Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Мирзоев, Ф. А. Гулиева, О полноте элементарных решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 5, 797–800

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:19:44

О полноте элементарных решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка с операторными коэффициентами

С. С. Мирзоев, Ф. А. Гулиева

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассмотрим краевую задачу

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)u \equiv \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + (pA + A_1)\frac{du}{dt} + (qA^2 + A_2)u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1)$$

$$u(0) = \varphi, \quad (2)$$

где $u(t)$ – вектор-функция, определенная в $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, со значениями в H , вектор $\varphi \in H$, а коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим условиям:

- 1) A – положительно-определенный самосопряженный оператор с вполне непрерывным обратным A^{-1} , т.е. $A^{-1} \in \sigma_\infty(H)$;
- 2) p и q – действительные числа такие, что $p \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, а $q < 0$;
- 3) $B_1 = A_1 A^{-1}$, $B_2 = A_2 A^{-2}$ – линейные ограниченные операторы в H , т.е. $B_1, B_2 \in L(H)$.

Здесь и в дальнейшем производные $u^{(j)} \equiv d^j u/dt^j$, $j = 1, 2$, понимаются в смысле теории распределений [1].

Свяжем задачу (1), (2) с соответствующим операторным пучком

$$P(\lambda) = \lambda^2 E + \lambda(pA + A_1) + qA^2 + A_2. \quad (3)$$

Здесь E – единичный оператор в H .

Обозначим через H_γ , $\gamma \geq 0$, шкалу гильбертовых пространств:

$$H_\gamma = D(A^\gamma), \quad (x, y)_\gamma = (A^\gamma x, A^\gamma y), \quad x, y \in D(A^\gamma),$$

при $\gamma = 0$ считаем, что $H_0 = H$.

Пусть $L_2(\mathbb{R}_+; H)$ – гильбертово пространство вектор-функций $f(t)$ со значениями в H , для которых

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} = \left(\int_0^{+\infty} \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Далее определим следующие гильбертовы пространства [1]:

$$W_2^2(\mathbb{R}_+; H) = \{u(t) : u'' \in L_2(\mathbb{R}_+; H), A^2 u \in L_2(\mathbb{R}_+; H)\}.$$

$$\overset{\circ}{W}_2^2(\mathbb{R}_+; H) = \{u : u \in W_2^2(\mathbb{R}_+; H), u(0) = 0\}$$

с нормой

$$\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+; H)} = (\|u''\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2 + \|A^2 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^2)^{1/2}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если существует вектор-функция $u(t) \in W_2^2(\mathbb{R}_+; H)$, которая удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в $\mathbb{R}_+$, то ее будем называть *регулярным решением уравнения (1)*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если при любом $\varphi \in H_{3/2}$ существует регулярное решение $u(t)$ уравнения (1), которое удовлетворяет краевому условию (2) в смысле сходимости

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|u(t) - \varphi\|_{3/2} = 0$$

и имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+; H)} \leq \text{const} \|\varphi\|_{3/2},$$

то задача (1), (2) называется *регулярно разрешимой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если существует вектор $\varphi_{n,j,0} \neq 0$, который удовлетворяет уравнению $P(\lambda_n)\varphi_{n,j,0} = 0$, то λ_n называется *собственным значением*, а $\varphi_{n,j,0}$ – *собственным вектором* пучка $P(\lambda)$, отвечающим собственному значению λ_n . Если векторы $\varphi_{n,j,0}, \varphi_{n,j,1}, \dots, \varphi_{n,j,m_{n_j}}$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{k=0}^2 \frac{1}{k!} P^{(k)}(\lambda_n) \varphi_{n,j,h-k}, \quad h = 0, \dots, m_{n,j}, \quad j = 1, \dots, s_n,$$

то они называются *цепочкой* собственных и присоединенных векторов, отвечающих собственному значению λ_n .

Если $\text{Re } \lambda_n < 0$, а $\{\varphi_{n,j,0}, \varphi_{n,j,1}, \dots, \varphi_{n,j,m_{n_j}}\}$ – соответствующая цепочка собственных и присоединенных векторов, то вектор-функции

$$u_{n,j,h}(t) = e^{\lambda_n t} \left(\varphi_{n,j,h} + \frac{t}{1!} \varphi_{n,j,h-1} + \dots + \frac{t^h}{h!} \varphi_{n,j,0} \right), \quad h = 0, \dots, m_{n,j}, \quad j = 1, \dots, s_n,$$

удовлетворяют уравнению (1) и называются *убывающими элементарными решениями* уравнения (1).

Обозначим через $K(\Pi_-)$ систему собственных и присоединенных векторов, отвечающих собственным значениям из левой полуплоскости.

В данной работе мы укажем условия на коэффициенты уравнения (1), которые обеспечивают регулярную разрешимость задачи (1), (2), полноту системы $K(\Pi_-)$ в пространстве следов $H_{3/2}$ и полноту убывающих элементарных решений в пространстве регулярных решений задачи (1), (2).

Отметим, что при $p = 0$ и $q = -1$ краевая задача (1), (2) и аналогичные задачи исследованы, например, в работах [2]–[6].

Обозначим через

$$P_0 u \equiv \frac{d^2 u}{dt^2} + q A^2 u + p A \frac{du}{dt}, \quad P_1 u \equiv A_1 \frac{du}{dt} + A_2 u, \quad u \in \overset{\circ}{W}_2^2(\mathbb{R}_+; H).$$

Имеет место следующая

ЛЕММА. Оператор P_0 изоморфно отображает пространство $\overset{\circ}{W}_2^2(\mathbb{R}_+; H)$ на пространство $L_2(\mathbb{R}_+; H)$.

Из этой леммы следует, что нормы $\|P_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}$ и $\|u\|_{W_2^2(\mathbb{R}_+; H)}$ эквивалентны в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^2(\mathbb{R}_+; H)$. Тогда по теореме о промежуточных производных [1] конечны следующие числа, т.е. нормы операторов промежуточных производных:

$$N_1(\mathbb{R}_+; H) = \sup_{0 \neq u \in \overset{\circ}{W}_2^2(\mathbb{R}_+; H)} \|A^2 u'\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \cdot \|P_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^{-1}, \quad (4)$$

$$N_0(\mathbb{R}_+; H) = \sup_{0 \neq u \in \overset{\circ}{W}_2^2(\mathbb{R}_+; H)} \|A^2 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)} \cdot \|P_0 u\|_{L_2(\mathbb{R}_+; H)}^{-1}. \quad (5)$$

Нахождение точных значений норм операторов промежуточных производных имеет самостоятельный математический интерес и они имеют разные применения в различных областях математического анализа.

Следующая теорема указывает значения этих норм.

ТЕОРЕМА 1. Нормы $N_1(\mathbb{R}_+; H)$ и $N_0(\mathbb{R}_+; H)$ определяются следующим образом:

$$N_1(\mathbb{R}_+; H) = \begin{cases} 2^{-1}|q|^{-1/2} & \text{при } p > 0, \\ (p^2 + 4|q|)^{-1/2} & \text{при } p = 0, \end{cases}$$

$$N_0(\mathbb{R}_+; H) = |q|^{-1}.$$

Используя теорему 1, доказывается

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия 1)–3), причем имеет место неравенство

$$N_1(\mathbb{R}_+; H)\|B_1\| + N_0(\mathbb{R}_+; H)\|B_2\| < 1. \quad (6)$$

Тогда оператор $P \equiv (P_0 + P_1)$ изоморфно отображает пространство $\dot{W}_2^2(\mathbb{R}_+; H)$ на $L_2(\mathbb{R}_+; H)$.

Далее, краевую задачу (1), (2) можно привести к разрешимости уравнения

$$Pu \equiv P_0u + P_1u = f, \quad f \in L_2(\mathbb{R}_+; H), \quad u \in \dot{W}_2^2(\mathbb{R}_+; H),$$

и доказывается

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда задача (1), (2) регулярно разрешима.

Отметим, что при $p = 0$ и $q = -1$ эта теорема доказана в [2], [3].

Для получения теоремы полноты системы $K(\Pi_-)$ проводится оценка резольвенты пучка $P(\lambda)$ в некоторых секторах.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда операторный пучок $P(\lambda)$ обратим на секторах

$$S_{\pm\theta} = \left\{ \lambda : \left| \arg \lambda \pm \frac{\pi}{2} \right| < \theta \right\}$$

при малых $\theta > 0$ и на этих секторах имеет место оценка

$$\sum_{j=0}^2 \|\lambda^j A^{2-j} P^{-1}(\lambda)\| \leq \text{const}, \quad \lambda \in S_{\pm\theta}.$$

При доказательстве леммы и теорем 1–4 не используется вполне непрерывность обратного оператора A^{-1} .

Отметим, что при выполнении условия теоремы 2 операторный пучок $P(\lambda)$ имеет дискретный спектр с единственной предельной точкой в бесконечности. А если $A^{-1} \in \sigma_\rho(H)$, $0 < \rho < \infty$, т.е. $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{-\rho}(A) < \infty$, где $\lambda_k(A)$ – собственные значения оператора A , то $A^2 P^{-1}(\lambda)$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка не выше ρ и минимального типа при порядке ρ [6]–[8].

Далее, используя методики работ [2], [3], [6], мы получаем теоремы о полноте системы $K(\Pi_-)$ и системы убывающих элементарных решений.

ТЕОРЕМА 5. Пусть выполняются условия теоремы 2 и одно из следующих условий:

- а) $A^{-1} \in \sigma_\rho(H)$, $0 < \rho \leq 1$;
- б) $A^{-1} \in \sigma_\rho(H)$, $0 < \rho < \infty$, $B_j \in \sigma_\infty(H)$, $j = 1, 2$.

Тогда система $K(\Pi_-)$ полна в пространстве $H_{3/2}$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполняются условия теоремы 5. Тогда система убывающих элементарных решений полна в пространстве всех регулярных решений задачи (1), (2).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971. [2] М. Г. Гасымов, *Докл. АН СССР*, **199**:4 (1971), 747–750. [3] М. Г. Гасымов, С. С. Мирзоев, *Дифференц. уравнения*, **28**:4 (1992), 651–661. [4] Г. В. Радзиевский, *Квадратичный пучок операторов*, Препринт ИМ-76-24, Ин-т матем. АН УССР, Киев. [5] М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, *Труды Международного симпозиума по применению ТФКП в механике сплошной среды*, Наука, М., 1965, 283–322. [6] А. А. Шкаликов, *Тр. сем. им. И. Г. Петровского*, **14**, Изд-во МГУ, М., 1989, 140–224. [7] М. В. Келдыш, *УМН*, **26**:4 (1971), 15–41. [8] М. Г. Гасымов, *Изв. АН АрмССР. Сер. матем.*, **6**:2–3 (1971), 131–147.

С. С. Мирзоев

Институт прикладной математики
Бакинского государственного университета
E-mail: mirzoyevsabir@mail.ru

Поступило

24.03.2009

Ф. А. Гулиева

Азербайджанский университет кооперации
E-mail: fatimaguliyeva@mail.ru