2^3 = 1$$

и фиксируя целый положительный параметр B , запишем

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^{3B+1} &= \left(\frac{27}{8}\right)^{-(B+1/3)} = \left(3 \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right)^{-1}\right)^{-(B+1/3)} \\ &= 3^{-1/3} \cdot 3^{-B} \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right)^{B+1/3}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} 3^{1/3}2^{3B+1} &= 3^{2B+1} \left(1 - \frac{1}{9}\right)^{B+1/3} = 3^{2B+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{B+1/3}{k} \left(-\frac{1}{9}\right)^k \\ &= 3^{2B+1} \left(\sum_{k=0}^{A-1} \binom{B+1/3}{k} \left(-\frac{1}{9}\right)^k + \sum_{k=A}^{\infty} \binom{B+1/3}{k} \left(-\frac{1}{9}\right)^k \right) \\ &\equiv \left(-\frac{1}{9}\right)^A \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{B+1/3}{A+\mu} \left(-\frac{1}{9}\right)^{\mu} \pmod{\mathbb{Z}} \\ &= (-1)^A 3^{2B-2A+1} \binom{B+1/3}{A} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-B+A-1/3)_{\mu}}{(A+1)_{\mu}} \left(\frac{1}{9}\right)^{\mu}. \end{aligned} \quad (3)$$

где $0 \leq A \leq 4B/7 + 1$ (будем также для удобства предполагать A четным).

Будем строить приближения Паде [6] к функции

$$\begin{aligned} F_B(z) &= 3^{2B-2A+1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{B+1/3}{A+\mu} (-z)^{\mu} \\ &= 3^{2B-2A+1} \binom{B+1/3}{A} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-B+A-1/3)_{\mu}}{(A+1)_{\mu}} z^{\mu}. \end{aligned}$$

Выберем многочлен

$$\begin{aligned} Q_n(x) &= \binom{n-B+A-1-1/3}{n} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n+A \\ -B+A-1/3 \end{matrix} \middle| x \right) \\ &= \sum_{\mu=0}^n (-x)^{\mu} \binom{n+A+\mu-1}{\mu} \binom{n-B+A-1-1/3}{n-\mu} = \sum_{\mu=0}^n q_{\mu} x^{\mu}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 Q_n(z^{-1})F_B(z) &= 3^{2B-2A+1} \sum_{\mu=0}^n q_{n-\mu} z^{\mu-n} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{B+1/3}{A+\nu} (-z)^{\nu} \\
 &= 3^{2B-2A+1} \sum_{l=0}^{\infty} z^{l-n} \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \leq l}}^n q_{n-\mu} \binom{B+1/3}{A+l-\mu} (-1)^{l-\mu} \\
 &= 3^{2B-2A+1} \sum_{l=0}^{n-1} r_l z^{l-n} + 3^{2B-2A+1} \sum_{l=n}^{\infty} r_l z^{l-n} = P_n(z^{-1}) + R_n(z); \quad (5)
 \end{aligned}$$

здесь многочлен

$$P_n(x) = 3^{2B-2A+1} \sum_{l=0}^{n-1} r_l x^{n-l}, \quad \text{где} \quad r_l = \sum_{\mu=0}^l q_{n-\mu} \binom{B+1/3}{A+l-\mu} (-1)^{l-\mu} \quad (6)$$

имеет степень не выше n .

Далее, докажем следующие включения:

$$3^{[3n/2]} Q_n(x) \in \mathbb{Z}[x], \quad 3^{[3n/2]} P_n(x) \in \mathbb{Z}[x].$$

Для натурального N и целого $r = \pm r_1^{\theta_1} \cdots r_t^{\theta_t}$, где $r_1, \dots, r_t$ — простые, N -частью r назовем число ${}_N r = \prod_{i: r_i | N} r_i^{\theta_i}$. Воспользуемся следующей леммой (см. [8; лемма 4.1]).

ЛЕММА 1. Пусть $N, r \geq 1$ — целые, и пусть ${}_N r!$ — N -часть $r!$. Тогда число

$$\frac{(Nu-s) \cdots (N(u+r-1)-s)}{r!} \cdot {}_N r!,$$

где $u, v \in \mathbb{Z}$, — целое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем $r! = {}_N r! \cdot M$, откуда $(N, M) = 1$. Значит, найдется N' такое, что $N'N \equiv 1 \pmod{M}$ и $(N', M) = 1$. Тогда

$$(N')^r \cdot (Nu-s) \cdots (N(u+r-1)-s) \equiv (u-sN') \cdots (u+r-1-sN') \pmod{M}.$$

Но имеем

$$(u-sN') \cdots (u+r-1-sN') = \binom{u+r-1-sN'}{r} r!,$$

а значит,

$$(u-sN') \cdots (u+r-1-sN') \equiv 0 \pmod{M}.$$

Учитывая равенство $(N', M) = 1$, приходим к

$$(Nu-s) \cdots (N(u+r-1)-s) \equiv 0 \pmod{M},$$

откуда

$${}_N r! (Nu-s) \cdots (N(u+r-1)-s) \equiv 0 \pmod{r!},$$

что и требовалось.

Коэффициенты остатка

$$R_n(z) = 3^{2B-2A+1} \sum_{l=n}^{\infty} r_l z^{l-n}$$

имеют следующее представление:

$$\begin{aligned} r_l &= \sum_{\mu=0}^n q_{n-\mu} \binom{B+1/3}{A+l-\mu} (-1)^{l-\mu} \\ &= \sum_{\mu=0}^n (-1)^{n-\mu} \binom{2n+A-\mu-1}{n-\mu} \binom{n-B+A-1-1/3}{\mu} \binom{B+1/3}{A+l-\mu} (-1)^{l-\mu} \\ &= (-1)^n \frac{(2n+A-1) \cdots (2n+A-n) \cdot (B+1/3) \cdots (B-A-l+1+1/3) (-1)^l}{n!(A+l)!} \\ &\quad \times \sum_{\mu=0}^n \frac{n!}{(n-\mu)! \mu!} \frac{(n-B+A-1-1/3) \cdots (n-B+A-\mu-1/3)}{(2n+A-1) \cdots (2n+A-\mu)} \\ &\quad \times \frac{(A+l) \cdots (A+l-\mu+1)}{(B-A-l+\mu+1/3) \cdots (B-A-l+1+1/3)} \\ &= (-1)^n \frac{(2n+A-1) \cdots (2n+A-n) \cdot (B+1/3) \cdots (B-A-l+1+1/3) (-1)^l}{n!(A+l)!} \\ &\quad \times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, -A-l, -n+B-A+1+1/3 \\ -2n-A+1, B-A-l+1+1/3 \end{matrix} \middle| 1 \right). \end{aligned}$$

Применяя формулу суммирования Пфаффа–Заальцютца (см., например, [9; с. 49, формула (2.3.1.3)])

$${}_3F_2 \left(\begin{matrix} -n, a, b \\ c, 1+a+b-c-n \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n},$$

получаем

$$\begin{aligned} r_l &= (-1)^n \frac{(2n+A-1) \cdots (2n+A-n) \cdot (B+1/3) \cdots (B-A-l+1+1/3) (-1)^l}{n!(A+l)!} \\ &\quad \times \frac{(B+1+1/3)_n (n-l)_n}{(B-A-l+1+1/3)_n (n+A)_n}. \end{aligned}$$

Заметим, что $(n-l)_n = 0$ для l из интервала $n \leq l \leq 2n-1$, так что $r_l = 0$ для таких l , в то время как

$$\begin{aligned} r_l = r_{2n+\nu} &= (-1)^n \frac{(2n+A-1) \cdots (2n+A-n)}{n!} \\ &\quad \times \frac{(B+1/3) \cdots (B-A-2n-\nu+1+1/3) (-1)^\nu}{(A+2n+\nu)!} \\ &\quad \times \frac{(B+1+1/3)_n (n-2n-\nu)_n}{(B-A-2n-\nu+1+1/3)_n (n+A)_n} \\ &= \frac{(n-B+A-1-1/3) \cdots (-B-n-1/3)}{(2n+A)!} \cdot \frac{(n-B+A-1/3)_\nu (n+1)_\nu}{\nu! (2n+A+1)_\nu}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$R_n(z) = 3^{2B-2A+1} \binom{n-B+A-1-1/3}{2n+A} z^n \cdot {}_2F_1 \left(\begin{matrix} n-B+A-1/3, n+1 \\ 2n+A+1 \end{matrix} \middle| z \right) \quad (7)$$

и интегральное представление

$$R_n(z) = 3^{2B-2A+1} \frac{(-1)^{n+B+1}}{\Gamma(1-1/3)\Gamma(1/3)} \cdot z^n \cdot \int_0^1 t^{n-B+A-1-1/3} (1-t)^{n+B+1/3} (1-zt)^{-n-1} dt. \quad (8)$$

В дальнейшем нам понадобится линейная независимость пары соседних приближений, которая вытекает из следующей леммы (ср. [6; лемма 2]).

ЛЕММА 2. *Выполнено*

$$\begin{aligned} & Q_{n+1}(x)P_n(x) - Q_n(x)P_{n+1}(x) \\ &= (-1)^n 3^{2B-2A+1} \binom{2n+A+1}{n+1} \binom{n-B+A-1-1/3}{2n+A} x. \end{aligned} \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, левая часть (9) является многочленом, свободный член которого равен нулю ввиду равенств $P_n(0) = P_{n+1}(0) = 0$ (см. (6)), в то время как

$$\begin{aligned} & Q_{n+1}(z^{-1})P_n(z^{-1}) - Q_n(z^{-1})P_{n+1}(z^{-1}) \\ &= Q_{n+1}(z^{-1})(Q_n(z^{-1})F_B(z) - R_n(z)) - Q_n(z^{-1})(Q_{n+1}(z^{-1})F_B(z) - R_{n+1}(z)) \\ &= Q_n(z^{-1})R_{n+1}(z) - Q_{n+1}(z^{-1})R_n(z), \end{aligned}$$

а из (4), (7), учитывая, что в последней сумме возникают только отрицательные степени переменной z ,

$$\begin{aligned} & -Q_{n+1}(z^{-1})R_n(z) \\ &= (-1)^n \binom{2n+A+1}{n+1} z^{-(n+1)} (1 + O(z)) \\ &\quad \times 3^{2B-2A+1} \binom{n-B+A-1-1/3}{2n+A} z^n (1 + O(z)) \\ &= (-1)^n 3^{2B-2A+1} \binom{2n+A+1}{n+1} \binom{n-B+A-1-1/3}{2n+A} \frac{1}{z} + O(1) \end{aligned}$$

при $z \rightarrow 0$.

2. Арифметические составляющие. Для начала отметим, что для простого $p > \sqrt{N}$ выполнено

$$\text{ord}_p N! = \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor.$$

Нам также понадобится способ оценки порядка вхождения простого p в произведение вида

$$\begin{aligned} \Pi &= N^{v-u} \left(u - \frac{s}{N} \right)_{v-u} = N^{v-u} \left(u - \frac{s}{N} \right) \left(u - \frac{s}{N} + 1 \right) \cdots \left(v - 1 - \frac{s}{N} \right) \\ &= (Nu - s)(N(u+1) - s) \cdots (N(v-1) - s), \end{aligned} \quad (10)$$

где $u, v, s \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$ и $u < v$, $0 \leq s < N$.

Воспользуемся леммой 4.5 из [8] в немного измененном виде.

ЛЕММА 3. Для порядка вхождения простого p в произведение Π вида (10) с условием $p > \sqrt{N \max\{|u| + 1, |v|\}}$, $(p, N) = 1$, $\Pi \neq 0$ выполнено

$$\text{ord}_p \Pi = \left\lfloor \frac{v-1}{p} - \frac{r}{N} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{u-1}{p} - \frac{r}{N} \right\rfloor,$$

где число $r \in \mathbb{N}$ – минимальное такое, что

$$rp \equiv -s \pmod{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия на r равносильно тому, что $rp = kN - s$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, откуда следует, что для данного k выполнено

$$kN \equiv s \pmod{p}. \quad (11)$$

Зададимся вопросом, какие из множителей $Nj - s$ делятся на p . Или: для каких j

$$Nj \equiv s \pmod{p}. \quad (12)$$

Сравнивая (11) и (12), получаем $kN \equiv Nj \pmod{p}$, что равносильно

$$k \equiv j \pmod{p}$$

ввиду $(p, N) = 1$. Значит, все такие j имеют вид $j = k + pl$, и при этом

$$u \leq k + pl \leq v - 1. \quad (13)$$

Имеем $rp = kN - s$, или

$$\frac{k}{p} = \frac{r}{N} + \frac{s}{pN}. \quad (14)$$

Перепишем сначала (13) в виде

$$u - 1 + \frac{s}{N} < kp + l \leq v - 1 + \frac{s}{N},$$

а потом

$$\frac{u-1}{p} + \frac{s}{pN} \leq \frac{k}{p} + l \leq \frac{v-1}{p} + \frac{s}{pN},$$

и подставим в него (14): из левого неравенства получаем

$$\frac{r}{N} + l > \frac{u-1}{p};$$

из правого –

$$\frac{r}{N} + l \leq \frac{v-1}{p};$$

итога:

$$\frac{u-1}{p} - \frac{r}{N} < l \leq \frac{v-1}{p} - \frac{r}{N}.$$

Значит, количество подходящих j в точности равно

$$\left\lfloor \frac{v-1}{p} - \frac{r}{N} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{u-1}{p} - \frac{r}{N} \right\rfloor,$$

а условия $p > \sqrt{N(|u| + 1)}$ и $p > \sqrt{N|v|}$ гарантируют, что p входит в каждый из множителей в степени ≤ 1 .

Далее, для каждого $p > \sqrt{3(A+B+n)}$ определим показатель

$$e_p = \min_{\mu \in \mathbb{R}} \left(-\left\{ \frac{n+A+\mu}{p} \right\} + \left\{ \frac{n+A}{p} \right\} + \left\{ \frac{\mu}{p} \right\} - \left\{ \frac{n-B+A-1}{p} - \frac{r_p}{3} \right\} + \left\{ \frac{-B+A+\mu-1}{p} - \frac{r_p}{3} \right\} + \left\{ \frac{n-\mu}{p} \right\} \right), \quad (15)$$

где r_p определено сравнением

$$r_p p \equiv -1 \pmod{3}.$$

Тогда, очевидно, $e_p \leq \text{ord}_p E_{A,B,\mu}$, $\mu = 0, \dots, n$, где

$$E_{A,B,\mu} = \binom{n+A+\mu}{\mu} \binom{n-B+A-1-1/3}{n-\mu}.$$

Положим

$$\Phi = \Phi(A, B, n) = \prod_{p > \sqrt{3(A+B+n)}} p^{e_p}. \quad (16)$$

Нам понадобится искать сокращения в коэффициентах вида

$$D_{A,B,\mu} = \binom{n+A+\mu-1}{\mu} \binom{n-B+A-1-1/3}{n-\mu} = \frac{n+A}{n+A+\mu} \cdot E_{A,B,\mu},$$

$$\tilde{D}_{A,B,\mu} = \binom{n+A+\mu}{\mu} \binom{n-B+A-1/3}{n-\mu+1} = \frac{n-B+A-1/3}{n-\mu+1} \cdot E_{A,B,\mu},$$

где $D_{A,B,\mu}$ отвечает коэффициентам n -го шага приближения, а $\tilde{D}_{A,B,\mu} - (n+1)$ -го.

ЛЕММА 4. *Справедливы включения*

$$(3(n+B)+4)\Phi^{-1}3^{[3n/2]}D_{A,B,\mu} \in \mathbb{Z}, \quad \mu = 0, \dots, n,$$

$$(n+1)\Phi^{-1}3^{[3n/2]}\tilde{D}_{A,B,\mu} \in \mathbb{Z}, \quad \mu = 0, \dots, n+1,$$

откуда

$$(3(n+B)+4)\Phi^{-1}3^{[3n/2]}Q_n(x), (3(n+B)+4)\Phi^{-1}3^{[3n/2]}P_n(x) \in \mathbb{Z}[x],$$

$$(n+1)\Phi^{-1}3^{[3(n+1)/2]}Q_{n+1}(x), (n+1)\Phi^{-1}3^{[3(n+1)/2]}P_{n+1}(x) \in \mathbb{Z}[x].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай n -го шага. Имеем

$$\text{ord}_p D_{A,B,\mu} = \text{ord}_p E_{A,B,\mu} + \text{ord}_p(n+A) - \text{ord}_p(n+A+\mu).$$

Если $p \nmid n+A+\mu$, или $p \mid n+A$, то $\text{ord}_p D_{A,B,\mu} \geq \text{ord}_p E_{A,B,\mu}$. В противном случае имеем $\mu \equiv -(n+A) \pmod{p}$, так что $\mu/p + (n+A)/p \in \mathbb{Z}$ и

$$\begin{aligned} \text{ord}_p \binom{n+A+\mu-1}{\mu} &= -\left\{ \frac{n+A+\mu-1}{p} \right\} + \left\{ \frac{n+A-1}{p} \right\} + \left\{ \frac{\mu}{p} \right\} \\ &= -\left\{ -\frac{1}{p} \right\} + \left\{ \frac{n+A-1}{p} \right\} + \left\{ -\frac{n+A}{p} \right\} \\ &= -\frac{p-1}{p} + \left\{ \frac{n+A-1}{p} \right\} - \left\{ \frac{n+A}{p} \right\} + 1 \\ &= \left\{ \frac{1}{p} \right\} + \left\{ \frac{n+A-1}{p} \right\} - \left\{ \frac{n+A}{p} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

откуда

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_p D_{A,B,\mu} &= \operatorname{ord}_p \binom{n-B+A-1-1/3}{n-\mu} = \operatorname{ord}_p \binom{n-B+A-1-1/3}{2n+A} \\ &= \operatorname{ord}_p \binom{n-B+A-1-1/3}{2n+A+1} + \operatorname{ord}_p \frac{2n+A+1}{-n-B-1-1/3} \\ &\geq \operatorname{ord}_p E_{A,B,\mu} \mid_{\mu/p \equiv -(n+A-1)/p \pmod{\mathbb{Z}}} - \operatorname{ord}_p (3(n+B)+4).\end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из того, что при $\mu \equiv -(n+A)-1 \pmod{p}$ выполнено равенство

$$\operatorname{ord}_p \binom{n+A+\mu}{\mu} = 0,$$

убедится в верности которого можно расписав его аналогично (17).

Для случая $(n+1)$ -го шага аналогично при $\mu \neq n+1$

$$\operatorname{ord}_p \tilde{D}_{A,B,\mu} = \operatorname{ord}_p E_{A,B,\mu} + \operatorname{ord}_p (n-B+A-1/3) - \operatorname{ord}_p (n-\mu+1).$$

Если $p \nmid n-\mu+1$ и $\mu \neq n+1$, то $\operatorname{ord}_p \tilde{D}_{A,B,\mu} \geq \operatorname{ord}_p E_{A,B,\mu}$. Иначе $\mu \equiv n+1 \pmod{p}$, или $\mu/p - (n+1)/p \in \mathbb{Z}$, откуда

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_p \binom{n-B+A-1/3}{n-\mu+1} &= -\left\{ \frac{n-B+A}{p} - \frac{r_p}{3} \right\} + \left\{ \frac{-B+A+\mu-1}{p} - \frac{r_p}{3} \right\} + \left\{ \frac{n-\mu+1}{p} \right\} \\ &= -\left\{ \frac{n-B+A}{p} - \frac{r_p}{3} \right\} + \left\{ \frac{-B+A+n}{p} - \frac{r_p}{3} \right\} = 0,\end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_p \tilde{D}_{A,B,\mu} &= \operatorname{ord}_p \binom{n+A+\mu}{\mu} = \operatorname{ord}_p \binom{2n+A+1}{n+1} \\ &= \operatorname{ord}_p \binom{2n+A}{n} + \operatorname{ord}_p \frac{2n+A+1}{n+1} \\ &\geq \operatorname{ord}_p E_{A,B,\mu} \mid_{\mu/p \equiv n/p \pmod{\mathbb{Z}}} - \operatorname{ord}_p (n+1).\end{aligned}$$

В дальнейшем через $\tilde{\Phi}$ будем обозначать одно из чисел $\Phi/(3(n+B)+4)$ или Φ/n , в зависимости от выбора шага приближения.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть теперь

$$A = \alpha m, \quad B = \beta m - 1, \quad n = \gamma m \quad \text{или} \quad \gamma m + 1, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Нам необходимо оценить асимптотику роста многочлена $Q_n(x)$. Заметим, что

$$\begin{aligned}(1+y)^{n-B+A-1-1/3} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-B+A-1-1/3}{k} y^k, \\ \frac{1}{(1-y)^{n+A}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+A-1+k}{k} y^k\end{aligned}$$

и, также,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n-B+A-1-1/3}{n-k} y^{-k} &= \frac{1}{y^n} \sum_{k=0}^n \binom{n-B+A-1-1/3}{n-k} y^{n-k} \\ &= \frac{1}{y^n} \sum_{k=0}^n \binom{n-B+A-1-1/3}{k} y^k, \end{aligned}$$

откуда получаем, что свободный член функции

$$G_{n,A,B}(y, x) = (1+y)^{n-B+A-1-1/3} \cdot \frac{1}{y^n} \cdot \frac{1}{(1-(-x)y)^{n+A}} \quad (18)$$

в точности равен $Q_n(x)$. Значит, по теореме Коши при $c|x| < 1$, $c < 1$

$$Q_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=c} G_{n,A,B}(\xi, x) \frac{d\xi}{\xi}.$$

Тогда (рассмотрим случай $n = \gamma m$)

$$Q_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=c} e^{mg_{\gamma,\alpha,\beta}(\xi,x)} \frac{1}{(1+\xi)^{1/3}} \frac{d\xi}{\xi}, \quad (19)$$

где

$$g_{\gamma,\alpha,\beta}(\xi, x) = (\gamma - \beta + \alpha) \log(1 + \xi) - \gamma \log(\xi) - (\gamma + \alpha) \log(1 + x\xi),$$

откуда приходим к асимптотике

$$C_1(z) = \varlimsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\log |Q_n(z^{-1})|}{m} \leq \max_{|\xi|=c} \operatorname{Re}(g_{\gamma,\alpha,\beta}(\xi, z^{-1})). \quad (20)$$

(Для случая $n = \gamma m + 1$ получаем ту же функцию $g_{\gamma,\alpha,\beta}(\xi, x)$ и, соответственно, ту же асимптотику (20) с добавочным членом $(1 + \xi)^{2/3}/\xi(1 + x\xi)$ вместо $1/(1 + \xi)^{1/3}$ в (19).)

Аналогично, из представления (8) для $R_n(z)$ с помощью метода Лапласа получаем

$$\begin{aligned} C_0(z) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log |R_n(z)|}{m} \\ &= (2\beta - 2\alpha) \log 3 + \gamma \log |z| \\ &\quad + \max_{0 \leq t \leq 1} ((\gamma - \beta + \alpha) \log(t) + (\gamma + \beta) \log(1 - t) - \gamma \log(1 - zt)). \end{aligned} \quad (21)$$

Далее, представим произведение Φ в виде $\Phi = \Phi_1 \cdot \Phi_2$, где

$$\Phi_1 = \prod_{p: r_p=1} p^{e_p}, \quad \Phi_2 = \prod_{p: r_p=2} p^{e_p}.$$

Тогда из (15), (16), и асимптотического закона распределения простых чисел в арифметической прогрессии имеем

$$C_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log \Phi(\alpha m, \beta m - 1, \gamma m)}{m} = \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_1(x) d\psi(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_2(x) d\psi(x), \quad (22)$$

где $\psi(x)$ – логарифмическая производная гамма-функции, а 1-периодические функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi_i(x) &= \min_{0 \leq y < 1} \widehat{\varphi}_i(x, y), \\ \widehat{\varphi}_i(x, y) &= -\{(\gamma + \alpha)x + y\} + \{(\gamma + \alpha)x\} + \{y\} \\ &\quad - \left\{(\gamma - \beta + \alpha)x - \frac{i}{3}\right\} + \left\{(-\beta + \alpha)x + y - \frac{i}{3}\right\} + \{\gamma x - y\},\end{aligned}$$

где $i = 1, 2$.

Целью является получение оценки снизу для модуля величины ε_k , где

$$3^{1/3} \cdot 2^k = M_k + \varepsilon_k, \quad M_k \in \mathbb{Z}, \quad 0 < |\varepsilon_k| < \frac{1}{2}.$$

Представим k в виде $k = 3(\beta m - 1) + 1 + j$ с неотрицательными целыми m и $j < 3\beta$. Умножим (5) на $\widetilde{\Phi}^{-1}2^j3^{[3n/2]}$ и подставим $z = 1/9$:

$$3^{[3n/2]}Q_n(9)\widetilde{\Phi}^{-1}2^jF_B\left(\frac{1}{9}\right) = 3^{[3n/2]}P_n(9)\widetilde{\Phi}^{-1}2^j + R_n\left(\frac{1}{9}\right)3^{[3n/2]}\widetilde{\Phi}^{-1}2^j. \quad (23)$$

Из (3) видим, что

$$2^jF_B\left(\frac{1}{9}\right) \equiv 3^{1/3}2^{3B+1+j} \pmod{\mathbb{Z}} = 3^{1/3}2^k,$$

так что левая часть последнего равенства представляется в виде $M'_k + \varepsilon_k$ для некоторого $M'_k \in \mathbb{Z}$ и равенство (23) можно записать в виде

$$3^{[3n/2]}Q_n(9)\widetilde{\Phi}^{-1} \cdot \varepsilon_k = M''_k + R_n\left(\frac{1}{9}\right)3^{[3n/2]}\widetilde{\Phi}^{-1}2^j, \quad (24)$$

где

$$M''_k = 3^{[3n/2]}P_n(9)\widetilde{\Phi}^{-1}2^j - 3^{[3n/2]}Q_n(9)\widetilde{\Phi}^{-1}M'_k \in \mathbb{Z},$$

согласно лемме 4. В свою очередь, лемма 2 гарантирует $M''_k \neq 0$ для хотя бы одного из чисел $n = \gamma t$ или $\gamma t + 1$; фиксируем соответствующий выбор n . Предполагая далее, что

$$C_0\left(\frac{1}{9}\right) - C_2 + \left(\frac{3\gamma}{2}\right)\log 3 < 0, \quad (25)$$

из (21) и (22) получаем

$$\left|R_n\left(\frac{1}{9}\right)\widetilde{\Phi}^{-1}3^{[3n/2]}2^j\right| < \frac{1}{2} \quad \text{для всех } m \geq N_1,$$

где N_1 – некоторая эффективная постоянная. Следовательно, из (24), учитывая $|M''_k| > 0$, получаем

$$|3^{[3n/2]}Q_n(9)\widetilde{\Phi}^{-1}| \cdot |\varepsilon_k| \geq |M''_k| - \left|R_n\left(\frac{1}{9}\right)\widetilde{\Phi}^{-1}3^{[3n/2]}2^j\right| > \frac{1}{2},$$

так что, учитывая (20), (22) и записывая $\tilde{C}_1 = C_1 + (3\gamma/2) \log 3$, получаем

$$|\varepsilon_k| > \frac{\tilde{\Phi}}{2|3^{[3n/2]}Q_n(9)|} > e^{-m(\tilde{C}_1(1/9) - C_2 + \delta)},$$

для любого $\delta > 0$ и $m > N_2(\delta)$ при условии, что $\tilde{C}_1(1/9) - C_2 + \delta > 0$; здесь число $N_2(\delta)$ эффективно зависит от δ . Наконец, ввиду $k > 3\beta m - 3$ получаем оценку

$$|\varepsilon_k| > e^{-k(\tilde{C}_1(1/9) - C_2 + \delta)/(3\beta)}, \quad (26)$$

справедливую при всех $k > K_0(\delta)$, где $K_0(\delta)$ может быть явно выражена в терминах величины $\max(N_1, N_2(\delta))$.

Выбирая значения $\alpha = \gamma = 4$, $\beta = 7$ и значение $c = 0.0372 \dots$ в (20), находим

$$C_0\left(\frac{1}{9}\right) = -5.601392478500\dots, \quad C_1\left(\frac{1}{9}\right) = 16.38920443337\dots,$$

и набор интервалов: для $r_p = 1$

$$\left[\frac{8}{33}, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{8}\right) \cup \left[\frac{14}{33}, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{20}{33}, \frac{5}{8}\right) \cup \left[\frac{23}{33}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{32}{33}, 1\right),$$

для $r_p = 2$

$$\left[\frac{4}{33}, \frac{1}{8}\right) \cup \left[\frac{7}{33}, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{16}{33}, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right) \cup \left[\frac{28}{33}, \frac{7}{8}\right) \cup \left[\frac{31}{33}, 1\right),$$

откуда

$$C_2 = 1.34311237783\dots$$

Теперь проверяем условие (25):

$$C_0\left(\frac{1}{9}\right) + \frac{3\gamma}{2} \log 3 - C_2 = -0.352831123491\dots$$

и с выбором $\delta = 0.000210078869\dots$ имеем

$$e^{-(\tilde{C}_1(1/9) - C_2 + \delta)/(3\beta)} = 0.3568.$$

Автор выражает благодарность Вадиму Валентиновичу Зудилину за непрекращающееся научное руководство и Игорю Рочеву за помощь в подготовке статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] K. Mahler, "On the fractional parts of powers of real numbers. II", *Mathematika*, **4** (1957), 122–124.
- [2] A. Baker, J. Coates, "Fractional parts of powers of rationals", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **77** (1975), 269–279.
- [3] F. Beukers, "Fractional parts of powers of rationals", *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **90**:1 (1981), 13–20.
- [4] А. К. Дубицкас, "Оценка снизу величины $\|(3/2)^k\|$ ", *УМН*, **45**:4 (1990), 153–154.

- [5] L. Habsieger, “Explicit lower bounds for $\|(3/2)^k\|$ ”, *Acta Arith.*, **106**:3 (2003), 299–309.
- [6] W. Zudilin, “A new lower bound for $\|(3/2)^k\|$ ”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **19**:1 (2007), 311–323.
- [7] Ю. А. Пупырев, “Эффективизация нижней оценки для $\|(4/3)^k\|$ ”, *Матем. заметки*, **85**:6 (2009), 927–935.
- [8] G. V. Chudnovsky, “On the method of Thue–Siegel”, *Ann. of Math. (2)*, **117**:2 (1983), 325–382.
- [9] L. J. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.

Ю. А. Пупырев

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: pupyrev@mi.ras.ru

Поступило

12.02.2009