Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Ольшанский, Е. В. Чижонков, О наилучшей константе в $\inf\text{-sup}$ -условии для вытянутых прямоугольных областей, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 3, 387–396

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm852>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:38:32

УДК 517.984.5

О НАИЛУЧШЕЙ КОНСТАНТЕ В inf-sup-УСЛОВИИ ДЛЯ ВЫТЯНУТЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ

М. А. Ольшанский, Е. В. Чижонков

При анализе сходимости приближенных решений уравнений динамики жидкости к точным часто используется неравенство Ладыженской–Бабушки–Бреци (inf-sup-условие). Входящая в него константа зависит от формы области и определяет эффективность различных алгоритмов. В работе получена ее асимптотика и двусторонние оценки в прямоугольных областях. Для этого используется новый способ получения оценок собственных значений некоторой спектральной задачи с седловым оператором Стокса.

Библиография: 13 названий.

1. Введение. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнений Стокса в переменных скорость–давление

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \operatorname{grad} p &= \mathbf{f} && \text{в } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{в } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 && \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения (1) описывают движение вязкой несжимаемой однородной и изотропной жидкости при малых скоростях под воздействием внешних сил. Неизвестными здесь являются вектор-функция $\mathbf{u} = (u_1(x), \dots, u_s(x))$ (скорость жидкости) и скалярная функция $p = p(x)$ (давление). Нулевые граничные условия означают, как правило, что движение происходит в некотором неподвижном объеме с твердыми стенками, полностью заполненным жидкостью. Описанная модельная задача имеет самое разнообразное применение в вычислительной гидродинамике: начиная от построения дискретных аналогов и заканчивая сравнением эффективности численных алгоритмов.

При обосновании корректности постановки и приближенном решении (1) важную роль играет величина $\gamma = \gamma(\Omega)$, зависящая только от области $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ ($s = 2, 3$) и определяемая равенством

$$\inf_{p \in P} \sup_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \frac{|(p, \operatorname{div} \mathbf{u})|}{\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{U}} \|p\|_P} = \gamma. \quad (2)$$

Здесь и далее

$$\begin{aligned} P &= \left\{ q \mid q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q \, d\Omega = 0 \right\}, & \mathbf{U} &= (\dot{W}_2^1(\Omega))^s, \\ \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{U}} &= (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})^{1/2}, & \|p\|_P &= (p, p)^{1/2}, & (\phi, \psi) &= \int_{\Omega} \phi \psi \, d\Omega. \end{aligned}$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 96-01-01254 и № 96-01-01394.

Действительно, для ограниченных связных областей с кусочно-лишшицевой границей, известно (см., например, [1], [2]), что $\gamma > 0$, и для обобщенного решения задачи (1) $(u, p) \in U \times P$ справедливы следующие априорные оценки:

$$\|p\|_P \leq 2\gamma^{-1}\|f\|_{U^{-1}}, \quad \|u\|_U \leq \|f\|_{U^{-1}}, \quad \text{где } \|f\|_{U^{-1}} = \sup_{u \in U} \frac{|(f, u)|}{\|u\|_U}.$$

Кроме того, считающийся в настоящее время одним из наиболее эффективных для численного решения задачи Стокса метод Удзавы – сопряженных градиентов имеет асимптотический показатель скорости сходимости [3]

$$\kappa(\gamma) = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}.$$

Зависимость подобного типа от γ установлена для скорости сходимости и других методов для (1), в которых основным элементом является многократное решение уравнения Пуассона (см., например, [4], [5]).

Отметим также, что константа γ тесно связана со своим дискретным аналогом γ_h (см., например, [2]). Последняя широко известна как константа из LBB или *inf-sup-устойчивости* и имеет принципиальное значение при анализе схем метода конечных элементов для (1).

В связи с разнообразием задач вычислительной гидродинамики и широким распространением подходов к решению, основанных на разбиении исходной области на ряд более “простых” подобластей, представляется интересным анализ зависимости значений γ в (2) от геометрических характеристик области Ω .

Ранее предпринимались попытки определить величину γ (или тесно связанную с ней нижнюю границу конечнократного спектра Коссера [6]), но это всегда было связано с формой области Ω , допускающей применение метода разделения переменных (например, шаровой слой [7], кольцо [8]). В этом случае, решая аналитически некоторую вспомогательную спектральную задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, можно определить нижнюю границу собственных значений, откуда получается искомое значение γ .

В настоящей работе устанавливается справедливость следующего утверждения: пусть область Ω имеет прямоугольную форму

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_i < L_i, i = 1, 2\}$$

и $\ell = \max(L_1/L_2, L_2/L_1)$; тогда при $\ell \gg 1$ имеет место асимптотическое представление $\gamma = O(\ell^{-1})$. Следует отметить, что в данном случае описанный выше подход неприменим, и точное значение γ при фиксированном ℓ определить не удастся, хотя содержательные оценки сверху и снизу также получены.

2. Дополнения по Шуру. Перепишем задачу (1) в следующем равносильном виде:

$$\begin{aligned} u &= (\Delta)_0^{-1}(\text{grad } p - f), \\ A_0 p &= \text{div}(\Delta)_0^{-1} \text{grad } p = \text{div}(\Delta)_0^{-1} f, \end{aligned}$$

где выражение $(\Delta)_0^{-1}g$ для $g \in U^{-1}$ обозначает вектор-функцию $v \in U$ такую, что $\Delta v = g$. Оператор $A_0: P \rightarrow P$, как правило, называют *дополнением по Шуру* для

оператора задачи (1). Его замечательные свойства [6], [9], [10]: самосопряженность, положительная определенность, дискретность спектра, наличие полной ортонормированной в P счетной системы собственных функций – часто используются для анализа и обоснования методов решения задачи Стокса. Существует точка зрения [1], что методы, основанные на решении системы $A_0 p = \varphi$, являются в определенном смысле наилучшими. В частности, к таким методам относятся различные модификации алгоритма Удзавы (или метода окаймления) [3].

Для наших целей важной является связь минимального собственного значения оператора A_0 с постоянной γ из (2). Рассмотрим следующую цепочку равенств, справедливых для произвольной функции $q \in W_2^1(\Omega) \cap P$:

$$\begin{aligned} (A_0 q, q) &= (\operatorname{div}(\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q, q) = -((\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q, \operatorname{grad} q) \\ &= -((\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q, \Delta(\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q) = (-\Delta v, v)|_{v = (\Delta)_0^{-1} \operatorname{grad} q} \\ &= \|v\|_U^2 = \sup_{u \in U} \frac{(-\Delta v, u)^2}{\|u\|_U^2} = \sup_{u \in U} \frac{(\operatorname{grad} q, u)^2}{\|u\|_U^2} = \sup_{u \in U} \frac{(q, \operatorname{div} u)^2}{\|u\|_U^2}. \end{aligned}$$

Множество функций из $W_2^1(\Omega)$ всюду плотно [11] в P , откуда следует корректность замыкания в равенствах

$$(A_0 q, q) = \|v\|_U^2 = \sup_{u \in U} \frac{(q, \operatorname{div} u)^2}{\|u\|_U^2}. \quad (3)$$

Таким образом, равенства (3) справедливы для произвольной $q \in P$ и $v = \Delta_0^{-1} \operatorname{grad} q \in U$. В частности, из (2) и (3) следует, что

$$\lambda_{\min}(A_0) = \inf_{p \in P} \frac{(A_0 p, p)}{\|p\|_P^2} = \inf_{p \in P} \sup_{u \in U} \frac{(p, \operatorname{div} u)^2}{\|u\|_U^2 \|p\|_P^2} = \gamma^2,$$

где $\lambda_{\min}$ – минимальное собственное значение оператора A_0 .

Далее нам потребуются операторы A_p и A_m , родственные A_0 . Здесь имеется в виду, что они являются дополнениями по Шуру для операторов задач типа (1), но с другими краевыми условиями. Начиная с этого момента будем считать, что область Ω – прямоугольник:

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_i < L_i, i = 1, 2\}. \quad (4)$$

Обозначим через A_p оператор $A_p: P \rightarrow P$ вида

$$A_p = \operatorname{div}(\Delta)_p^{-1} \operatorname{grad},$$

где выражение $(\Delta)_p^{-1} g$ для $g \in U_p^{-1}$ обозначает вектор-функцию $v \in U_p$ такую, что

$$-(\nabla v, \nabla u) = (g, u) \quad \forall u \in U_p, \quad (5)$$

где $U_p = \{u \mid u \in (W_2^1(\Omega))^2, u \cdot n = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$. Равенство (5) является определением обобщенного решения для векторного уравнения Пуассона с краевыми условиями следующего вида:

$$u \cdot n = 0, \quad \frac{\partial(u \cdot \tau)}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Здесь n и τ – нормальный и касательный векторы к $\partial\Omega$. Аналогичным образом можно сформулировать и задачу для уравнений Стокса с такими краевыми условиями. Отметим, что, с одной стороны, $A_p \equiv E$ [12] (E – тождественный оператор), а с другой – (как и в (3)) для произвольной $q \in P$ и $v = \Delta_p^{-1} \operatorname{grad} q$ имеем

$$(A_p q, q) = \sup_{u \in U_p} \frac{(q, \operatorname{div} u)^2}{\|u\|_U^2} = \|v\|_U^2. \quad (6)$$

Из равенств (6) следует, что верхняя грань в выражении

$$\sup_{u \in U_p} \frac{(q, \operatorname{div} u)^2}{\|u\|_U^2}$$

достигается на функции $v = \Delta_p^{-1} \operatorname{grad} q$. Этот факт будет использоваться нами в дальнейшем.

Придерживаясь той же схемы, обозначим через A_m оператор $A_m : P \rightarrow P$ вида

$$A_m = \operatorname{div}(\Delta_m^{-1} \operatorname{grad},$$

где выражение $(\Delta_m^{-1} g$ для $g \in U_m^{-1}$ обозначает вектор-функцию $v \in U_m$ такую, что

$$-(\nabla v, \nabla u) = (g, u) \quad \forall u \in U_m, \quad (7)$$

где $U_m = \{u = (u_1, u_2) \mid u \in (W_2^1(\Omega))^2, u_1 = 0, (0, u_2) \cdot n = 0 \text{ на } \partial\Omega\}$. Равенство (7) соответствует определению обобщенного решения для векторного уравнения Пуассона с краевыми условиями смешанного типа

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{при } x_2 = 0, L_2, \\ u \cdot n &= 0, \quad \frac{\partial(u \cdot \tau)}{\partial n} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, L_1. \end{aligned}$$

В данном случае также справедливо равенство для произвольной $q \in P$

$$(A_m q, q) = \sup_{u \in U_m} \frac{(q, \operatorname{div} u)^2}{\|u\|_U^2}.$$

В заключение раздела отметим, что основной результат об асимптотике ($\gamma \approx \ell^{-1}$) следует из некоторого утверждения для минимальных собственных значений операторов A_i ($i = 0, p, m$). Приведем его, положив для определенности $\ell = L_1/L_2$.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Существуют постоянные $\theta_i > 0$ ($i = 1, 2$), не зависящие от ℓ , такие, что при $\ell \geq 1$ справедливы неравенства*

$$\theta_1 \frac{1}{\ell^2} \lambda_{\min}(A_p) \leq \lambda_{\min}(A_0) \leq \lambda_{\min}(A_m) \leq \theta_2 \frac{1}{\ell^2}. \quad (8)$$

Доказательству соотношений (8) посвящены следующие два раздела, а пока напомним, что все $\lambda(A_p) = 1$ и $\gamma^2 = \lambda_{\min}(A_0)$.

3. Оценка сверху. Рассмотрим в прямоугольной области Ω (4) следующую спектральную задачу $A_m p = \lambda p$: найти собственные значения λ и соответствующие собственные функции $p \in P$, удовлетворяющие системе уравнений

$$-\Delta \mathbf{u} + \text{grad } p = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = \lambda p, \quad (9)$$

и модельному набору краевых условий для $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in U_m$:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0 \quad \text{при } x_2 = 0, L_2, \quad (10)$$

$$u_1 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, L_1. \quad (11)$$

Задача (9)–(11) имеет аналитическое решение, которое может быть найдено методом разделения переменных (методом Фурье) [13]. Имеет место

ЛЕММА 1. *Оператор A_m в задаче (9)–(11) имеет собственное значение*

$$\lambda(A_m) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{\text{sh } t} \right), \quad \text{где } t = \pi \frac{L_2}{L_1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим спектральную задачу $A_m p = \lambda p$ в области $\Omega = (0, L_1) \times (-b, b)$ при $b = L_2/2$. Этот сдвиг исходного прямоугольника (4) не меняет собственных значений, но существенно облегчает проведение выкладок. Далее положим $r = \pi/L_1$ и непосредственной проверкой убедимся, что функции

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \sin r x_1 \left[b \frac{\text{sh } r b}{\text{ch } r b} \text{ch } r x_2 - x_2 \text{sh } r x_2 \right], \\ u_2 &= -\frac{1}{2} \cos r x_1 \left[b \frac{\text{ch } r b}{\text{sh } r b} \text{sh } r x_2 - x_2 \text{ch } r x_2 \right], \\ p &= \cos r x_1 \text{ch } r x_2 \end{aligned}$$

удовлетворяют соотношениям (9)–(11) вместе с указанным выше собственным значением. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Для любой области Ω прямоугольной формы имеет место неравенство*

$$\lambda_{\min}(A_0) \leq \lambda_{\min}(A_m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним функциональные определения нижних границ спектров операторов A_0 и A_m :

$$\lambda_{\min}(A_0) = \inf_{p \in P} \sup_{\mathbf{u} \in U} \frac{(p, \text{div } \mathbf{u})^2}{\|\mathbf{u}\|_U^2 \|p\|_P^2}, \quad \lambda_{\min}(A_m) = \inf_{p \in P} \sup_{\mathbf{u} \in U_m} \frac{(p, \text{div } \mathbf{u})^2}{\|\mathbf{u}\|_U^2 \|p\|_P^2}.$$

Теперь справедливость утверждения леммы следует из того факта, что $U \subset U_m$ (см. определения пространств в предыдущем разделе). Лемма доказана.

Сформулируем оценку сверху в неравенстве (8) в следующем виде. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. В рассматриваемой области $\Omega = \{(x_1, x_2) | 0 < x_i < L_i, i = 1, 2\}$ справедлива равномерная по $\ell = L_1/L_2 \geq 1$ оценка

$$\lambda_{\min}(A_0) \leq \theta_2 \frac{1}{\ell^2}$$

с постоянной $\theta_2 = \pi^2/12$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 1 и 2 непосредственно следует цепочка неравенств

$$\lambda_{\min}(A_0) \leq \lambda_{\min}(A_m) \leq \lambda(A_m) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{\operatorname{sh} t} \right),$$

где $t = \pi L_2/L_1 = \pi/\ell$. Далее для формулы в правой части после элементарных преобразований получаем

$$\left(1 - \frac{t}{\operatorname{sh} t} \right) = \frac{t^2}{2 \cdot 3!} \frac{1 + \frac{t^2 3!}{5!} + \frac{t^4 3!}{7!} + \dots}{1 + \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} + \dots} \leq \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{\ell^2}.$$

Теорема доказана.

4. Оценка снизу. Чтобы не загромождать изложение, в настоящем разделе рассуждения проводятся для прямоугольной области Ω вида $(0, \pi\ell) \times (0, \pi)$. Имеет место

ТЕОРЕМА 2. В рассматриваемой области Ω справедлива равномерная по $\ell \geq 1$ оценка

$$\theta_1 \frac{1}{\ell^2} \leq \lambda_{\min}(A_0)$$

с постоянной $\theta_1 = 1/60$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что искомая оценка непосредственно следует из справедливости следующего неравенства для произвольной функции $p \in P$:

$$\theta_1 \frac{1}{\ell^2} \sup_{U_p} \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{u})^2}{\|\mathbf{u}\|_U^2} \leq \sup_U \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{u})^2}{\|\mathbf{u}\|_U^2}. \quad (12)$$

Действительно, переходя к точной нижней грани по всем $p \in P$, будем иметь в правой части (12) $\lambda_{\min}(A_0)$, а в левой – указанную выше оценку в силу того, что $\lambda_{\min}(A_p) = 1$ ($A_p \equiv E$).

Поэтому представляется удобным доказать соотношение (12). Рассмотрим для этого полную систему ортонормированных функций из P :

$$\Xi = \left\{ \psi_m : \psi_m = d_m \cos \frac{m_1 x_1}{\ell} \cos m_2 x_2 \right\}, \quad d_m = \frac{\sqrt{(1 + \operatorname{sign} m_1)(1 + \operatorname{sign} m_2)}}{\pi \sqrt{\ell}},$$

где $m = (m_1, m_2)$ – мультииндекс, m_i ($i = 1, 2$) могут принимать значения $0, 1, 2, \dots$, при этом $\max\{m_1, m_2\} > 0$.

Докажем сначала (12) для произвольных тригонометрических многочленов из P степени M с константой θ , не зависящей от M . Для этого рассмотрим функцию p следующего вида:

$$p = \sum_{m=0}^M p_m \psi_m, \quad p_0 = 0, \quad \psi_m \in \Xi.$$

Напомним (см. п. 1), что верхняя грань в выражении

$$\sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_p} \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{u})^2}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{U}}^2}$$

достигается на функции $\hat{\mathbf{u}} = \Delta_p^{-1} \nabla p$. Заметим также, что $\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}} = p$ в силу эквивалентности A_p тождественному оператору. В данном случае вектор-функцию $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2)$, соответствующую выбранной p , можно записать в виде

$$\hat{u}_k = \sum_{m=0}^M b_m^k p_m \phi_m^k, \quad k = 1, 2,$$

где

$$b_m^1 = \frac{m_1}{\ell(m_1^2 \ell^{-2} + m_2^2)}, \quad b_m^2 = \frac{m_2}{(m_1^2 \ell^{-2} + m_2^2)},$$

$$\phi_m^1 = d_m \sin \frac{m_1 x_1}{\ell} \cos m_2 x_2, \quad \phi_m^2 = d_m \cos \frac{m_1 x_1}{\ell} \sin m_2 x_2.$$

Поэтому для доказательства неравенства (12) достаточно построить такую $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, что следующие неравенства будут справедливы с некоторыми положительными постоянными $c_1, c_2 < \infty$, не зависящими от $M, \ell, \hat{\mathbf{u}}$:

$$(p, \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}})^2 \leq c_1 (p, \operatorname{div} \mathbf{u})^2, \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{U}}^2 \leq c_2 \ell^2 \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{U}}^2. \quad (13)$$

Для этого, рассмотрим следующие наборы индексов:

$$M_1 = \{m : m_1 \geq m_2\}, \quad M_2 = \{m : m_1 < m_2\}.$$

Заметим, что $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ и для любого индекса m существует $i \in \{1, 2\}$ такое, что $m \in M_i$. Представим функцию p в виде суммы двух ортогональных частей

$$p^{(i)} = \sum_{m \in M_i} p_m \psi_m, \quad i = 1, 2.$$

Здесь и далее мы подразумеваем $p_m = 0$ при $\max(m_1, m_2) > M$.

Так как $\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}} = p = p^{(1)} + p^{(2)}$, существует $i \in \{1, 2\}$ такое, что

$$|(p^{(i)}, p)| \geq \frac{1}{2} |(p, p)| = \frac{1}{2} |(\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}, p)|. \quad (14)$$

Пусть неравенство (14) справедливо для $i = 1$. Тогда определим вектор-функцию $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathcal{U}$ следующим образом:

$$u_1 = \sum_{m \in M_1} \frac{\ell}{m_1} p_m \phi_m^1 - \sum_m \frac{\ell}{m_1} \rho_m^{(1)} \phi_m^1, \quad u_2 \equiv 0,$$

$$\text{иначе} \quad u_2 = \sum_{m \in M_2} \frac{1}{m_2} p_m \phi_m^2 - \sum_m \frac{1}{m_2} \rho_m^{(2)} \phi_m^2, \quad u_1 \equiv 0,$$

где коэффициенты $\rho_m^{(1)}$ и $\rho_m^{(2)}$ будут определены ниже.

Для произвольного m_i обозначим через $C(m_i)$ наименьшее четное целое число большее m_i , $i = 1, 2$. Если неравенство (14) справедливо для $i = 1$, то произвольному индексу $m = (m_1, m_2)$ поставим в соответствие индекс $\bar{m} = (\bar{m}_1, \bar{m}_2)$, где $\bar{m}_1 = m_1$, $\bar{m}_2 = m_2 \pmod{C(m_1)}$, а коэффициенты $\rho_m^{(1)}$ определим по формулам

$$\rho_m^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{3} p_{\bar{m}}, & \text{если } \bar{m} \in M_1, m_2 < 3C(m_1), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если же неравенство (14) справедливо для $i = 2$, то произвольному индексу $m = (m_1, m_2)$ поставим в соответствие индекс $\tilde{m} = (\tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$, где $\tilde{m}_2 = m_2$, $\tilde{m}_1 = m_1 \pmod{C(m_2)}$, а коэффициенты $\rho_m^{(2)}$ определим по формулам

$$\rho_m^{(2)} = \begin{cases} \frac{1}{3} p_{\tilde{m}}, & \text{если } \tilde{m} \in M_2, m_1 < 3C(m_2), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из приведенных выше построений следует, что $\mathbf{u}$ – тригонометрический многочлен степени не больше $3(M+2)$ и $\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0$.

Оценим $\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{U}}$ и $|(p, \operatorname{div} \mathbf{u})|$, при этом будем пользоваться тем, что системы функций $\{\phi_m^1\}$ и $\{\phi_m^2\}$ ортонормированы относительно скалярного произведения в L_2 , а нормы функций $\mathbf{u}$, $\hat{\mathbf{u}}$ и p выражаются явно через соответствующие коэффициенты Фурье. Обозначим $\rho^{(i)} = \sum_m \rho_m^{(i)} \phi_m^1$ для $i = 1, 2$ и рассмотрим отдельно оба случая. В первом случае $-\bar{m} \in M_1$ и $5m_1 \geq m_2$ – имеем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right\|_P^2 &= \|p^{(1)}\|_P^2 - 2(p^{(1)}, \rho^{(1)}) + \|\rho^{(1)}\|_P^2 = \frac{1}{3} \|p^{(1)}\|_P^2 + \|\rho^{(1)}\|_P^2 \\ &\leq \frac{2}{3} \|p^{(1)}\|_P^2 \leq \frac{2}{3} \|p\|_P^2 = \frac{2}{3} \|\operatorname{div} \hat{\mathbf{u}}\|_P^2 \leq \frac{2}{3} \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{U}}^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями

$$\begin{aligned} (p^{(1)}, \rho^{(1)}) &= \sum_{m \in M_1} p_m \rho_m^{(1)} = \frac{1}{3} \sum_{m \in M_1} p_m^2 = \frac{1}{3} \|p^{(1)}\|_P^2, \\ \|\rho^{(1)}\|_P^2 &= \sum_m [\rho_m^{(1)}]^2 = 3 \sum_{m \in M_1} \frac{1}{9} p_m^2 = \frac{1}{3} \|p^{(1)}\|_P^2. \end{aligned}$$

Далее

$$\left\| \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right\|_P^2 \leq \ell^2 \left[\|p^{(1)}\|_P^2 - 2(p^{(1)}, \rho^{(1)}) + \frac{35}{9} \|p^{(1)}\|_P^2 \right] = \frac{38}{9} \ell^2 \|p^{(1)}\|_P^2 \leq \frac{38}{9} \ell^2 \|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathcal{U}}^2. \quad (16)$$

Выше мы воспользовались оценкой

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_m \frac{\ell}{m_1} \rho_m^{(1)} \phi_m^1 \right) \right\|_P^2 &= \ell^2 \sum_m \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 [\rho_m^{(1)}]^2 \\ &\leq \ell^2 \frac{1}{9} \sum_{m \in M_1} (1 + 3^2 + 5^2) p_m^2 = \frac{35}{9} \|p^{(1)}\|_P^2. \end{aligned}$$

Вспоминая, что $|(p, p^{(1)})| \geq \frac{1}{2} |(p, \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}})|$, также получаем

$$\begin{aligned} |(p, \operatorname{div} \mathbf{u})| &= \left| \left(p, \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) \right| = |(p, p^{(1)} - \rho^{(1)})| \geq |(p, p^{(1)})| - |(p, \rho^{(1)})| \\ &\geq \left(1 - \frac{2}{\sqrt{6}} \right) |(p, p^{(1)})| \geq \frac{\sqrt{6} - 2}{2\sqrt{6}} |(p, \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}})|. \end{aligned} \quad (17)$$

Выше мы воспользовались оценкой при $\varepsilon = \sqrt{3/2}$

$$\begin{aligned} |(p, \rho^{(1)})| &= \frac{1}{3} \sum_{m=0}^M p_m p_{\overline{m}} \leq \frac{\varepsilon}{6} \sum_{m=0}^M p_m^2 + \frac{1}{6\varepsilon} \sum_{m=0}^M p_{\overline{m}}^2 \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} \sum_{m \in M_1} p_m^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{m \in M_1} p_m^2 = \frac{2}{\sqrt{6}} |(p, p^{(1)})|. \end{aligned}$$

Во втором случае $-\tilde{m} \in M_2$ и $4m_2 \geq m_1$ — аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right\|_P^2 &\leq \frac{38}{9} \frac{1}{\ell} \|\hat{\mathbf{u}}\|_U^2, \quad \left\| \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right\|_P^2 \leq \|p^{(2)}\|_P^2 + \|\rho^{(2)}\|_P^2 \leq \frac{2}{3} \|\hat{\mathbf{u}}\|_U^2, \\ |(p, \operatorname{div} \mathbf{u})| &\geq \frac{\sqrt{6} - 2}{2\sqrt{6}} |(p, \operatorname{div} \hat{\mathbf{u}})|. \end{aligned} \quad (18)$$

Из неравенств (15)–(18) непосредственно следует, что оценки (13) справедливы с константами $c_1 = 12$, $c_2 = 5$ при условии $\ell \geq 1$. Так как c_1 и c_2 не зависят от степени многочлена M , неравенство (12) справедливо для всех конечных тригонометрических многочленов с константой $\theta = (c_1 c_2)^{-1}$. А так как множество таких многочленов всюду плотно в P , переходя к замыканию в (12) мы доказываем теорему.

5. Основной результат. Оценки, полученные в предыдущих разделах, позволяют установить справедливость следующего утверждения. Имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Для областей Ω прямоугольной формы, $\Omega = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_i < L_i, i = 1, 2\}$, обозначим $\ell = \max(L_1/L_2, L_2/L_1)$. Тогда для константы γ из*

$$\gamma = \inf_{p \in P} \sup_{\mathbf{u} \in U} \frac{|(p, \operatorname{div} \mathbf{u})|}{\|\mathbf{u}\|_U \|p\|_P}$$

имеет место асимптотика $\gamma = O(\ell^{-1})$, $\ell \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\ell = L_1/L_2 \geq 1$ из теорем 1 и 2 следуют равномерные по ℓ оценки

$$\theta_1 \frac{1}{\ell^2} \leq \lambda_{\min}(A_0) \leq \theta_2 \frac{1}{\ell^2},$$

откуда в силу равенства $\lambda_{\min}(A_0) = \gamma^2$ имеем искомую асимптотику.

Далее заметим, что для фиксированного прямоугольника одновременное сжатие (или растяжение) сторон с коэффициентом $\alpha \neq 0$ не меняет собственных значений оператора A_0 . Это следует из замены независимых переменных в равенстве (3)

$$(A_0 q, q) = \sup_{\mathbf{u} \in U} \frac{(q, \operatorname{div} \mathbf{u})^2}{\|\mathbf{u}\|_U^2}$$

с последующим сокращением числителя и знаменателя на α^2 . Кроме того, поворот прямоугольника на произвольный угол φ в плоскости $\mathbb{R}^2$ также приводит к аналогичному результату [11]. Отсюда немедленно следует, что для областей $(0, \ell) \times (0, 1)$ и $(0, 1) \times (0, \ell^{-1})$ при любом ℓ множества собственных значений операторов A_0 совпадают. Таким образом, указанная асимптотика справедлива и в случае $\ell = L_2/L_1 \geq 1$. Теорема доказана.

В заключение следует отметить, что вытянутые прямоугольники являются типичными вычислительными областями в математическом моделировании различных эффектов, связанных с движением жидкости (плазмы). Поэтому важным практическим приложением полученного результата является получение количественной информации о том, насколько трудоемко будет нахождение численного решения даже линейных уравнений в длинных каналах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дьяконов Е. Г. Минимизация вычислительной работы. Асимптотически оптимальные алгоритмы для эллиптических задач. М.: Наука, 1989.
- [2] Girault V., Raviart P. A. Finite element methods for Navier-Stokes equations. Berlin: Springer, 1986.
- [3] Langer U., Queck W. On the convergence factor of Uzawa's algorithm // J. Comp. Appl. Math. 1986. V. 15. P. 191–202.
- [4] Чижонков Е. В. К сходимости метода искусственной сжимаемости. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1996. № 2. С. 13–20.
- [5] Chizhonkov E. V. Application of the Cossera spectrum to the optimization of a method for solving the Stokes Problem // Russ. Journal of Numer. Analysis and Math. Modelling. 1994. V. 9. № 3. P. 191–199.
- [6] Михлин С. Г. Спектр пучка операторов теории упругости. // УМН. 1973. Т. 28. № 3. С. 43–82.
- [7] Cosserat E. et F. Sur la déformation infiniment petite d'une enveloppe sphérique élastique. // C. R. Acad. Sci. Paris. 1901. V. 133. P. 326–329.
- [8] Chizhonkov E. V. On the Constant in the LBB condition for ring domains. Report No. 9537 (October 1995). The Netherlands: Dept. of Math. Univ. of Nijmegen, 1995.
- [9] Crouzeix M. Etude d'une methode de linearisation. Resolution des equations de Stokes stationnaires. Application aux equations des Navier-Stokes stationnaires // Cahiere de l'IRIA. 1974. № 12. P. 139–244.
- [10] Михлин С. Г. Дальнейшее исследование спектра Коссера. // Вестн. ЛГУ. Сер. Матем. 1967. Т. 7. № 2. С. 96–102.
- [11] Кобельков Г. М. Об эквивалентных нормировках подпространств L_2 // Anal. Math. 1977. № 3. С. 177–186.
- [12] Олышанский М. А. Задача Стокса с модельными краевыми условиями // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 4. С. 127–144.
- [13] Aristov P. P., Chizhonkov E. V. On the Constant in the LBB condition for rectangular domains. Report No. 9534 (September 1995). The Netherlands: Dept. of Math. Univ. of Nijmegen, 1995.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило

07.10.1997

Исправленный вариант

10.09.1999