Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Горелов, Об алгебраических тождествах между обобщенными гипергеометрическими функциями, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 4, 511–516

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8522>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 09:22:42

Об алгебраических тождествах между обобщенными гипергеометрическими функциями

В. А. Горелов

В статье выводятся новые алгебраические тождества между гипергеометрическими функциями, удовлетворяющими линейным дифференциальным уравнениям произвольного порядка, а также между фундаментальными матрицами гипергеометрических уравнений.

Библиография: 10 названий.

Пусть $\mathbb{A}$ – множество всех алгебраических чисел, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^- = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

Обобщенные гипергеометрические функции (см. [1; гл. 5], [2; гл. 4]) определяются как

$${}_lF_{q-1}(z) = {}_lF_{q-1}(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z) = {}_lF_{q-1}(\nu_1, \dots, \nu_l; \lambda_2, \dots, \lambda_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu_1)_n \cdots (\nu_l)_n z^n}{n! (\lambda_2)_n \cdots (\lambda_q)_n},$$

где $0 \leq l \leq q$, $\nu_1, \dots, \nu_l \in \mathbb{C}$, $\lambda_2, \dots, \lambda_q \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, $(\nu)_0 = 1$, $(\nu)_n = \nu(\nu+1) \cdots (\nu+n-1)$. Будем считать, что если вектор $\vec{\lambda}$ используется в качестве набора параметров для функции ${}_lF_{q-1}(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$, то он имеет компоненту, равную 1, и эта компонента автоматически переставляется на первое место. Функция ${}_lF_{q-1}(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)$ удовлетворяет гипергеометрическому дифференциальному уравнению

$$L(\vec{\nu}; \vec{\lambda})y \equiv L(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z)y \equiv \left(\prod_{j=1}^q (\delta + \lambda_j - 1) - z \prod_{k=1}^l (\delta + \nu_k) \right) y = 0, \quad (1)$$

где $\delta = z d/dz$ (см. там же).

Отметим, что ${}_0F_0(z) = e^z$, ${}_0F_1(1/2; -z^2/4) = \cos z$, ${}_0F_1(1; -z^2/4) = J_0(z)$ – функция Бесселя, ${}_2F_1(z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса, ${}_1F_1(z)$ – функция Куммера.

Если $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{Z}$, $i \neq k$, то функции

$$z^{1-\lambda_k} {}_lF_{q-1}(\vec{\nu} - \lambda_k + 1; \vec{\lambda} - \lambda_k + 1; z), \quad k = 1, \dots, q, \quad (2)$$

образуют фундаментальную систему решений уравнения (1) (см. [1; § 5.7]).

Зигель предложил метод (см. [3]–[5]), позволяющий исследовать арифметическую природу значений Е-функций (определение см. там же), к которым относятся, в частности, все функции вида ${}_lF_{q-1}(\vec{\nu}; \vec{\lambda}; z^{q-l})$ с рациональными параметрами.

Шидловский [5; гл. 3, 4] доказал, что задача об алгебраической независимости значений Е-функций и, следовательно, функций ${}_lF_q(z)$ в алгебраических точках сводится к задаче об алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ функций ${}_lF_{q-1}(\alpha z^{q-l})$, где $\alpha \in \mathbb{A}$. Этот результат повысил интерес к методам доказательства алгебраической независимости гипергеометрических функций и, наоборот, к нахождению всех алгебраических тождеств между ними.

В настоящей работе алгебраические связи между гипергеометрическими функциями выводятся из некоторого соотношения между фундаментальными матрицами гипергеометрических уравнений, параметры которых удовлетворяют определенным условиям. Найденными условиями, как намерен показать автор в последующих публикациях, при некоторых ограничениях исчерпываются все возможности существования алгебраических тождеств второй степени, связывающих гипергеометрические функции.

Всюду далее знак T над матрицей будет означать транспонирование.

ТЕОРЕМА. Пусть $\vec{\nu} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $q \geq \max(2, l)$, $\lambda_1 = 1$, Φ_1, Φ_2 – произвольные фундаментальные матрицы дифференциальных операторов $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda})$ и $L(1 - \vec{\nu}; 2 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l}z)$. Тогда

1) существует матрица $C \in \text{GL}(q, \mathbb{C})$ такая, что

$$\Phi_1(\Phi_2 C)^T = B, \quad \text{где } B \in \text{GL}(q, \mathbb{C}(z)),$$

причем

$$b_{k, q-k+1} = (-1)^{q-k} z^{1-q}, \quad k = 1, \dots, q,$$

а выше этих элементов стоят нули;

2) если $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{N}$, $i, k = 1, \dots, q$, а Φ_1, Φ_2 соответствуют множествам функций (2) и

$$f_k = z^{\lambda_k-1} {}_lF_{q-1}(\lambda_k - \vec{\nu}; \lambda_k + 1 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l}z), \quad k = 1, \dots, q, \quad (3)$$

то C – диагональная матрица с элементами

$$c_{k,k} = (-1)^{k+1} \prod_{1 \leq i < j \leq q; i, j \neq k} (\lambda_i - \lambda_j),$$

пустое произведение скобок равно 1.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $q \geq \max(2, l)$, $\lambda_i - \lambda_k \notin \mathbb{N}$, $i, k = 1, \dots, q$, числа $c_k = c_{k,k}$ определены в теореме. Тогда

$$\sum_{k=1}^q c_k {}_lF_{q-1}(\vec{\nu} - \lambda_k + 1; \vec{\lambda} - \lambda_k + 1; z) {}_lF_{q-1}(\lambda_k - \vec{\nu}; \lambda_k + 1 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l}z) = 0. \quad (4)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Справедливы тождества

$$\begin{aligned} & {}_1F_1(\nu; \lambda; z) {}_1F_1(1 - \nu; 2 - \lambda; -z) - {}_1F_1(\nu - \lambda + 1; 2 - \lambda; z) {}_1F_1(\lambda - \nu; \lambda; -z) = 0; \\ & {}_2F_1(\nu, \mu; \lambda; z) {}_2F_1(1 - \nu, 1 - \mu; 2 - \lambda; z) \\ & \quad - {}_2F_1(\nu - \lambda + 1, \mu - \lambda + 1; 2 - \lambda; z) {}_2F_1(\lambda - \nu, \lambda - \mu; \lambda; z) = 0; \\ & (\lambda - \mu) {}_0F_2(\lambda, \mu; z) {}_0F_2(2 - \lambda, 2 - \mu; -z) \\ & \quad + (\mu - 1) {}_0F_2(\mu - \lambda + 1, 2 - \lambda; z) {}_0F_2(\lambda - \mu + 1, \lambda; -z) \\ & \quad + (1 - \lambda) {}_0F_2(\lambda - \mu + 1, 2 - \mu; z) {}_0F_2(\mu - \lambda + 1, \mu; -z) = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что первые два тождества следствия 2 можно вывести соответственно из тождеств Куммера и Эйлера (см. [2; § 6.3, формула (7), § 2.1, формула (22)]). Частный случай тождества (4) при $q = l = 3$ доказал Дарлинг (см. [2; § 4.3, формула (10)]). Гаусс получил тождество

$${}_2F_1(\nu, \mu; \lambda; z) {}_2F_1(-\nu, -\mu; -\lambda; z) - \frac{\nu\mu(\lambda - \nu)(\lambda - \mu)z^2}{\lambda^2(\lambda^2 - 1)} {}_2F_1(1 - \nu, 1 - \mu; 2 - \lambda; z) {}_2F_1(1 + \nu, 1 + \mu; 2 + \lambda; z) = 1$$

(см. [6; формула (6)]). Обобщение этого результата на произвольные функции ${}_lF_q(z)$ получено Нестеренко [6; § 4]. Тождества второй степени между гипергеометрическими функциями и их производными изучались также Салиховым (библиографию см. в [7]).

ЛЕММА 1. Пусть $\delta = zd/dz$, $P(x) \in \mathbb{C}[x]$. Тогда

$$zP(\delta) = P(\delta - 1)z.$$

Лемма 1 является частным случаем леммы 13 гл. 10 книги [5].

Напомним, что сопряженным к дифференциальному уравнению

$$Ly \equiv a_my^{(m)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

называется уравнение

$$\bar{L}v \equiv (-1)^m(a_mv)^{(m)} + \dots - (a_1v)' + a_0v = 0$$

(см., например, [8; п. 5.3], [9; гл. 2, § 5]). Аналогично определяются сопряженные дифференциальные операторы. В частности, $\overline{d/dz} = -d/dz$, $\overline{\delta + \gamma} = -(\delta + 1 - \gamma)$, $\overline{L + Q} = \bar{L} + \bar{Q}$, $\overline{\gamma L} = \gamma \bar{L}$, где $\gamma \in \mathbb{C}$. Известно также, что $\overline{LQ} = \bar{Q} \bar{L}$ (см. [8; пп. 5.3, 17.4]).

ЛЕММА 2. Пусть $\vec{v} \in \mathbb{C}^l$, $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^q$, $q \geq 1$, $\lambda_1 = 1$. Тогда дифференциальные операторы $L(\vec{v}; \vec{\lambda})$ и $(-1)^q L(1 - \vec{v}; 2 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l}z)$, деленные на z , являются сопряженными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$L_1 = \frac{d}{dz} \prod_{k=2}^q (\delta + \lambda_k - 1), \quad L_2 = \prod_{k=1}^l (\delta + \nu_k), \quad L = z(L_1 - L_2).$$

Принимая во внимание свойства дифференциальных операторов, приведенные перед формулировкой леммы 2, утверждение леммы 1, а также то, что операторы вида $\delta + \gamma_k$ перестановочны, имеем

$$\begin{aligned} z(\overline{z^{-1}L}) &= z(\bar{L}_1 - \bar{L}_2) = (-1)^q z \left(\prod_{k=2}^q (\delta + 2 - \lambda_k) \right) \frac{d}{dz} - (-1)^l z \prod_{k=1}^l (\delta + 1 - \nu_k) \\ &= (-1)^q \left(\prod_{k=2}^q (\delta + (2 - \lambda_k) - 1) \right) z \frac{d}{dz} - (-1)^l z \prod_{k=1}^l (\delta + 1 - \nu_k) \\ &= (-1)^q \left(\prod_{k=1}^q (\delta + (2 - \lambda_k) - 1) - (-1)^{q-l} z \prod_{k=1}^l (\delta + 1 - \nu_k) \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем утверждение леммы 2.

Как нетрудно убедиться, уравнение (1), деленное на z , при $l < q - 1$, $l = q - 1$, $l = q$ соответственно, имеет вид

$$\begin{aligned} z^{q-1}y^{(q)} + \left(\lambda_1 + \dots + \lambda_q + \frac{q(q-3)}{2} \right) z^{q-2}y^{(q-1)} + \dots - \nu_1 \dots \nu_l y &= 0, \\ z^{q-1}y^{(q)} + \left(-z + \lambda_1 + \dots + \lambda_q + \frac{q(q-3)}{2} \right) z^{q-2}y^{(q-1)} + \dots - \nu_1 \dots \nu_l y &= 0, \\ (1-z)z^{q-1}y^{(q)} + \left(\lambda_1 + \dots + \lambda_q + \frac{q(q-3)}{2} \right) & \\ - \left(\nu_1 + \dots + \nu_q + \frac{q(q-1)}{2} \right) z & z^{q-2}y^{(q-1)} + \dots - \nu_1 \dots \nu_q y = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Вронскианы этих уравнений с точностью до постоянного множителя равны соответственно

$$W_1 = z^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_q + q(q-3)/2)}, \quad W_2 = e^z W_1, \quad W_3 = (1-z)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_q - \nu_1 \dots - \nu_q - q} W_1.$$

В силу леммы 2 и свойств решений сопряженных дифференциальных уравнений (см., например, [9; гл. 2, § 5.2]) для любой фундаментальной матрицы Φ_1 уравнения $L(\vec{\nu}; \vec{\lambda})y = 0$ найдется фундаментальная матрица Φ_2 уравнения $L(1 - \vec{\nu}; 2 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l}z)y = 0$ такая, что $B = \Phi_1 \Phi_2^T$ является матрицей, у которой

$$b_{k,q-k+1} = (-1)^{q-k} z^{1-q}, \quad k = 1, \dots, q,$$

а выше этих элементов стоят нули. Другими словами, если $\vec{v}$ и $\vec{g}$ – фундаментальные системы решений, соответствующие Φ_1 , Φ_2 , то для скалярных произведений их производных имеем

$$(\vec{v}^{(s)}, \vec{g}^{(k)}) = 0, \quad s + k < q - 1, \quad \text{и} \quad (\vec{v}^{(s)}, \vec{g}^{(k)}) = (-1)^k z^{1-q}, \quad s + k = q - 1.$$

Дифференцируя эти скалярные произведения и заменяя с помощью дифференциальных уравнений (5) производные $\vec{v}^{(q)}$, $\vec{g}^{(q)}$ на линейные комбинации векторов $\vec{v}^{(0)}, \dots, \vec{v}^{(q-1)}$, $\vec{g}^{(0)}, \dots, \vec{g}^{(q-1)}$, получим, что все элементы матрицы B принадлежат $\mathbb{C}(z)$.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы. Предположим, что разность любых двух параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ не принадлежит $\mathbb{Z}$. В качестве фундаментальных систем решений уравнения (1) и уравнения, которому удовлетворяет функция ${}_lF_{q-1}(1 - \vec{\nu}; 2 - \vec{\lambda}; (-1)^{q-l}z)$, возьмем, соответственно, множества функций (2) и (3). Тогда, как уже было сказано, найдется вектор $\vec{g} = \{g_1, \dots, g_q\}$, где все g_k являются линейными комбинациями функций (3) с коэффициентами из $\mathbb{C}$, такой, что скалярное произведение вектора с компонентами (2) и векторов $\vec{g}, \vec{g}', \dots, \vec{g}^{(q-2)}$ равно нулю. Рассмотрев в этих скалярных произведениях слагаемые, не содержащие дробных степеней z , приходим к выводу, что можно положить $g_k = a_k f_k$, $k = 1, \dots, q$. Числа a_k найдем следующим образом. Доказано (см. [9; гл. 2, § 5.2], [10; п. 17.7]), что

$$\vec{g} = \{A_{q,1}, \dots, A_{q,q}\} W^{-1} z^{1-q},$$

где $A_{q,k}$ – алгебраические дополнения к элементам последней строки вронскиана W уравнения (1). Рассмотрим также вектор, компоненты которого являются членами наименьшей степени разложений по z соответствующих компонент вектора $\vec{g}$,

т.е. вектор $\{a_1 z^{\lambda_1-1}, \dots, a_q z^{\lambda_q-1}\}$. Для вычисления последнего заменим каждый элемент фундаментальной матрицы, соответствующей (2), на младший член его разложения по степеням z . Алгебраические дополнения к первым двум элементам последней строки полученной матрицы равны

$$A_{q,1} = (-1)^{q-1} \begin{vmatrix} z^{1-\lambda_2} & \dots & z^{1-\lambda_q} \\ (z^{1-\lambda_2})' & \dots & (z^{1-\lambda_q})' \\ \dots & \dots & \dots \\ (z^{1-\lambda_2})^{(q-2)} & \dots & (z^{1-\lambda_q})^{(q-2)} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{q-1} z^{-\lambda_2-\dots-\lambda_q+\sum_{3-q \leq i \leq 1} i} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ 1-\lambda_2 & \dots & 1-\lambda_q \\ \dots & \dots & \dots \\ \prod_{4-q \leq i \leq 1} (i-\lambda_2) & \dots & \prod_{4-q \leq i \leq 1} (i-\lambda_q) \end{vmatrix};$$

$$A_{q,2} = (-1)^q \begin{vmatrix} 1 & z^{1-\lambda_3} & \dots & z^{1-\lambda_q} \\ ({}_l F_{q-1})'|_{z=0} & (z^{1-\lambda_3})' & \dots & (z^{1-\lambda_q})' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ({}_l F_{q-1})^{(q-2)}|_{z=0} & (z^{1-\lambda_3})^{(q-2)} & \dots & (z^{1-\lambda_q})^{(q-2)} \end{vmatrix}.$$

Определитель, стоящий в правой части выражения для $A_{q,1}$, является, очевидно, многочленом от λ_2 степени $q-2$ и корнями $\lambda_3, \dots, \lambda_q$. Поэтому он имеет вид $(\lambda_2 - \lambda_3) \dots (\lambda_2 - \lambda_q) (-1)^{2(q-2)} A$, где A — аналогичный определитель, полученный из него вычеркиванием первого столбца и последней строки. Следовательно,

$$A_{q,1} = (-1)^{q-1} z^{-\lambda_2-\dots-\lambda_q+\sum_{3-q \leq i \leq 1} i} \prod_{2 \leq i < j \leq q} (\lambda_i - \lambda_j).$$

При раскрытии определителя, стоящего в выражении для $A_{q,2}$, по первому столбцу, члены наименьшей степени по z содержатся, очевидно, в первом слагаемом, равном

$$(-1)^q \begin{vmatrix} (z^{1-\lambda_3})' & \dots & (z^{1-\lambda_q})' \\ \dots & \dots & \dots \\ (z^{1-\lambda_3})^{(q-2)} & \dots & (z^{1-\lambda_q})^{(q-2)} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^q z^{-\lambda_3-\dots-\lambda_q+\sum_{3-q \leq i \leq -1} i} \begin{vmatrix} 1-\lambda_3 & \dots & 1-\lambda_q \\ \dots & \dots & \dots \\ \prod_{4-q \leq i \leq 1} (i-\lambda_3) & \dots & \prod_{4-q \leq i \leq 1} (i-\lambda_q) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^q z^{-\lambda_3-\dots-\lambda_q+\sum_{3-q \leq i \leq -1} i} (1-\lambda_3) \dots (1-\lambda_q) \prod_{3 \leq i < j \leq q} (\lambda_i - \lambda_j).$$

Алгебраические дополнения $A_{q,k}$, $3 \leq k \leq q$, вычисляются аналогично. Умножив члены наименьшей степени разложений по z компонент вектора $\{A_{q,1}, \dots, A_{q,q}\}$ на член наименьшей степени произведения $(-1)^{q-1} z^{1-q} W^{-1}$, получим вектор $\{a_1 z^{\lambda_1-1}, \dots, a_q z^{\lambda_q-1}\}$, где числа a_k совпадают с диагональными элементами матрицы C в формулировке теоремы. Таким образом, для рассматриваемого случая теорема доказана. В случае, когда некоторые из параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ совпадают, утверждение 2 теоремы получается с помощью предельного перехода, так как функции ${}_l F_q(z)$ и, следовательно, все компоненты матрицы $\Phi_1(\Phi_2 C)^T$ непрерывно зависят от $\lambda_2, \dots, \lambda_q$ (см. [2; п. 2.1.6]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. Люк, *Специальные математические функции и их аппроксимации*, Мир, М., 1980.
- [2] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1965.
- [3] C. L. Siegel, “Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen”, *Abhandlungen Akad. Berlin*, 1929, № 1, 70 pp.
- [4] C. L. Siegel, *Transcendental Numbers*, Ann. of Math. Stud., **16**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1949.
- [5] А. Б. Шидловский, *Трансцендентные числа*, Наука, М., 1987.
- [6] Ю. В. Нестеренко, “Приближения Эрмита–Паде обобщенных гипергеометрических функций”, *Матем. сб.*, **185**:10 (1994), 39–72.
- [7] В. Х. Салихов, Г. Г. Вискина, “Алгебраические соотношения между гипергеометрической E -функцией и ее производными”, *Матем. заметки*, **71**:6 (2002), 832–844.
- [8] Э. Л. Айнс, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Харьков, 1939.
- [9] Дж. Сансоне, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. т. 1, ИЛ, М., 1953.
- [10] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Наука, М., 1971.

В. А. Горелов

Московский энергетический институт (технический
университет)

E-mail: gorelov.va@mail.ru

Поступило

17.09.2009