Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Э. Гутерман, В. К. Любимов, А. М. Райгородский,
С. А. Усачев, О числах независимости графов расстоя-
ний с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$, *Матем. заметки*, 2009,
том 86, выпуск 5, 794–796

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8518>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 13:57:26

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О числах независимости графов расстояний с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$

А. Э. Гутерман, В. К. Любимов, А. М. Райгородский, С. А. Усачев

1. Введение. Пусть $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим граф $G_n = (V_n, E_n)$, у которого

$$V_n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, |\{i : x_i = \pm 1\}| = |\{i : x_i = 0\}| = k\},$$

$$E_n = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_n, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{2k}\}.$$

Будем считать, что в каждом векторе из V_n первая ненулевая координата равна 1. Таким образом, $|V_n| = C_n^k 2^{k-1}$.

Граф G_n играет исключительно важную роль в проблемах Борсука и Нелсона–Эрдеша–Хадвиера (см. [1]–[6]). В частности, вопрос об отыскании числа независимости

$$\alpha(G_n) = \max\{|W| : W \subseteq V_n, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \notin E_n \text{ для всех } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W\}$$

такого графа крайне интересен и по-прежнему открыт. Даже при малых k до последнего времени имелись лишь верхние и нижние оценки величины $\alpha(G_n)$.

Единственный метод получения верхних оценок для $\alpha(G_n)$, который давал до сих пор наилучшие установленные результаты, – это метод линейно-алгебраический (см. [2]). Мы приведем соответствующие оценки в следующем пункте.

Недавно авторам настоящей заметки удалось разработать технику, которая позволила значительно улучшить прежние результаты для многих значений k . В третьем пункте мы сформулируем новые оценки для $\alpha(G_n)$, полученные с помощью этой техники. В последнем пункте мы вкратце опишем общую структуру подхода.

2. Прежние оценки. Основная теорема, которая давала все ранее имевшиеся оценки величины $\alpha(G_n)$ (кроме тривиальных $\alpha(G_2) = 1$, $\alpha(G_4) = 3$), имеет следующую формулировку.

ТЕОРЕМА 1. Если $k = p^\beta$, где p – простое, а β – натуральное, то

$$\alpha(G_n) \leq \sum_{\{i,j\} : i+2j \leq k-1} C_n^i C_{n-i}^j - \sum_{\{i,j\} : i+2j \leq k-3} C_{n-1}^i C_{n-1-i}^j.$$

Ее доказательство можно найти, в той или иной форме, в работах [1]–[3]. Из этой теоремы численно получается приведенная ниже табл. 1 результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00383), фонда Президента РФ (грант МД-5414.2008.1), программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-691.2008.1), фонда “Династия”.

Таблица 1

Размерность (величина n)	Оценка числа $\alpha(G_n)$ сверху	Величина модуля
6	27	3
8	149	$4 = 2^2$
10	836	5
12	—	—
14	27133	7
16	156213	$8 = 2^3$
18	903960	$9 = 3^2$
20	—	—
22	30629215	11
24	—	—
26	1050209642	13

Таблица 2

Размерность (величина n)	Новая оценка $\alpha(G_n)$	Старая оценка $\alpha(G_n)$
6	16	27
8	40	149
10	465	836
12	2500	—

Смысл прочерка в том, что иногда теорема 1 не работает, и мы, вообще, *никаких* оценок сверху (кроме тривиальных) не имеем.

Отметим, что при $n \rightarrow \infty$ теорема 1 дает (см. [2]) неравенство

$$\alpha(G_n) \leq (2.4626 \dots + o(1))^n. \quad (1)$$

3. Новые оценки. Приведем таблицу новых результатов, сразу же сопоставляя их с прежними.

Из таблицы видно, что новые оценки намного точнее старых и что, кроме того, они возникают там, где ранее вовсе никаких содержательных оценок не было. К сожалению, в больших размерностях применить новый подход пока не удастся, и в том числе мы не умеем усиливать асимптотическое неравенство (1).

В следующем пункте мы скажем несколько слов о новом методе.

4. Основные идеи нового подхода. Центральным результатом дает следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – матрица инцидентности графа G_n . Положим $N = |V_n|$. Обозначим через d степень произвольной вершины (регулярного) графа G_n . Пусть λ – минимальное собственное число матрицы A . Тогда

$$\alpha(G_n) \leq \frac{N|\lambda|}{d + |\lambda|}.$$

Теорема 2 доказывается с помощью методов матричной алгебры (см. [7]). Из нее сразу вытекают оценки $\alpha(G_6) \leq 21$, $\alpha(G_8) \leq 77$, $\alpha(G_{10}) \leq 465$, $\alpha(G_{12}) \leq 2500$. Для получения более точных неравенств, указанных в табл. 2, приходится дополнительно проводить тонкий анализ возможных векторных конфигураций.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Райгородский, *УМН*, **56:1** (2001), 107–146. [2] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007. [3] A. M. Raigorodskii, *Surveys in Contemporary Mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, 202–247. [4] В. Г. Болтянский, И. Ц. Гохберг, *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Наука, М., 1965. [5] V. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan, *Excursions into Combinatorial Geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1997. [6] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer-Verlag, New York, NY, 2005. [7] Р. Беллман, *Введение в теорию матриц*, Наука, М., 1969.

А. Э. Гутерман

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

22.01.2009

В. К. Любимов

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

А. М. Райгородский

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: mraigor@yandex.ru

С. А. Усачев

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова