Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Шичанг Шу, Анни Йи Хан, Гиперповерхности неотрицательной секционной кривизны в действительной пространственной форме, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 5, 776–793

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8517>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 05:11:31

Гиперповерхности неотрицательной секционной кривизны в действительной пространственной форме

Шичанг Шу, Анни Йи Хан

В данной статье исследуются гиперповерхности неотрицательной секционной кривизны (кривизны в двумерном направлении) в действительной пространственной форме $M^{n+1}(c)$. Получены некоторые строгие результаты для гиперповерхностей неотрицательной секционной кривизны в $M^{n+1}(c)$, имеющих постоянную среднюю или постоянную скалярную кривизну. В частности, приведены некоторые характеристики риманова произведения $S^k(a) \times S^{n-k}(\sqrt{1-a^2})$, $1 \leq k \leq n-1$, в $S^{n+1}(1)$ и риманова произведения $H^k(\text{th}^2 r - 1) \times S^{n-k}(\text{cth}^2 r - 1)$, $1 \leq k \leq n-1$, в $H^{n+1}(-1)$.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Пусть $M^{n+1}(c)$ – $(n+1)$ -мерное связное риманово многообразие постоянной секционной кривизны c . При $c > 0$, $c = 0$, или $c < 0$, это многообразие будет, соответственно, сферическим пространством, евклидовым пространством, или гиперболическим пространством, и будет обозначаться как $S^{n+1}(c)$, $\mathbb{R}^{n+1}$, или $H^{n+1}(c)$, соответственно. Как известно, имеется множество строгих результатов для случая гиперповерхностей постоянной средней кривизны или постоянной скалярной кривизны в $S^{n+1}(c)$ или в $\mathbb{R}^{n+1}$; см., например, [1]–[7] и т.д., но гораздо меньшее число результатов получено для случая гиперповерхностей, погруженных в гиперболическое пространство.

Для гиперповерхностей постоянной средней кривизны и неотрицательной секционной кривизны в $\mathbb{R}^{n+1}$ или в $S^{n+1}(c)$ Чжень и Яу [7], а также Номизу и Смит [8] доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.1 [7]. Пусть M – n -мерная полная связная ориентируемая гиперповерхность постоянной средней кривизны в $(n+1)$ -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Если M имеет неотрицательную секционную кривизну, то M изометрична стандартной сфере, гиперплоскости $\mathbb{R}^n$ или риманову произведению $\mathbb{R}^k \times S^{n-k}(c)$, где $1 \leq k \leq n-1$.

ТЕОРЕМА 1.2 [8]. Пусть M – n -мерная связная ориентируемая гиперповерхность постоянной средней кривизны в $(n+1)$ -мерной единичной сфере $S^{n+1}(1)$.

Работа выполнена при поддержке Национального научного фонда провинции Шенси (грант № SJ08A31) и Национального научного фонда Комитета образования провинции Шенси (грант № 2008JK484).

(1) Если M – компактная гиперповерхность неотрицательной секционной кривизны, то M изометрична вполне омбилической сфере или риманову произведению $S^{n-k}(c_1) \times S^k(c_2)$ сфер, где $1 \leq k \leq n-1$.

(2) Если M – полная гиперповерхность постоянной скалярной кривизны и неотрицательной секционной кривизны, то M изометрична вполне омбилической сфере или риманову произведению $S^{n-k}(c_1) \times S^k(c_2)$ сфер, где $1 \leq k \leq n-1$.

Если M – n -мерная гиперповерхность постоянной средней кривизны и неотрицательной секционной кривизны в $(n+1)$ -мерном гиперболическом пространстве $H^{n+1}(-1)$, то мы получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть M – n -мерная связная ориентируемая гиперповерхность постоянной средней кривизны H в $(n+1)$ -мерном гиперболическом пространстве $H^{n+1}(-1)$.

(1) Если M – компактная гиперповерхность неотрицательной секционной кривизны, то M изометрична вполне омбилической сфере.

(2) Если M – полная гиперповерхность постоянной скалярной кривизны и неотрицательной секционной кривизны и $H^2 > 1$, то M изометрична вполне омбилической сфере или риманову произведению

$$H^1(\lambda^2 - 1) \times S^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right), \quad \text{где } \lambda = \frac{1}{2}[nH \pm \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}],$$

или риманову произведению

$$H^{n-1}(\lambda^2 - 1) \times S^1\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right), \quad \text{где } \lambda = \frac{1}{2(n-1)}[nH \pm \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}].$$

Очевидно, из теорем 1.1–1.3 можно получить следующие утверждения, характеризующие римановы произведения $\mathbb{R}^k \times S^{n-k}(c)$, $S^{n-k}(c_1) \times S^k(c_2)$ и $H^1(\lambda^2 - 1) \times S^{n-1}(1/\lambda^2 - 1)$ или $H^{n-1}(\lambda^2 - 1) \times S^1(1/\lambda^2 - 1)$ в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S^{n+1}(1)$ и $H^{n+1}(-1)$ соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Пусть M – n -мерная полная связная ориентируемая гиперповерхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, имеющая постоянную среднюю кривизну и две различные главные кривизны. Если M – гиперповерхность неотрицательной секционной кривизны, то M изометрична риманову произведению $\mathbb{R}^k \times S^{n-k}(c)$, где $1 \leq k \leq n-1$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Пусть M – n -мерная связная ориентируемая гиперповерхность в единичной сфере $S^{n+1}(1)$, имеющая постоянную среднюю кривизну и две различные главные кривизны.

(1) Если M – компактная гиперповерхность неотрицательной секционной кривизны, то M изометрична риманову произведению $S^{n-k}(c_1) \times S^k(c_2)$ сфер, где $1 \leq k \leq n-1$.

(2) Если M – полная гиперповерхность постоянной скалярной кривизны и неотрицательной секционной кривизны, то M изометрична риманову произведению $S^{n-k}(c_1) \times S^k(c_2)$ сфер, где $1 \leq k \leq n-1$.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. Пусть M – n -мерная связная ориентируемая гиперповерхность в гиперболическом пространстве $H^{n+1}(-1)$, имеющая постоянную среднюю

кривизну H ($H^2 > 1$) и две различные главные кривизны, одна из которых простая. Если скалярная кривизна гиперповерхности M постоянна, а секционная кривизна неотрицательна, то M изометрична риманову произведению

$$H^1(\lambda^2 - 1) \times S^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right), \quad \text{где } \lambda = \frac{1}{2}[nH \pm \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)}],$$

или риманову произведению

$$H^{n-1}(\lambda^2 - 1) \times S^1\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right), \quad \text{где } \lambda = \frac{1}{2(n-1)}[nH \pm \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)}].$$

Заметим, условие, что M компактна или что скалярная кривизна полной гиперповерхности M постоянна, играет очень важную роль в доказательстве теорем 1.2 и 1.3, а также в доказательстве следствий 1.2 и 1.3. Однако в данной работе мы докажем, что этим условием можно пренебречь в доказательстве следствий 1.2 и 1.3. Сформулируем наши результаты следующим образом.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть M – n -мерная полная связная ориентируемая гиперповерхность в единичной сфере $S^{n+1}(1)$, имеющая постоянную среднюю кривизну и две различные главные кривизны. Если секционная кривизна гиперповерхности M неотрицательна, то M изометрична риманову произведению

$$S^k(a) \times S^{n-k}(\sqrt{1-a^2}), \quad \text{где } 1 < k < n-1,$$

или риманову произведению

$$S^1(a) \times S^{n-1}(\sqrt{1-a^2}), \quad \text{где } a^2 = \frac{2 + nH^2 \mp \sqrt{n^2 H^4 + 4(n-1)H^2}}{2n(1+H^2)}.$$

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть M – n -мерная полная связная ориентируемая гиперповерхность в гиперболическом пространстве $H^{n+1}(-1)$, имеющая постоянную среднюю кривизну H ($H^2 > 1$) и две различные главные кривизны. Если секционная кривизна гиперповерхности M неотрицательна, то M изометрична риманову произведению

$$H^k(\operatorname{th}^2 r - 1) \times S^{n-k}(\operatorname{cth}^2 r - 1), \quad \text{где } 1 < k < n-1,$$

или риманову произведению

$$H^1(\lambda^2 - 1) \times S^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right), \quad \text{где } \lambda = \frac{1}{2}[nH \pm \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)}],$$

или риманову произведению

$$H^{n-1}(\lambda^2 - 1) \times S^1\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right), \quad \text{где } \lambda = \frac{1}{2(n-1)}[nH \pm \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)}].$$

Теперь рассмотрим гиперповерхности постоянной скалярной кривизны и неотрицательной секционной кривизны в $\mathbb{R}^{n+1}$, $S^{n+1}(1)$ или $H^{n+1}(-1)$. В работах Чжень и Яу [6], а также Лиу и Су [9] получены следующие результаты.

ТЕОРЕМА 1.6 [6]. Пусть M – n -мерная полная связная ориентируемая гиперповерхность постоянной скалярной кривизны $n(n-1)R$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. Если секционная кривизна гиперповерхности M неотрицательна, то M изометрична стандартной сфере, гиперплоскости $\mathbb{R}^n$ или риманову произведению $\mathbb{R}^k \times S^{n-k}(c)$, где $1 \leq k \leq n-1$.

ТЕОРЕМА 1.7 [6]. Пусть M – n -мерная компактная гиперповерхность постоянной скалярной кривизны $n(n-1)R$, $R \geq 1$, в единичной сфере $S^{n+1}(1)$. Если секционная кривизна гиперповерхности M неотрицательна, то M изометрична омбилической гиперповерхности или риманову произведению $S^k(c_1) \times S^{n-k}(c_2)$, где $1 \leq k \leq n-1$.

ТЕОРЕМА 1.8 [9]. Пусть M – n -мерная компактная гиперповерхность постоянной скалярной кривизны $n(n-1)R$, $R \geq -1$, в гиперболическом пространстве $H^{n+1}(-1)$. Если секционная кривизна гиперповерхности M неотрицательна, то M изометрична омбилической гиперповерхности.

Из теорем 1.6 и 1.7 легко получить следующие утверждения.

СЛЕДСТВИЕ 1.4. Пусть M – n -мерная полная связная ориентируемая гиперповерхность в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, имеющая постоянную скалярную кривизну $n(n-1)R$ и две различные главные кривизны. Если секционная кривизна гиперповерхности M неотрицательна, то M изометрична риманову произведению $\mathbb{R}^k \times S^{n-k}(c)$, где $1 \leq k \leq n-1$.

СЛЕДСТВИЕ 1.5. Пусть M – n -мерная компактная связная ориентируемая гиперповерхность в единичной сфере $S^{n+1}(1)$, имеющая постоянную скалярную кривизну $n(n-1)R$, $R \geq 1$, и две различные главные кривизны. Если секционная кривизна гиперповерхности M неотрицательна, то M изометрична риманову произведению $S^{n-k}(c_1) \times S^k(c_2)$ сфер, где $1 \leq k \leq n-1$.

Заметим, что условия $R \geq 1$ и $R \geq -1$ играют важную роль в доказательстве теорем 1.7 и 1.8. С другой стороны, для любого $0 < a < 1$, рассматривая стандартные вложения $S^{n-1}(a) \subset \mathbb{R}^n$ и $S^1(\sqrt{1-a^2}) \subset \mathbb{R}^2$ и вложение риманова произведения $S^1(\sqrt{1-a^2}) \times S^{n-1}(a) \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n$, можно получить гиперповерхность $S^1(\sqrt{1-a^2}) \times S^{n-1}(a)$ в $S^{n+1}(1)$, имеющую постоянную скалярную кривизну $n(n-1)R$, где $R = (n-2)/na^2 > 1 - 2/n$. Следовательно, не все римановы произведения $S^1(\sqrt{1-a^2}) \times S^{n-1}(a)$ фигурируют в формулировке результата теоремы 1.7.

Далее, обобщим следствие 1.5 на случай полных гиперповерхностей и исключим условие $R \geq 1$. Получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.9. Пусть M – n -мерная ($n \geq 3$) полная связная ориентируемая гиперповерхность в единичной сфере $S^{n+1}(1)$, имеющая ненулевую постоянную скалярную кривизну $n(n-1)R$ и две различные главные кривизны. Если секционная кривизна гиперповерхности M неотрицательна, то M изометрична риманову произведению $S^k(a) \times S^{n-k}(\sqrt{1-a^2})$, где $1 < k < n-1$, или риманову произведению $S^{n-1}(a) \times S^1(\sqrt{1-a^2})$, где $a^2 = (n-2)/nR$.

Для гиперповерхностей постоянной скалярной кривизны и неотрицательной секционной кривизны в гиперболическом пространстве $H^{n+1}(-1)$ получим следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.10. Пусть M – n -мерная ($n \geq 3$) полная связная ориентируемая гиперповерхность в гиперболическом пространстве $H^{n+1}(-1)$, имеющая ненулевую постоянную скалярную кривизну $n(n-1)R$ и две различные главные кривизны, одна из которых простая. Если главная кривизна кратности $n-1$ не равна нулю и секционная кривизна гиперповерхности M неотрицательна, то M изометрична риманову произведению

$$H^1(\lambda^2 - 1) \times S^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right), \quad \text{где } \lambda^2 = \frac{n-2}{n(R+1)-2}$$

или риманову произведению

$$H^{n-1}(\lambda^2 - 1) \times S^1\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right), \quad \text{где } \lambda^2 = \frac{n(R+1)-2}{n-2}.$$

2. Предварительные сведения. Пусть $M^{n+1}(c)$ – $(n+1)$ -мерное связное риманово многообразие постоянной секционной кривизны c . Пусть M – n -мерная гиперповерхность в $M^{n+1}(c)$. Выберем локальный ортонормированный репер $e_1, \dots, e_{n+1}$ в $M^{n+1}(c)$ так, чтобы $e_1, \dots, e_n$ были касательны к M . Пусть $\omega_1, \dots, \omega_{n+1}$ – двойственный корепер. Воспользуемся обычными условиями относительно областей изменения индексов:

$$1 \leq A, B, C, \dots \leq n+1, \quad 1 \leq i, j, k, \dots \leq n.$$

Структурные уравнения для многообразия $M^{n+1}(c)$ имеют вид

$$d\omega_A = \sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B, \quad \omega_{AB} + \omega_{BA} = 0, \quad (2.1)$$

$$d\omega_{AB} = \sum_C \omega_{AC} \wedge \omega_{CB} + \Omega_{AB}, \quad (2.2)$$

где

$$\Omega_{AB} = -\frac{1}{2} \sum_{C,D} K_{ABCD} \omega_C \wedge \omega_D, \quad (2.3)$$

$$K_{ABCD} = c(\delta_{AC}\delta_{BD} - \delta_{AD}\delta_{BC}). \quad (2.4)$$

В более узком случае гиперповерхности M имеем

$$\omega_{n+1} = 0, \quad (2.5)$$

$$\omega_{n+1i} = \sum_j h_{ij} \omega_j, \quad h_{ij} = h_{ji}. \quad (2.6)$$

Структурные уравнения для M имеют вид

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \quad (2.7)$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} - \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl} \omega_k \wedge \omega_l, \quad (2.8)$$

$$R_{ijkl} = c(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) + (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}), \quad (2.9)$$

$$R_{ij} = (n-1)c\delta_{ij} + nHh_{ij} - \sum_k h_{ik}h_{kj}, \quad (2.10)$$

$$n(n-1)(R-c) = n^2H^2 - |h|^2, \quad (2.11)$$

где $n(n-1)R$ – скалярная кривизна, H – средняя кривизна и $|h|^2$ – квадрат нормы второй фундаментальной формы гиперповерхности M .

Уравнение Кодацци и тождество Риччи имеют вид

$$h_{ijk} = h_{ikj}, \quad (2.12)$$

$$h_{ijkl} - h_{ijlk} = \sum_m h_{mj}R_{mikl} + \sum_m h_{im}R_{mjkl}, \quad (2.13)$$

где h_{ijk} и h_{ijkl} – первая и вторая ковариантные производные от h_{ij} .

Выберем $e_1, \dots, e_n$ так, чтобы $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$. Из (2.6) следует, что

$$\omega_{n+1i} = \lambda_i\omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.14)$$

Таким образом, из структурных уравнений для M получим

$$d\omega_{n+1i} = d\lambda_i \wedge \omega_i + \lambda_i d\omega_i = d\lambda_i \wedge \omega_i + \lambda_i \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j. \quad (2.15)$$

С другой стороны, на формах кривизны многообразия $M^{n+1}(c)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \Omega_{n+1i} &= -\frac{1}{2} \sum_{C,D} K_{n+1iCD} \omega_C \wedge \omega_D \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{C,D} c(\delta_{n+1C}\delta_{iD} - \delta_{n+1D}\delta_{iC}) \omega_C \wedge \omega_D = -c\omega_{n+1} \wedge \omega_i = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Поэтому из структурных уравнений для $M^{n+1}(c)$ следует, что

$$d\omega_{n+1i} = \sum_j \omega_{n+1j} \wedge \omega_{ji} + \omega_{n+1n+1} \wedge \omega_{n+1i} + \Omega_{n+1i} = \sum_j \lambda_j \omega_{ij} \wedge \omega_j. \quad (2.17)$$

Из (2.15) и (2.17) получим

$$d\lambda_i \wedge \omega_i + \sum_j (\lambda_i - \lambda_j) \omega_{ij} \wedge \omega_j = 0. \quad (2.18)$$

Положим

$$\psi_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) \omega_{ij}. \quad (2.19)$$

Тогда $\psi_{ij} = \psi_{ji}$ и (2.18) можно записать в виде

$$\sum_j (\psi_{ij} + \delta_{ij} d\lambda_j) \wedge \omega_j = 0. \quad (2.20)$$

Из леммы Картана следует, что

$$\psi_{ij} + \delta_{ij} d\lambda_j = \sum_k Q_{ijk} \omega_k, \quad (2.21)$$

где Q_{ijk} – однозначно определенные функции такие, что

$$Q_{ijk} = Q_{ikj}. \quad (2.22)$$

Рассмотрим следующие важные примеры.

ПРИМЕР 2.1. Пусть $M_{k,n-k} := S^k(a) \times S^{n-k}(\sqrt{1-a^2})$. Тогда $M_{k,n-k}$ имеет две различные постоянные главные кривизны:

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-k} = \lambda = -\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}, \quad \lambda_{n-k+1} = \dots = \lambda_n = \mu = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}.$$

При $k = 1$, т.е. для $M_{1,n-1} := S^1(a) \times S^{n-1}(\sqrt{1-a^2})$, постоянная средняя кривизна удовлетворяет условию

$$H = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda_i = \frac{1-na^2}{na\sqrt{1-a^2}}, \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{2+nH^2 \mp \sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2}}{2n(1+H^2)}.$$

Квадрат нормы второй фундаментальной формы для $M_{1,n-1}$ удовлетворяет условию

$$|h|^2 = n + \frac{n^3H^2}{2(n-1)} \pm \frac{n(n-2)}{2(n-1)} \sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2}.$$

Также известно, что скалярная кривизна $n(n-1)R$ постоянна и

$$|h|^2 = (n-1) \frac{n(R-1)+2}{n-2} + \frac{n-2}{n(R-1)+2}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $a^2 = (nR+2-n)/nR$ и $R > 1-2/n$ для $M_{1,n-1} := S^1(a) \times S^{n-1}(\sqrt{1-a^2})$.

ПРИМЕР 2.2. Пусть

$$T_{k,r} := \{x \in H^{n+1}(-1) \mid -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_k^2 = -\operatorname{ch}^2 r\}, \quad r > 0, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

Тогда $T_{k,r}$ имеет две различные главные кривизны:

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \operatorname{th} r, \quad \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = \operatorname{cth} r.$$

Кроме того, $T_{k,r}$ полна и изометрична риманову произведению $H^k(\operatorname{th}^2 r - 1) \times S^{n-k}(\operatorname{cth}^2 r - 1)$, а также $T_{k,r}$ имеет постоянную среднюю кривизну и постоянную скалярную кривизну. В частности, если $k = 1$ и $k = n-1$, как для

$$T_{1,r} = H^1(\lambda^2 - 1) \times S^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right), \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{1}{2}[nH \pm \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}],$$

так и для

$$T_{n-1,r} = H^{n-1}(\lambda^2 - 1) \times S^1\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right), \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{1}{2(n-1)}[nH \pm \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}],$$

то

$$|h|^2 = -n + \frac{n^3 H^2}{2(n-1)} \pm \frac{n(n-2)}{2(n-1)} \sqrt{n^2 H^4 - 4(n-1)H^2},$$

или в обоих случаях,

$$\begin{aligned} T_{1,r} &= H^1(\lambda^2 - 1) \times S^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1 \right), & \text{где } \lambda^2 &= \frac{n-2}{n(R+1)-2}, \\ T_{n-1,r} &= H^{n-1}(\lambda^2 - 1) \times S^1 \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1 \right), & \text{где } \lambda^2 &= \frac{n(R+1)-2}{n-2}, \end{aligned}$$

имеем

$$|h|^2 = (n-1) \frac{n(R+1)-2}{n-2} + \frac{n-2}{n(R+1)-2}.$$

3. Доказательства теорем. В этом пункте мы сначала рассмотрим гиперповерхности постоянной средней кривизны и неотрицательной секционной кривизны в $S^{n+1}(1)$ и $H^{n+1}(-1)$ и полностью докажем теоремы 1.3 и 1.4. Введем оператор $\square$ в смысле Чжэня и Яу [6] следующим образом:

$$\square f = \sum_{i,j} (nH\delta_{ij} - h_{ij})f_{ij}, \quad (3.1)$$

где f – некоторая C^2 -функция на M^n , для которой градиент и гессиан (f_{ij}) определены соотношениями

$$df = \sum_i f_i \omega_i, \quad \sum_j f_{ij} \omega_j = df_i + \sum_j f_j \omega_{ji}. \quad (3.2)$$

Лапласиан функции f задается соотношением $\Delta f = \sum_i f_{ii}$. Известно [6], что оператор $\square$ является самосопряженным только если M компактна, т.е.,

$$\int_M g \square f = \int_M f \square g.$$

Выберем поле локальных реперов $e_1, \dots, e_n$ в каждой точке M^n так, чтобы $h_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Из (3.1) и (2.11) следует, что

$$\begin{aligned} \square(nH) &= nH\Delta(nH) - \sum_i \lambda_i(nH)_{ii} = \frac{1}{2} \Delta(nH)^2 - \sum_i (nH)_i^2 - \sum_i \lambda_i(nH)_{ii} \\ &= \frac{1}{2} \Delta|h|^2 + \frac{1}{2} n(n-1)\Delta R - n^2|\nabla H|^2 - \sum_i \lambda_i(nH)_{ii}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

После непосредственных стандартных вычислений из (2.12) и (2.13) получим

$$\frac{1}{2} \Delta|h|^2 = \sum_{i,j,k} h_{ijk}^2 + \sum_i \lambda_i(nH)_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i - \lambda_j)^2, \quad (3.4)$$

где $R_{ijij} = c + \lambda_i \lambda_j$, $i \neq j$, – секционная кривизна сечения, натянутого на векторы $\{e_i, e_j\}$. Из (3.3) и (3.4) получим

$$\square(nH) = \frac{1}{2} n(n-1)\Delta R + |\nabla h|^2 - n^2|\nabla H|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (c + \lambda_i \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2. \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Пусть M – гиперповерхность постоянной средней кривизны и неотрицательной секционной кривизны в $H^{n+1}(-1)$.

(1) Если M компактна, то оператор $\square$ самосопряженный. Из (3.5) следует, что для любых различных индексов i и j

$$(-1 + \lambda_i \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0. \quad (3.6)$$

Простыми алгебраическими вычислениями легко проверить, что в $\{\lambda_i\}$ может быть самое большее две различных главных кривизны. Если все λ_i совпадают друг с другом, то M – вполне омбилическая гиперповерхность. Если $\{\lambda_i\}$ содержит в точности два различных элемента, то из (3.6) следует, что M изопараметрична. Применяя результаты, полученные Картаном [10], можно заключить, что M остается вполне омбилической, поскольку M компактна.

(2) Если M – полная гиперповерхность постоянной скалярной кривизны $n(n-1)R$, то соотношение (3.6) также выполняется. Если все λ_i совпадают друг с другом, то M – вполне омбилическая гиперповерхность. Если $\{\lambda_i\}$ содержит в точности два различных элемента, то, без ограничения общности, можно положить

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \lambda, \quad \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = \mu, \quad \lambda \neq \mu,$$

для некоторых $k = 1, 2, \dots, n-1$. Из (3.6) следует, что

$$\lambda\mu = 1. \quad (3.7)$$

Пусть $k \geq 2$ и $n-k \geq 2$. Из неравенства $R_{ijij} = (-1 + \lambda_i \lambda_j) \geq 0$ получим, что

$$-1 + \lambda^2 \geq 0, \quad -1 + \mu^2 \geq 0. \quad (3.8)$$

В силу (3.7) и (3.8) имеем $1 = \lambda^2 \mu^2 \geq \mu^2$ и $1 = \lambda^2 \mu^2 \geq \lambda^2$. Таким образом, из (3.8) снова следует, что $\lambda^2 = \mu^2 = 1$. Так как $\lambda \neq \mu$, имеем $\lambda = -\mu$. Подставляя это соотношение в (3.7), получим $-\mu^2 = 1$ и приходим к противоречию. Поэтому должно быть или $k = 1$ или $k = n-1$. При $k = 1$, поскольку из $H^2 > 1$ следует, что $n^2 H^2 > 4(n-1)$; из соотношения $nH = \lambda + (n-1)\mu$ и из (3.7) получим

$$\lambda = \frac{nH \pm \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)}}{2}, \quad \mu = \frac{2}{nH \pm \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)}}. \quad (3.9)$$

Следовательно, ясно, что M изопараметрична. Применяя результаты, полученные Картаном [10], можно заключить, что M изометрична риманову произведению

$$H^1(\lambda^2 - 1) \times S^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right), \quad \text{где } \lambda = \frac{1}{2}[nH \pm \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)}].$$

Если $k = n-1$, то из $nH = (n-1)\lambda + \mu$ и (3.7) следует, что

$$\lambda = \frac{nH \pm \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)}}{2(n-1)}, \quad \mu = \frac{2(n-1)}{nH \pm \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)}}. \quad (3.10)$$

Поэтому ясно, что M изопараметрична. Применяя результаты, полученные Картаном [10], мы видим, что M изометрична риманову произведению

$$H^{n-1}(\lambda^2 - 1) \times S^1\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right), \quad \text{где } \lambda = \frac{1}{2(n-1)}[nH \pm \sqrt{n^2 H^2 - 4(n-1)}].$$

Таким образом, теорема 1.3 полностью доказана.

Теперь докажем теоремы 1.4 и 1.5. Сначала приведем следующее предложение 3.1, впервые доказанное Оцуки [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1 [11]. Пусть M – гиперповерхность в действительной пространственной форме $M^{n+1}(c)$ такая, что кратность каждой главной кривизны постоянна. Тогда распределение пространства главных векторов, отвечающих каждой главной кривизне, вполне интегрируемо. В частности, если кратность главной кривизны больше, чем 1, то эта главная кривизна постоянна на каждом интегральном подмногообразии соответствующего распределения пространства главных векторов.

Из предложения 3.1 легко получить следующее утверждение (см. [12] для случая $c = 1$).

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть M – n -мерная полная связная ориентированная гиперповерхность в $M^{n+1}(c)$, имеющая постоянную среднюю кривизну H и две различные главные кривизны. Если кратность каждой различной главной кривизны из имеющих двух больше, чем 1, то

- (1) при $c = 0$ M изометрична риманову произведению $\mathbb{R}^k \times S^{n-k}(c)$, где $1 < k < n - 1$;
- (2) при $c = 1$ M изометрична риманову произведению $S^k(a) \times S^{n-k}(\sqrt{1-a^2})$, где $1 < k < n - 1$;
- (3) при $c = -1$ M изометрична риманову произведению

$$H^k(\operatorname{th}^2 r - 1) \times S^{n-k}(\operatorname{cth}^2 r - 1),$$

где $1 < k < n - 1$.

Здесь и далее, будем рассматривать полные связные гиперповерхности в $M^{n+1}(c)$, имеющие постоянную среднюю кривизну и две различные главные кривизны, одна из которых простая. Без ограничения общности, предположим, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda, \quad \lambda_n = \mu, \quad (3.11)$$

где λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, – главные кривизны гиперповерхности M . Из (3.11) следует, что

$$(n-1)\lambda + \mu = nH. \quad (3.12)$$

Так как

$$\lambda - \mu = n(\lambda - H) \neq 0, \quad (3.13)$$

получим, что $\lambda - H \neq 0$.

Пусть $\varpi = |\lambda - H|^{-1/n}$. Обозначим интегральное подмногообразие точек $x \in M$, соответствующих λ , через $M_1^{n-1}(x)$ и положим

$$d\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_{,k} \omega_k, \quad d\mu = \sum_{k=1}^n \mu_{,k} \omega_k. \quad (3.14)$$

Из предложения 3.1 следует, что

$$\lambda_{,1} = \lambda_{,2} = \dots = \lambda_{,n-1} = 0 \quad \text{на} \quad M_1^{n-1}(x). \quad (3.15)$$

Из (3.12) получим

$$d\mu = -(n-1)d\lambda. \quad (3.16)$$

Следовательно, имеем

$$\mu_{,1} = \mu_{,2} = \cdots = \mu_{,n-1} = 0 \quad \text{на} \quad M_1^{n-1}(x). \quad (3.17)$$

В этом случае можно локально рассматривать λ как функцию длины дуги s интегральной кривой поля главного вектора e_n , соответствующего главной кривизне μ . Из (2.21), (3.14) и (3.15) при $1 \leq j \leq n-1$ получим

$$d\lambda = d\lambda_j = \sum_{k=1}^n Q_{jjk}\omega_k = \sum_{k=1}^{n-1} Q_{jjk}\omega_k + Q_{jjn}\omega_n = \lambda_{,n}\omega_n. \quad (3.18)$$

Поэтому

$$Q_{jjk} = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad \text{и} \quad Q_{jjn} = \lambda_{,n}. \quad (3.19)$$

В силу (2.21), (3.14) и (3.17) получим

$$d\mu = d\lambda_n = \sum_{k=1}^n Q_{nnk}\omega_k = \sum_{k=1}^{n-1} Q_{nnk}\omega_k + Q_{nnn}\omega_n = \sum_{i=1}^n \mu_{,i}\omega_i = \mu_{,n}\omega_n. \quad (3.20)$$

Следовательно,

$$Q_{nnk} = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad \text{и} \quad Q_{nnn} = \mu_{,n}. \quad (3.21)$$

Из (3.16) следует

$$Q_{nnn} = \mu_{,n} = -(n-1)\lambda_{,n}. \quad (3.22)$$

Из определения ψ_{ij} следует, что если $i \neq j$, то $\psi_{ij} = 0$ при $1 \leq i \leq n-1$ и $1 \leq j \leq n-1$. Поэтому из (2.21) при $i \neq j$, $1 \leq i \leq n-1$ и $1 \leq j \leq n-1$ получим

$$Q_{ijk} = 0 \quad \text{для любых} \quad k. \quad (3.23)$$

В силу (2.21), (3.19), (3.21), (3.22) и (3.23) имеем

$$\psi_{jn} = \sum_{k=1}^n Q_{jnk}\omega_k = Q_{jjn}\omega_j + Q_{jnn}\omega_n = \lambda_{,n}\omega_j. \quad (3.24)$$

Из (2.19), (3.13) и (3.24) следует, что

$$\omega_{jn} = \frac{\psi_{jn}}{\lambda - \mu} = \frac{\lambda_{,n}}{\lambda - \mu} \omega_j = \frac{\lambda_{,n}}{n(\lambda - H)} \omega_j. \quad (3.25)$$

Следовательно, из структурных уравнений для M получим

$$d\omega_n = \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k \wedge \omega_{kn} + \omega_{nn} \wedge \omega_n = 0.$$

Поэтому можно положить $\omega_n = ds$. В силу (3.18) и (3.20) имеем

$$d\lambda = \lambda_{,n} ds, \quad \lambda_{,n} = \frac{d\lambda}{ds}, \quad d\mu = \mu_{,n} ds, \quad \mu_{,n} = \frac{d\mu}{ds}.$$

Таким образом,

$$\omega_{jn} = \frac{\lambda_{,n}}{n(\lambda - H)} \omega_j = \frac{d\lambda/ds}{n(\lambda - H)} \omega_j = \frac{d\{\log |\lambda - H|^{1/n}\}}{ds} \omega_j. \quad (3.26)$$

Из (3.26) и структурных уравнений для $M^{n+1}(c)$ получим

$$\begin{aligned} d\omega_{jn} &= \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{jk} \wedge \omega_{kn} + \omega_{jn} \wedge \omega_{nn} + \omega_{jn+1} \wedge \omega_{n+1n} + \Omega_{jn} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{jk} \wedge \omega_{kn} + \omega_{jn+1} \wedge \omega_{n+1n} - c\omega_j \wedge \omega_n \\ &= \frac{d\{\log |\lambda - H|^{1/n}\}}{ds} \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{jk} \wedge \omega_k - (\lambda\mu + c)\omega_j \wedge ds. \end{aligned}$$

Из (3.26) следует, что

$$\begin{aligned} d\omega_{jn} &= \frac{d^2\{\log |\lambda - H|^{1/n}\}}{ds^2} ds \wedge \omega_j + \frac{d\{\log |\lambda - H|^{1/n}\}}{ds} d\omega_j \\ &= \frac{d^2\{\log |\lambda - H|^{1/n}\}}{ds^2} ds \wedge \omega_j + \frac{d\{\log |\lambda - H|^{1/n}\}}{ds} \sum_{k=1}^n \omega_{jk} \wedge \omega_k \\ &= \left\{ -\frac{d^2\{\log |\lambda - H|^{1/n}\}}{ds^2} + \left[\frac{d\{\log |\lambda - H|^{1/n}\}}{ds} \right]^2 \right\} \omega_j \wedge ds \\ &\quad + \frac{d\{\log |\lambda - H|^{1/n}\}}{ds} \sum_{k=1}^{n-1} \omega_{jk} \wedge \omega_k. \end{aligned}$$

Из этих двух равенств получим

$$\frac{d^2\{\log |\lambda - H|^{1/n}\}}{ds^2} - \left\{ \frac{d\{\log |\lambda - H|^{1/n}\}}{ds} \right\}^2 - (\lambda\mu + c) = 0. \quad (3.27)$$

В силу определения $\varpi = |\lambda - H|^{-1/n}$ из предыдущего равенства следует, что

$$\frac{d^2\varpi}{ds^2} + \varpi(\lambda\mu + c) = 0. \quad (3.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1.4 и 1.5. Если кратность каждой различной главной кривизны из имеющихся двух больше, чем 1, из теоремы 3.1 можно получить следующие утверждения:

- (1) при $c = 1$ M изометрична риманову произведению $S^k(a) \times S^{n-k}(\sqrt{1-a^2})$, где $1 < k < n-1$;
- (2) при $c = -1$ M изометрична риманову произведению

$$H^k(\operatorname{th}^2 r - 1) \times S^{n-k}(\operatorname{cth}^2 r - 1),$$

где $1 < k < n-1$.

Пусть M имеет две различные главные кривизны, одна из которых простая. Можно доказать, что положительная функция $\varpi(s)$ ограничена сверху. Действительно, из определения ϖ , (3.12) и (3.28) получим уравнение

$$\frac{d^2\varpi}{ds^2} + \varpi[c + H^2 + (2-n)H\varpi^{-n} + (1-n)\varpi^{-2n}] = 0 \quad \text{при } \lambda - H > 0$$

или

$$\frac{d^2\varpi}{ds^2} + \varpi[c + H^2 + (n-2)H\varpi^{-n} + (1-n)\varpi^{-2n}] = 0 \quad \text{при } \lambda - H < 0.$$

Таким образом, его интеграл первого порядка имеет вид

$$\left(\frac{d\varpi}{ds}\right)^2 + (c + H^2)\varpi^2 + 2H\varpi^{2-n} + \varpi^{2-2n} = C \quad \text{при } \lambda - H > 0$$

или

$$\left(\frac{d\varpi}{ds}\right)^2 + (c + H^2)\varpi^2 - 2H\varpi^{2-n} + \varpi^{2-2n} = C \quad \text{при } \lambda - H < 0,$$

где C – постоянная. Следовательно, имеем

$$(c + H^2)\varpi^2 + 2H\varpi^{2-n} + \varpi^{2-2n} \leq C \quad \text{при } \lambda - H > 0$$

или

$$(c + H^2)\varpi^2 - 2H\varpi^{2-n} + \varpi^{2-2n} \leq C \quad \text{при } \lambda - H < 0.$$

Если $c = 1$, то $H^2 + 1 > 0$; если $c = -1$, то $-1 + H^2 > 0$, так как по предположению $H^2 > 1$. Отсюда следует, что положительная функция ϖ ограничена сверху.

В предположении, что секционная кривизна неотрицательна, т.е. $R_{ijij} = c + \lambda_i\lambda_j \geq 0$ при $i \neq j$, получим $c + \lambda\mu \geq 0$. Из (3.28) следует, что $d^2\varpi/ds^2 \leq 0$. Таким образом, мы видим, что $d\varpi/ds$ – монотонная функция от $s \in (-\infty, +\infty)$. Поэтому $\varpi(s)$ должна быть монотонной при s стремящемся к бесконечности. Из предыдущего следует, что положительная функция $\varpi(s)$ ограничена сверху. Так как $\varpi(s)$ ограничена и монотонна при s стремящемся к бесконечности, ясно, что существуют оба предела $\lim_{s \rightarrow -\infty} \varpi(s)$ и $\lim_{s \rightarrow +\infty} \varpi(s)$ и мы получим

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{d\varpi(s)}{ds} = \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{d\varpi(s)}{ds} = 0. \quad (3.29)$$

Из того, что $d\varpi(s)/ds$ монотонна, следует, что $d\varpi(s)/ds \equiv 0$ и $\varpi(s) = \text{const}$, а из того, что $\varpi = |\lambda - H|^{-1/n}$, следует, что λ постоянна и, следовательно, μ из (3.12) также постоянна. Поскольку $\varpi(s) (\neq 0)$ постоянна, из (3.28) получим

$$\lambda\mu + c = 0. \quad (3.30)$$

(1) Если $c = 1$, то из (3.12) и (3.30) следует, что

$$\lambda = \frac{nH \pm \sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)}}{2(n-1)}, \quad \mu = -\frac{2(n-1)}{nH \pm \sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)}}.$$

Поэтому ясно, что M изопараметрична. Применяя результаты, полученные Картаном [10], можно заключить, что M изометрична риманову произведению

$$S^1(a) \times S^{n-1}(\sqrt{1-a^2}), \quad \text{где} \quad a^2 = \frac{2+nH^2 \mp \sqrt{n^2H^4 + 4(n-1)H^2}}{2n(1+H^2)}.$$

(2) Если $c = -1$, то из $H^2 > 1$, (3.12) и (3.30) следует, что

$$\lambda = \frac{nH \pm \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}}{2(n-1)}, \quad \mu = \frac{2(n-1)}{nH \pm \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}}.$$

Поэтому ясно, что M изопараметрична. Применяя результаты, полученные Картаном [10], можно заключить, что M изометрична риманову произведению

$$H^{n-1}(\lambda^2 - 1) \times S^1\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right), \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{1}{2(n-1)}[nH \pm \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}].$$

В предположении, что кратность λ равна 1, а кратность μ равна $n-1$, из (3.30) и равенства $nH = \lambda + (n-1)\mu$ следует, что

$$\lambda = \frac{nH \pm \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}}{2}, \quad \mu = \frac{2}{nH \pm \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}}.$$

Поэтому ясно, что M изопараметрична. Применяя результаты, полученные Картаном [10], можно заключить, что M изометрична риманову произведению

$$H^1(\lambda^2 - 1) \times S^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda^2} - 1\right), \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{1}{2}[nH \pm \sqrt{n^2H^2 - 4(n-1)}].$$

Теоремы 1.4 и 1.5 доказаны полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Заметим, что в доказательстве теорем 1.4 и 1.5 условие о том, что M имеет неотрицательную секционную кривизну, не является необходимым для того, чтобы кратность каждой различной главной кривизны из имеющихся двух была больше, чем 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Из предыдущего доказательства следует, что если $c = 0$, то можно легко показать, что утверждение следствия 1.1 также выполняется, как это было доказано другим методом в [7].

Из предложения 3.1 легко получить следующее утверждение (см. [4] при $c = 0$, [5] при $c = 1$ и [13] при $c = -1$).

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть M — n -мерная полная связная ориентированная гиперповерхность в $M^{n+1}(c)$, имеющая постоянную скалярную кривизну $n(n-1)R$ и две различные главные кривизны. Если кратность каждой различной главной кривизны из имеющихся двух больше, чем 1, то

- (1) при $c = 0$ M изометрична риманову произведению $\mathbb{R}^k \times S^{n-k}(c)$, где $1 < k < n-1$;
- (2) при $c = 1$ M изометрична риманову произведению $S^k(a) \times S^{n-k}(\sqrt{1-a^2})$, где $1 < k < n-1$;

(3) при $c = -1$ M изометрична риманову произведению

$$H^k(\operatorname{th}^2 r - 1) \times S^{n-k}(\operatorname{cth}^2 r - 1),$$

где $1 < k < n - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.9. Если кратность каждой различной главной кривизны из имеющихся двух больше, чем 1, то из теоремы 3.2 следует, что M изометрична риманову произведению $S^k(a) \times S^{n-k}(\sqrt{1-a^2})$, где $1 < k < n - 1$.

Пусть M имеет две различных главных кривизны, одна из которых простая. Без ограничения общности, предположим, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda, \quad \lambda_n = \mu, \quad (3.31)$$

где λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, главные кривизны M . Из (2.11) и (3.31) следует, что

$$n(n-1)(R-1) = (n-1)(n-2)\lambda^2 + 2(n-1)\lambda\mu. \quad (3.32)$$

Если $\lambda = 0$ в некоторой точке гиперповерхности M , то из предыдущего уравнения получим, что $R = 1$ в этой точке. Поскольку скалярная кривизна $n(n-1)R$ постоянна, то $R \equiv 1$ на M . Так как главные кривизны λ и μ непрерывны на M , применяя то же самое утверждение, из (3.32) получим, что $\lambda \equiv 0$ на M . Из (2.9) следует, что секционная кривизна гиперповерхности M не меньше, чем 1. Поэтому M компактна в силу теоремы Бонне–Майерса. Из теоремы 1.7, доказанной в работе [6], следует, что M вполне омбилическая, а это невозможно. Следовательно, $\lambda \neq 0$. Из (3.32) получим

$$\mu = \frac{n(R-1)}{2\lambda} - \frac{n-2}{2}\lambda. \quad (3.33)$$

Так как

$$\lambda - \mu = n \frac{\lambda^2 - (R-1)}{2\lambda} \neq 0,$$

то ясно, что $\lambda^2 - (R-1) \neq 0$. Если $\lambda^2 - (R-1) < 0$, то легко проверить, что $R > 1$ и $\lambda^2 - \lambda\mu = (n/2)[\lambda^2 - (R-1)] < 0$. Поэтому $\lambda\mu > \lambda^2$. Из (2.9) следует, что секционная кривизна гиперповерхности M не меньше, чем 1. Поэтому M компактна в силу теоремы Бонне–Майерса. Из теоремы 1.7, доказанной в работе [6], следует, что M вполне омбилическая, а это невозможно. Следовательно, $\lambda^2 - (R-1) > 0$.

Пусть $\varpi = [\lambda^2 - (R-1)]^{-1/n}$. Применяя тот же метод, что и ранее, получим

$$\frac{d^2\{\log[\lambda^2 - (R-1)]^{1/n}\}}{ds^2} - \left\{ \frac{d\{\log[\lambda^2 - (R-1)]^{1/n}\}}{ds} \right\}^2 - (\lambda\mu + 1) = 0.$$

По определению функции $\varpi = [\lambda^2 - (R-1)]^{-1/n}$ из предыдущего уравнения следует, что

$$\frac{d^2\varpi}{ds^2} + \varpi(\lambda\mu + 1) = 0. \quad (3.34)$$

Можно показать, что положительная функция $\varpi(s)$ ограничена сверху. Действительно, из определения функции ϖ , (3.33) и (3.34) получим уравнение

$$\frac{d^2\varpi}{ds^2} + \varpi \left[R - \frac{n-2}{2} \varpi^{-n} \right] = 0 \quad \text{при} \quad \lambda^2 - (R-1) > 0$$

или

$$\frac{d^2\varpi}{ds^2} + \varpi \left[R + \frac{n-2}{2} \varpi^{-n} \right] = 0 \quad \text{при} \quad \lambda^2 - (R-1) < 0.$$

Таким образом, его интеграл первого порядка имеет вид

$$\left(\frac{d\varpi}{ds} \right)^2 + R\varpi^2 + \varpi^{2-n} = C \quad \text{при} \quad \lambda^2 - (R-1) > 0$$

или

$$\left(\frac{d\varpi}{ds} \right)^2 + R\varpi^2 - \varpi^{2-n} = C \quad \text{при} \quad \lambda^2 - (R-1) < 0,$$

где C – постоянная. Поэтому получим

$$R\varpi^2 + \varpi^{2-n} \leq C \quad \text{при} \quad \lambda^2 - (R-1) > 0$$

или

$$R\varpi^2 - \varpi^{2-n} \leq C \quad \text{при} \quad \lambda^2 - (R-1) < 0.$$

В предположении, что $R \neq 0$ и секционная кривизна неотрицательна, получим $R > 0$. Поэтому мы приходим к заключению, что положительная функция ϖ ограничена сверху.

Так как известно, что секционная кривизна неотрицательна, т.е., при $i \neq j$ $R_{ijij} = 1 + \lambda_i \lambda_j \geq 0$, мы видим, что $1 + \lambda\mu \geq 0$. Из (3.34) следует, что $d^2\varpi/ds^2 \leq 0$. Так же, как и в предыдущем доказательстве, получим, что $\varpi(s) = \text{const}$. Из равенства $\varpi = [\lambda^2 - (R-1)]^{-1/n}$ следует, что λ постоянная и, следовательно, μ из (3.33) также постоянная. Так как $\varpi(s) (\neq 0)$ постоянна, из (3.34) получим

$$\lambda\mu + 1 = 0. \quad (3.35)$$

Таким образом, из (3.32) и (3.35) имеем

$$\lambda^2 = \frac{n(R-1)+2}{n-2}, \quad \mu^2 = \frac{n-2}{n(R-1)+2}.$$

Поэтому ясно, что M изопараметрична. Применяя результаты, полученные Картаном [10], можно заключить, что M изометрична риманову произведению $S^{n-1}(a) \times S^1(\sqrt{1-a^2})$, где $a^2 = (n-2)/nR$. Доказательство теоремы 1.9 завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Следует заметить, что в доказательстве теоремы 1.9 условие, что M имеет неотрицательную секционную кривизну, не является необходимым для того, чтобы кратность каждой различной главной кривизны из имеющихся двух была больше, чем 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.10. Пусть M имеет две различные главные кривизны, одна из которых простая. Без ограничения общности можно считать, что (3.31) выполняется. Из (2.11) и (3.31) следует, что

$$n(n-1)(R+1) = (n-1)(n-2)\lambda^2 + 2(n-1)\lambda\mu. \quad (3.36)$$

Так как по предположению $\lambda \neq 0$ на M , из (3.36) получим

$$\mu = \frac{n(R+1)}{2\lambda} - \frac{(n-2)\lambda}{2}. \quad (3.37)$$

Из равенства

$$\lambda - \mu = n \frac{\lambda^2 - (R+1)}{2\lambda} \neq 0$$

следует, что $\lambda^2 - (R+1) \neq 0$. Пусть $\varpi = |\lambda^2 - (R+1)|^{-1/n}$. Применяя тот же метод, что и в предыдущем доказательстве, получим

$$\frac{d^2 \{ \log |\lambda^2 - (R+1)|^{1/n} \}}{ds^2} - \left\{ \frac{d \{ \log |\lambda^2 - (R+1)|^{1/n} \}}{ds} \right\}^2 - (\lambda\mu - 1) = 0.$$

Так как по определению $\varpi = |\lambda^2 - (R+1)|^{-1/n}$, из предыдущего уравнения получим

$$\frac{d^2 \varpi}{ds^2} + \varpi(\lambda\mu - 1) = 0. \quad (3.38)$$

Так же, как и в доказательстве теоремы 1.9, можно показать, что положительная функция $\varpi(s)$ ограничена сверху.

Так как по предположению секционная кривизна неотрицательна, т.е., при $i \neq j$ $R_{ijij} = -1 + \lambda_i \lambda_j \geq 0$, мы видим, что $-1 + \lambda\mu \geq 0$. Из (3.38) следует, что $d^2 \varpi / ds^2 \leq 0$. Аналогично предыдущему доказательству получим, что $\varpi(s) = \text{const}$. Из $\varpi = |\lambda^2 - (R+1)|^{-1/n}$ следует, что λ постоянна и, таким образом, из (3.37) следует, что μ также постоянна. Так как $\varpi(s) (\neq 0)$ постоянна, из (3.38) получим

$$\lambda\mu - 1 = 0. \quad (3.39)$$

Таким образом, из (3.36) и (3.39) следует, что

$$\lambda^2 = \frac{n(R+1) - 2}{n - 2}, \quad \mu^2 = \frac{n - 2}{n(R+1) - 2}.$$

Поэтому, ясно, что M изопараметрична. Применяя результаты, полученные Картаном [10], можно заключить, что M изометрична риманову произведению

$$H^{n-1}(\lambda^2 - 1) \times S^1 \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1 \right), \quad \text{где} \quad \lambda^2 = \frac{n(R+1) - 2}{n - 2}.$$

Если предположить, что кратность λ равна единице, а кратность μ равна $n - 1$, то мы также получим, что M изометрична риманову произведению

$$H^1(\lambda^2 - 1) \times S^{n-1} \left(\frac{1}{\lambda^2} - 1 \right), \quad \text{где} \quad \lambda^2 = \frac{n - 2}{n(R+1) - 2}.$$

Теорема 1.10 доказана.

Авторы выражают благодарность рецензенту за его/ее многочисленные ценные замечания, которые существенно улучшили эту работу.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Alencar, M. do Carmo, "Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **120**:4 (1994), 1223–1229.
- [2] H. Li, "Hypersurfaces with constant scalar curvature in space forms", *Math. Ann.*, **305**:4 (1996), 665–672.

- [3] B.-Y. Chen, *Total Mean Curvature and Submanifolds of Finite Type*, Ser. Pure Math., **1**, World Sci. Publ., Singapore, 1984.
- [4] Q.-M. Cheng, "Complete hypersurfaces in a Euclidean space $\mathbb{R}^{n+1}$ with constant scalar curvature", *Indiana Univ. Math. J.*, **51**:1 (2002), 53–68.
- [5] Q.-M. Cheng, "Hypersurfaces in a unit sphere $S^{n+1}(1)$ with constant scalar curvature", *J. London Math. Soc.* (2), **64**:3 (2001), 755–768.
- [6] S.-Y. Cheng, S.-T. Yau, "Hypersurfaces with constant scalar curvature", *Math. Ann.*, **225**:3 (1977), 195–204.
- [7] S. Y. Cheng, S. T. Yau, "Differential equations on riemannian manifolds and their geometric applications", *Comm. Pure Appl. Math.*, **28**:3 (1975), 333–354.
- [8] K. Nomizu, B. Smyth, "A formula of Simons' type and hypersurfaces with constant mean curvature", *J. Differential Geometry*, **3** (1969), 367–377.
- [9] X. Liu, W. Su, "Hypersurfaces with constant scalar curvature in a hyperbolic space form", *Balkan J. Geom. Appl.*, **7**:1 (2002), 121–132.
- [10] E. Cartan, "Sur des familles remarquables d'hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques", *Math. Z.*, **45** (1939), 335–367.
- [11] T. Otsuki, "Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature", *Amer. J. Math.*, **92** (1970), 145–173.
- [12] G. Wei, "Complete hypersurfaces with constant mean curvature in a unit sphere", *Monatsh. Math.*, **149**:3 (2006), 251–258.
- [13] Z. Hu, S. Zhai, "Hypersurfaces of the hyperbolic space with constant scalar curvature", *Results Math.*, **48**:1–2 (2005), 65–88.

Шичанг Шу

Xianyang Normal University, China

E-mail: shushichang@126.com

Поступило

30.07.2008

Анни Йи Хан

Borough of Manhattan Community College, USA

E-mail: DrHan@nyc.rr.com