Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. И. Кузнецов, А. А. Ладилова, Фильтрованные деформации алгебр Ли серии $\mathcal{R}$, *Матем. заметки*, 2012, том 91, выпуск 3, 400–406

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:22:16

Фильтрованные деформации алгебр Ли серии $\mathcal{R}$

М. И. Кузнецов, А. А. Ладилова

В статье доказывается жесткость исключительных алгебр Ли серии $\mathcal{R}$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 3 относительно фильтрованных деформаций.

Библиография: 16 названий.

В связи с классификацией простых алгебр Ли над полями малой характеристики представляет интерес исследование фильтрованных деформаций известных исключительных простых градуированных алгебр Ли и близких к ним алгебр. Под исключительными алгебрами Ли понимаются алгебры, которые не изоморфны ни классическим алгебрам Ли, ни алгебрам Ли картановского типа. При $p = 5$ исключительными простыми алгебрами Ли являются алгебры Меликяна, жесткость которых относительно фильтрованных деформаций доказана в [1], [2] (см. также [3]).

В данной работе изучаются фильтрованные деформации алгебр Ли серии $\mathcal{R}$ над алгебраически замкнутым полем K характеристики $p = 3$. Простые алгебры Ли серии $\mathcal{R}$ представляют интерес в связи с тем, что согласно [4] это единственные простые алгебры Ли характеристики $p > 2$, допускающие 1-градуировку $L = \bigoplus_{i \geq -1} L_i$ с компонентой L_0 , содержащей неабелев радикал. Впервые их построение было анонсировано в [5]. Существование таких простых алгебр Ли стало очевидным после появления простых 1-градуированных алгебр Ли S и T с разрешимой неабелевой нуль-компонентой, построенных Франк [6]. В [7] компонента T_0 была реализована как алгебра Ли дифференциальных операторов, действующих на $T_{-1} = K[x]/(x^3)$: $T_0 = \langle 1, X, X^2, \partial, X\partial \rangle$, где $\partial = d/dx$, X – оператор умножения на x . Ассоциативная алгебра $\text{End}(T_{-1})$ является усеченной алгеброй Вейля от одной переменной, заданной образующими X , ∂ и соотношениями $[\partial, X] = 1$, $\partial^3 = X^3 = 0$. Алгебра Ли T_0 инвариантна относительно формального преобразования Фурье $X \mapsto \partial$, $\partial \mapsto -X$, которое является автоморфизмом $\text{End}(T_{-1})$. Второй член B_2 фильтрации Бернштейна алгебры Вейля, $B_2 = \langle 1, X, \partial, X^2, X\partial, \partial^2 \rangle$, является наименьшей инвариантной подалгеброй Ли в $\mathfrak{gl}(T_{-1})$, содержащей T_0 . Подалгебра B_2 принимается за нуль-компоненту R_0 алгебр Ли серии $\mathcal{R}$. Так как X^2 и ∂^2 – преобразования ранга один, то пара (T_{-1}, R_0) бесконечно продолжаема в смысле Картана, что гарантирует существование семейства простых 1-градуированных алгебр Ли с компонентами

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 гг. (проект НК-13П(9)), а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-01-00580).

$R_{-1} = T_{-1}$, $R_0 = B_2$, образующих серию $\mathcal{R}$. Указанная 1-градуировка в алгебрах Ли серии $\mathcal{R}$ и соответствующая убывающая фильтрация называются *стандартными*. Инвариантность стандартной фильтрации относительно автоморфизмов установлена в [8]. Алгебры Ли серии $\mathcal{R}$ изучались в [9]. Мы будем использовать геометрическую реализацию алгебр Ли серии $\mathcal{R}$, построенную в [10], [11].

Для пары натуральных чисел $\bar{m} = (m_1, m_2)$ положим $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\bar{m})$ – алгебра разложенных степеней от двух переменных, $W = W(\bar{m})$ – алгебра специальных дифференцирований $\mathcal{O}$, $\Omega^2 = \Omega^2(\bar{m})$ – пространство дифференциальных форм степени 2. Определим алгебры Ли серии $\mathcal{R}$ как $\mathbb{Z}_2$ -градуированные алгебры:

$$R(\bar{m}) = R_{\bar{0}} \oplus R_{\bar{1}}, \quad \tilde{R}(\bar{m}) = \tilde{R}_{\bar{0}} \oplus \tilde{R}_{\bar{1}},$$

где

$$R_{\bar{0}} = \tilde{R}_{\bar{0}} = W, \quad R_{\bar{1}} = B^2(\Omega), \quad \tilde{R}_{\bar{1}} = \Omega^2.$$

Обозначим форму $dx_1 \wedge dx_2$ через ω . Стандартное действие W на себе и на модуле Ω^2 , а также формула

$$[f\omega, g\omega] = (f\partial_2 g - g\partial_2 f)\partial_1 - (f\partial_1 g - g\partial_1 f)\partial_2,$$

где $f\omega, g\omega \in \Omega^2$, определяют операции умножения на $R(\bar{m})$ и $\tilde{R}(\bar{m})$. Отметим, что коммутант $\tilde{R}(\bar{m})^{(1)} = R(\bar{m})$ – простая алгебра Ли.

Пусть L – алгебра Ли серии $\mathcal{R}$, т.е. $L = R(\bar{m})$ или $\tilde{R}(\bar{m})$. Указанная выше 1-градуировка алгебры L имеет следующий вид: $L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus L_2 \oplus \dots$, где

$$L_i = \{x^{(\alpha)}\partial_1, x^{(\alpha)}\partial_2, x^{(\alpha)}\omega : |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 = i + 1\}.$$

Соответствующую фильтрацию будем обозначать через $L_{(j)} = \sum_{i \geq j} L_i$. Алгебра L имеет $\mathbb{Z}_2$ -градуировку, $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$, где $L_{\bar{0}} = W$, $L_{\bar{1}} = B^2(\Omega)$ или Ω^2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Фильтрованная алгебра Ли $\mathcal{L}$ называется *фильтрованной деформацией* градуированной алгебры Ли L , если $\text{gr}\mathcal{L} \cong L$.

Основной способ описания фильтрованных деформаций связан с вычислением некоторой подгруппы второй группы когомологий. Пусть $H_+^2(W, L_{\bar{1}})$ – положительная часть естественной градуировки в $H^2(W, L_{\bar{1}})$, которая индуцируется с градуировкой на алгебре $W = \bigoplus_{i \geq -1} W_i$ и модуле $L_{\bar{1}} = \bigoplus_{j \geq -1} (L_{\bar{1}})_j$ по правилу: $H_l^2(W, L_{\bar{1}}) = \{f \in H^2(W, L_{\bar{1}}) \mid f(W_s, W_t) \subset (L_{\bar{1}})_{s+t+l}\}$. Справедлива следующая

ЛЕММА 1. *Группа $H_+^2(W, L_{\bar{1}})$ тривиальна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим $H_+^2(W, \Omega^2)$. Группа $H^2(W, \Omega^2)$ согласно [12; теорема 3.1] изоморфна

$$\begin{aligned} & H^0(\Omega) \otimes H^2(W_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) \\ & + H^1(\Omega) \otimes H^1(W_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) + H^2(\Omega) \otimes H^0(W_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2), \end{aligned}$$

где $H^i(\Omega)$ – группа когомологий де Рама, $W_{(0)} = \sum_{i \geq 0} W_i$, $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал в алгебре $\mathcal{O}$.

Очевидно, что $H^0(W_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) = 0$. Для вычисления $H^1(W_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2)$ применим спектральную последовательность Серра–Хохшилда для алгебры $W_{(0)}$ и идеала $W_{(1)}$. Тогда

$$\begin{aligned} E_2^{1,0} &= H^1(W_{(0)}/W_{(1)}, H^0(W_{(1)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2)) \\ &= H^1(W_0, H^0(W_{(1)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2)) = H^1(W_0, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) = 0, \end{aligned}$$

так как элемент $x_1\partial_1 + x_2\partial_2$ действует на элементы из $\Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2$ умножением на ненулевой скаляр.

Вычислим $E_2^{0,1} = H^0(W_0, H^1(W_{(1)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2))$. Поскольку $\Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2$ – тривиальный $W_{(1)}$ -модуль, то

$$\begin{aligned} H^1(W_{(1)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) &\cong (W_{(1)}/[W_{(1)}, W_{(1)}])^* \otimes \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2 \\ &\cong (W_1^* + W_2'^* + W_8'^* + \dots) \otimes \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2, \end{aligned}$$

где $W_{3^k-1}' = \langle x_i^{(3^k)} \partial_j \mid 1 \leq i, j \leq 2 \rangle \subset W_{3^k-1}$ (см. [13; гл. III, § 3]). Элемент $x_1\partial_1 + x_2\partial_2$ действует тождественно на $W_1^* \otimes \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2$. Кроме того,

$$H^0(W_0, W_{3^k-1}'^* \otimes \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) \cong \text{Hom}_{W_0}(W_{3^k-1}', \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) = 0,$$

так как W_{3^k-1}' является суммой двумерных неприводимых W_0 -модулей. Поэтому

$$E_2^{0,1} = H^0(W_0, W_1^* \otimes \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) + \bigoplus_k H^0(W_0, W_{3^k-1}'^* \otimes \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) = 0.$$

Таким образом, $H^1(W_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) = 0$ и

$$H^2(W, \Omega^2) \cong H^0(\Omega) \otimes H^2(W_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2) \cong H^2(W_{(0)}, \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2).$$

Так как данный изоморфизм сохраняет градуировку, то $H_+^2(W, \Omega^2) = 0$. Из приведенных выше рассуждений следует также, что группа $H^1(W, \Omega^2)$ тривиальна.

Рассмотрим короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow B^2(\Omega) \rightarrow \Omega^2 \rightarrow \Omega^2/B^2(\Omega) \rightarrow 0.$$

Ей соответствует точная когомологическая последовательность

$$\dots \rightarrow H_+^1(W, \Omega^2) \rightarrow H_+^1(W, \Omega^2/B^2(\Omega)) \rightarrow H_+^2(W, B^2(\Omega)) \rightarrow H_+^2(W, \Omega^2) \rightarrow \dots$$

Так как $H_+^1(W, \Omega^2) = H_+^2(W, \Omega^2) = 0$, то $H_+^1(W, \Omega^2/B^2(\Omega)) \cong H_+^2(W, B^2(\Omega))$. Алгебра W тривиально действует на $\Omega^2/B^2(\Omega)$, откуда

$$H^1(W, \Omega^2/B^2(\Omega)) \cong (W/[W, W])^* \otimes \Omega^2/B^2(\Omega).$$

Поскольку W – простая алгебра Ли, то $(W/[W, W])^* = 0$, т.е.

$$H_+^1(W, \Omega^2/B^2(\Omega)) = H^1(W, \Omega^2/B^2(\Omega)) = 0,$$

поэтому $H_+^2(W, B^2(\Omega)) = 0$.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathcal{L}$ – фильтрованная деформация алгебры L . Тогда $\mathcal{L}$ содержит подалгебру, изоморфную $L_{\bar{0}} = W$. Алгебры $\mathcal{L}$ и L изоморфны как фильтрованные W -модули.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что $\mathcal{L}$ содержит подалгебру, изоморфную W . Разложим $\mathcal{L}$ в прямую сумму подпространств: $\mathcal{L} = \bigoplus_{i \geq -1} (V_i \oplus M_i)$ так, что

$$(V_i + \mathcal{L}_{(i+1)})/\mathcal{L}_{(i+1)} = W_i, \quad (M_i + \mathcal{L}_{(i+1)})/\mathcal{L}_{(i+1)} = (L_{\bar{1}})_i.$$

Пусть $\lambda: L \rightarrow \mathcal{L}$ – изоморфизм векторных пространств, отображающий W_i на V_i и $(L_{\bar{1}})_i$ на M_i , причем $\text{gr}\lambda(u) = u$, $u \in L_i$.

Тогда для $u \in L_i$, $v \in L_j$

$$[\lambda(u), \lambda(v)] = \lambda([u, v]) + \sum_{r>0} (\mu_r(u, v) + \nu_r(u, v)),$$

где $\mu_r \in \text{Hom}(L \wedge L, \bigoplus_l M_l)_r$, $\nu_r \in \text{Hom}(L \wedge L, \bigoplus_l V_l)_r$ – однородные элементы степени r .

Пусть $u \in L_i$, $v \in L_j$, $w \in L_k$. Через γ_r обозначим $\mu_r + \nu_r$. Тогда

$$\begin{aligned} [[\lambda(u), \lambda(v)], \lambda(w)] &= \lambda([[u, v], w]) + \sum_{r>0} \gamma_r([u, v], w) + \sum_{r>0} \lambda([\lambda^{-1} \circ \gamma_r(u, v), w]) \\ &\quad + \sum_{r,s>0} \gamma_s(\lambda^{-1} \circ \gamma_r(u, v), w). \end{aligned}$$

Сравнивая однородные слагаемые из $M_{i+j+k+r}$ в тождестве Якоби для $u \in W_i$, $v \in W_j$, $w \in W_k$, получаем

$$\begin{aligned} &\mu_r([u, v], w) + \mu_r([v, w], u) + \mu_r([w, u], v) + \lambda([\lambda^{-1} \circ \mu_r(u, v), w]) \\ &\quad + \lambda([\lambda^{-1} \circ \mu_r(v, w), u]) + \lambda([\lambda^{-1} \circ \mu_r(w, u), v]) + \sum_{s=1}^{r-1} (\mu_{r-s}(\lambda^{-1} \circ \gamma_s(u, v), w) \\ &\quad + \mu_{r-s}(\lambda^{-1} \circ \gamma_s(v, w), u) + \mu_{r-s}(\lambda^{-1} \circ \gamma_s(w, u), v)) = 0. \end{aligned}$$

Индукцией по r найдем такие подпространства V_i , что $\mu_r(W, W) = 0$. Предположим, что μ_r обращается в нуль на $W \wedge W$ для всех $r \leq l$. Пусть $r = l+1$. Рассмотрим отображение $\varphi_r: W \wedge W \rightarrow L_{\bar{1}}$ такое, что $\varphi_r(u, v) = \lambda^{-1} \circ \mu_r(u, v)$ для $u \in W_i$, $v \in W_j$. По предположению индукции

$$\sum_{s=1}^{r-1} (\mu_{r-s}(\lambda^{-1} \circ \gamma_s(u, v), w) + \mu_{r-s}(\lambda^{-1} \circ \gamma_s(v, w), u) + \mu_{r-s}(\lambda^{-1} \circ \gamma_s(w, u), v)) = 0,$$

откуда $\delta\varphi_r(u, v, w) = 0$, т.е. φ_r – коцикл. Согласно лемме 1 имеем $H_+^2(W, L_{\bar{1}}) = 0$, поэтому существует линейное отображение ψ степени r , $\psi: W \rightarrow L_{\bar{1}}$ такое, что $\delta\psi = \varphi_r$, т.е.

$$[u, \psi(v)] - [v, \psi(u)] - \psi([u, v]) = \varphi_r(u, v).$$

Выберем подпространства $V'_i = (\text{Id} - \lambda \circ \psi \circ \lambda^{-1})(V_i)$, $M'_i = M_i$ и отображения $\lambda'_{|V'_i} = \lambda_{|V_i} - \lambda_{|V_i} \circ \psi$, $\lambda'_{|M'_i} = \lambda_{|M_i}$. Положим $\mu'_s = \mu_s$ и $\nu'_s = (\text{Id} - \lambda \circ \psi \circ \lambda^{-1}) \circ \nu_s$.

Тогда для $u \in W_i$, $v \in W_j$

$$\begin{aligned} [\lambda'(u), \lambda'(v)] &= [\lambda(u) - \lambda \circ \psi(u), \lambda(v) - \lambda \circ \psi(v)] \\ &\equiv \lambda([u, v]) + \sum_{s \leq l+1} \mu_s(u, v) + \sum_{s \leq l+1} \nu_s(u, v) - \lambda([\psi(u), v] + [u, \psi(v)]) \\ &\equiv \lambda'([u, v]) + \sum_{s \leq l+1} \nu'_s(u, v) \pmod{\mathcal{L}_{(i+j+r+1)}}. \end{aligned}$$

Следовательно, для построенных подпространств, которые мы также будем обозначать через V_i , отображение μ_r обращается в нуль на $W \wedge W$. Это в точности означает, что $[V_i, V_j] \subset \sum_{k \geq -1} V_k$, т.е. $\sum_{i \geq -1} V_i$ – подалгебра в $\mathcal{L}$, которая является фильтрованной деформацией алгебры Ли W . Как известно, (см. [12], [14], [15]), алгебра W является жесткой относительно фильтрованных деформаций. Таким образом, $\mathcal{L}$ содержит подалгебру W , причем стандартная фильтрация W индуцируется фильтрацией алгебры $\mathcal{L}$. Отображение $\lambda|_{L_{\bar{0}}}$ является изоморфизмом $L_{\bar{0}}$ и W .

Покажем, что W выделяется прямым слагаемым в W -модуле $\mathcal{L}$, $\mathcal{L} = W \oplus M$. Для этого достаточно установить, что $\text{ad } \partial_i^{p^{m_i}}(\mathcal{L}) = 0$. Действительно, тогда $\mathcal{L}_{(0)}$ и, следовательно, $\mathcal{L}/\mathcal{L}_{(0)} = W/\mathfrak{m}W \oplus \Omega^2/\mathfrak{m}\Omega^2$ являются $\widehat{W}_{(0)}$ -модулями, где $\widehat{W}_{(0)} = W_{(0)} + \langle \partial_i^{p^{m_i}}, i = 1, 2 \rangle$, что позволяет применить технику, развитую в [12], и вложить W -модуль $\mathcal{L}$ в усеченный коиндуцированный модуль $\text{coind}(\mathcal{L}/\mathcal{L}_{(0)}) = W \oplus \Omega^2$. При этом фильтрация $\mathcal{L}$ согласована со стандартными фильтрациями в W и Ω^2 , соответствующими разделенным степеням максимального идеала $\mathfrak{m}$, причем в Ω^2 фильтрация сдвинута на 1 влево. Так как $W \subset \mathcal{L}$, то $\mathcal{L} = W \oplus M$, где $M = \mathcal{L} \cap \Omega^2$. Поскольку, согласно [16], $B^2(\Omega)$ является единственным собственным ненулевым подмодулем в Ω^2 , либо $M = B^2(\Omega)$, либо $M = \Omega^2$, соответственно случаям $L = R(\overline{m})$ или $L = \tilde{R}(\overline{m})$. Выберем в качестве M_i пространства стандартной градуировки модуля M . Тогда $\lambda|_{L_{\bar{1}}}$ – изоморфизм $L_{\bar{1}}$ и M . Кроме того, $\lambda([u, v]) = [\lambda(u), \lambda(v)]$, когда $u \in L_{\bar{0}}$, $v \in L$.

Докажем, что $\text{ad } \partial_i^{p^{m_i}} = 0$, $i = 1, 2$. Так как $\text{ad } \partial_i^{p^{m_i}}(W) = 0$, то $\text{ad } \partial_i^{p^{m_i}}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ является гомоморфизмом W -модулей. Предположим, что $\text{ad } \partial_i^{p^{m_i}}(\mathcal{L}) \neq 0$ для некоторого i . Тогда гомоморфизм $\beta_i = \text{ad } \partial_i^{p^{m_i}}: \mathcal{L}/W \rightarrow \mathcal{L}$ нетривиален. Пересечение образа $\text{im } \beta_i$ и W тривиально, так как в противном случае в алгебре W содержался бы ненулевой собственный идеал $\text{im } \beta_i \cap W$. Таким образом, β_i индуцирует ненулевой морфизм $\bar{\beta}_i: \mathcal{L}/W \rightarrow \mathcal{L}/W$. В случае $L = R(\overline{m})$ модуль $\mathcal{L}/W$ неприводим, так как $\text{gr}(\mathcal{L}/W) \cong B^2(\Omega)$, и $\bar{\beta}_i = c_i \text{Id}$, $c_i \neq 0$. В случае $L = \tilde{R}(\overline{m})$ модуль $\mathcal{L}/W$ может содержать собственный неприводимый подмодуль коразмерности 1, и $\bar{\beta}_i$ действует на нем умножением на скаляр c_i . Но тогда $\bar{\beta}_i$ действует на $\mathcal{L}/W$ с собственным значением c_i , иначе в $\tilde{R}(\overline{m})$ содержался бы 1-мерный W -подмодуль, что невозможно. Таким образом, отображение $\text{ad } \partial_i^{p^{m_i}}$ имеет на $\mathcal{L}$ только два собственных значения 0 и c_i . Для корневого разложения $\mathcal{L}$ относительно $\text{ad } \partial_i^{p^{m_i}}$ имеем $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_{c_i}$, где $\mathcal{L}_0 = W$. Тогда $[\mathcal{L}_{c_i}, \mathcal{L}_{c_i}] \subset \mathcal{L}_{2c_i} = \{0\}$ и $\mathcal{L}_{c_i}$ – идеал в $\mathcal{L}$, а $\text{gr } \mathcal{L}_{c_i}$ – идеал в L . Получили противоречие; следовательно, $c_i = 0$, что завершает доказательство в случае, когда $\mathcal{L}/W$ неприводим. В случае, когда $\mathcal{L}/W$ приводим, $\bar{\beta}_i$ действует нулевым образом на неприводимом подмодуле коразмерности 1; следовательно, $\text{im } \bar{\beta}_i$ имеет размерность не более 1. Так как $\text{im } \bar{\beta}_i$ – подмодуль в $\mathcal{L}/W$, то $\text{im } \bar{\beta}_i = \{0\}$. Тогда

$0 \neq \text{ad } \partial_i^{m_i}(\mathcal{L}) \subset W$, что невозможно, как показано выше. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ТЕОРЕМА 1. *Если $\mathcal{L}$ – фильтрованная алгебра Ли такая, что $\text{gr } \mathcal{L} = L$, где $L = R(\overline{m})$ или $\widehat{R}(\overline{m})$, то $\mathcal{L} \cong L$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем изоморфизм векторных пространств $\lambda: L \rightarrow \mathcal{L}$, построенный в лемме 2. Для доказательства теоремы осталось показать, что выполнено $\lambda([u, v]) = [\lambda(u), \lambda(v)]$, когда $u, v \in L_{\overline{1}}$, т.е. $\gamma_r(u, v) = 0$ для всех $r > 0$, где отображения γ_r определены в доказательстве леммы 2.

Из соотношения

$$[\lambda(w), [\lambda(u), \lambda(v)]] = [[\lambda(w), \lambda(u)], \lambda(v)] + [\lambda(u), [\lambda(w), \lambda(v)]]$$

для элементов $u \in (L_{\overline{1}})_i$, $v \in (L_{\overline{1}})_j$ и $w \in W_k$ и равенств

$$\begin{aligned} [\lambda(w), [\lambda(u), \lambda(v)]] &= \lambda([w, [u, v]]) + \sum_{r>0} \lambda([w, \lambda^{-1} \circ \gamma_r(u, v)]), \\ [[\lambda(w), \lambda(u)], \lambda(v)] + [\lambda(u), [\lambda(w), \lambda(v)]] &= \lambda([[w, u], v]) + \sum_{r>0} \gamma_r([w, u], v) \\ &\quad + \lambda([u, [w, v]]) + \sum_{r>0} \gamma_r(u, [w, v]), \end{aligned}$$

которые следуют из леммы 2, получаем, что

$$[w, \lambda^{-1} \circ \gamma_r(u, v)] = \lambda^{-1} \circ \gamma_r([w, u], v) + \lambda^{-1} \circ \gamma_r(u, [w, v]).$$

Пусть $\alpha = \lambda^{-1} \circ \gamma_r$, u, v – мономы, и $\alpha(u, v) \in L_{i+j+r}$, $r > 0$. Если $\alpha(u, v) \neq 0$, то, последовательно действуя элементами ∂_i , $i = 1, 2$, на $\alpha(u, v)$ достаточное число раз, можно добиться того, чтобы результат лежал в $L_{-1} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} &(\text{ad } \partial_1)^{s_1} (\text{ad } \partial_2)^{s_2} \alpha(u, v) \\ &= \sum_{t_1=0}^{s_1} \sum_{t_2=0}^{s_2} \binom{s_1}{t_1} \binom{s_2}{t_2} \alpha((\text{ad } \partial_1)^{t_1} (\text{ad } \partial_2)^{t_2} u, (\text{ad } \partial_1)^{s_1-t_1} (\text{ad } \partial_2)^{s_2-t_2} v). \quad (*) \end{aligned}$$

Теперь заметим, что в правой части равенства $(*)$ все слагаемые нулевые, так как аргументами кососимметрического отображения α являются либо 0, либо элементы из одномерного пространства $(L_{\overline{1}})_{-1}$. Таким образом, $\alpha = 0$ и $\gamma_r = 0$, что доказывает утверждение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. I. Kuznetsov, “On Lie algebras of contact type”, *Comm. Algebra*, **18:9** (1990), 2943–3013.
- [2] M. I. Kuznetsov, “The Melikyan algebras as Lie algebras of the type G_2 ”, *Comm. Algebra*, **19:4** (1991), 1281–1312.
- [3] H. Strade, *Simple Lie Algebras Over Fields of Positive Characteristic. I. Structural Theory*, de Gruyter Exp. Math., **38**, Walter de Gruyter, Berlin, 2004.

- [4] М. И. Кузнецов, “Классификация простых градуированных алгебр Ли с неполупростой компонентой L_0 ”, *Матем. сб.*, **180**:2 (1989), 147–158.
- [5] Ю. Б. Ермолаев, “О семействе простых алгебр Ли над полем характеристики 3”, *V Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей*, Тезисы докладов, Ин-т матем. СО РАН СССР, Новосибирск, 1982, 52–53.
- [6] M. Frank, “A new simple Lie algebras of characteristic three”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **38** (1973), 43–46.
- [7] М. И. Кузнецов, “Модулярные простые алгебры Ли с разрешимой максимальной подалгеброй”, *Матем. сб.*, **101**:1 (1976), 77–86.
- [8] О. А. Муляр, “Автоморфизмы и дифференцирования исключительных простых алгебр Ли серии F ”, *Вопросы теории представлений алгебр и групп*. 10, Зап. научн. сем. ПОМИ, **305**, ПОМИ, СПб., 2003, 165–186.
- [9] Чан Нам Зунг, “О двух классах простых алгебр Ли над полем характеристики 3”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1992, №2, 12–15.
- [10] С. М. Скрыбин, “Новые серии простых алгебр Ли характеристики 3”, *Матем. сб.*, **183**:8 (1992), 3–22.
- [11] G. Brown, “On the structure of some Lie algebras of Kuznetsov”, *Michigan Math. J.*, **39**:1 (1992), 85–90.
- [12] М. И. Кузнецов, “Усеченные индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **53**:3 (1989), 557–589.
- [13] А. И. Кострикин, И. Р. Шафаревич, “Градуированные алгебры Ли конечной характеристики”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **33**:2 (1969), 251–322.
- [14] М. И. Кузнецов, “Распределения над алгеброй срезанных многочленов”, *Матем. сб.*, **136**:2 (1988), 187–205.
- [15] А. С. Джумадильдаев, “Деформации алгебр Ли $W_n(\mathbf{m})$ ”, *Матем. сб.*, **180**:2 (1989), 168–186.
- [16] Я. С. Крылюк, *Алгебры картановского типа: представления и продолжения*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1978.

М. И. Кузнецов

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

E-mail: kuznets-1349@yandex.ru

Поступило

20.07.2009

А. А. Ладилова

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

E-mail: ladilova@algebraic.ru