Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Бибилов, Об устойчивости положения равновесия осциллятора при периодических возмущениях, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 6, 947–950

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8523>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 17:05:45

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Об устойчивости положения равновесия осциллятора при периодических возмущениях

Ю. Н. Бибииков

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + x^{p/q} = X(x, \dot{x}, t) \quad (1)$$

при следующих предположениях:

- 1) p/q – несократимая дробь, $p > q$, p и q – нечетные числа;
- 2) $X(x, y, t)$ – вещественно аналитическая функция переменных x, y в некоторой окрестности точки $(x = 0, y = 0)$, непрерывная и периодическая по t ;
- 3) разложение $X(x, y, t)$ по степеням x, y не содержит членов порядка ниже, чем $p + 1$, если переменной x приписывать порядок q , а переменной y – порядок $(p + q)/2$.

Таким образом, уравнение (1) можно рассматривать как малое возмущение осциллятора $\ddot{x} + x^{p/q} = 0$.

Рассматривается вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (1). При $q = 1$ для автономного уравнения (1) этот вопрос был исследован Ляпуновым [1], а при $q = 1$, $p = 3$ – автором [2], [3].

Введем в рассмотрение периодические функции $C(\varphi)$, $S(\varphi)$, определяемые как решение системы дифференциальных уравнений $C' = -S$, $S' = C^{p/q}$ с начальными данными $C(0) = 1$, $S(0) = 0$. Если $p = q = 1$, то $C(\varphi)$, $S(\varphi)$ превращаются в обычные $\cos \varphi$, $\sin \varphi$. Аналогом основного тригонометрического тождества является тождество

$$(p + q)S^2 + 2qC^{1+p/q} = 2q.$$

В результате замены

$$x = r^q C(\varphi), \quad \dot{x} = -r^{(p+q)/2} S(\varphi) \quad (2)$$

получим систему

$$\begin{cases} \dot{r} = -\frac{1}{qr^{(p+q)/2-1}} X(r^q C(\varphi), -r^{(p+q)/2} S(\varphi)) S(\varphi), \\ \dot{\varphi} = r^{(p-q)/2} - \frac{1}{r^{(p+q)/2}} X(r^q C(\varphi), -r^{(p+q)/2} S(\varphi)) C(\varphi), \end{cases}$$

которую можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{r} = a_1(\varphi, t)r^{(p-q)/2+2} + \dots = R(r, \varphi, t), \\ \dot{\varphi} = r^{(p-q)/2} + b_1(\varphi, t)r^{(p-q)/2+1} + \dots = r^{(p-q)/2} + \Phi(r, \varphi, t), \end{cases} \quad (3)$$

где многоточием обозначены члены порядка по r выше выписанных.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00439).

DOI: 10.4213/mzm5823

© Ю. Н. Бибииков, 2014

ЛЕММА. Существует формальный ряд

$$r = \rho + h_2(\varphi, t)\rho^2 + \dots = \rho + h(\rho, \varphi, t), \quad (4)$$

приводящий систему (3) к виду

$$\begin{cases} \dot{\rho} = c_1 \rho^{(p+q)/2+2} + \dots = P(\rho), \\ \dot{\varphi} = \rho^{(p-q)/2} + Q(\rho, \varphi, t), \end{cases} \quad (5)$$

где $c_1, \dots$ – постоянные, $Q = O(\rho^{(p-q)/2+1})$ при $\rho \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя равенство (4) по t с учетом (3) и (5), получим соотношение для определения $h(\rho, \varphi, t)$:

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} \rho^{(p-q)/2} + \frac{\partial h}{\partial t} = R(\rho + h, \varphi, t) - \frac{\partial h}{\partial \varphi} Q - \frac{\partial h}{\partial \rho} P - P. \quad (6)$$

Далее, используем представление произвольной периодической по φ, t функции $F(\varphi, t)$ в виде

$$F(\varphi, t) = \bar{F} + \hat{F}(\varphi) + \tilde{F}(\varphi, t), \quad (7)$$

где $\bar{F}$ – среднее значение F по φ, t , $\hat{F}$ – среднее значение $F(\varphi, t) - \bar{F}$ по t .

Приравнявая в (6) коэффициенты при $\rho^{(p+q)/2+2}$, получим уравнение

$$\frac{\partial h_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial h_{2+(p-q)/2}}{\partial t} = a_1(\varphi, t) - c_1. \quad (8)$$

Положим $c_1 = \bar{a}_1$ и разобьем уравнение (8) на два следующих:

$$\frac{dh_2}{d\varphi} = \hat{a}_1(\varphi), \quad \frac{\partial \tilde{h}_{2+(p-q)/2}}{\partial t} = \tilde{a}_1(\varphi, t).$$

Первое из этих уравнений определяет $h_2(\varphi)$ как первообразную $\hat{a}_1(\varphi)$. Рассматривая φ как параметр во втором уравнении, определим и $\tilde{h}_{2+(p-q)/2}$.

Далее, приравнявая в (6) коэффициенты при $\rho^i, i > (p-q)/2 + 2$, получим уравнение

$$\frac{\partial h_{i-(p-q)/2}}{\partial \varphi} + \frac{\partial h_i}{\partial t} = a_i(\varphi, t) - c_i - G_i(\varphi, t), \quad (9)$$

где функции G_i известны, если уже определены $h_2, \dots, h_{i-(p-q)/2-1}, \tilde{h}_{i-(p-q)/2}, \dots, \tilde{h}_{i-1}$. При этом $\tilde{h}_2 = 0, \dots, \tilde{h}_{1+(p-q)/2} = 0$. Положим $F_i = a_i - G_i$, а каждое из уравнений (9) разобьем на два следующих:

$$\frac{d\hat{h}_{i-(p-q)/2}}{d\varphi} = \hat{F}_i, \quad \frac{\partial \tilde{h}_i}{\partial t} = \tilde{F}_i,$$

откуда $\hat{h}_{i-(p-q)/2}$ и $\tilde{h}_i$ определяются, как и $h_2 = \hat{h}_2$ и $\tilde{h}_{2+(p-q)/2}$, квадратурами.

Таким образом, мы последовательно с возрастанием $i \geq (p-q)/2 + 2$ определим все $\hat{h}_{i-(p-q)/2}$ и $\tilde{h}_i$, что и доказывает лемму.

Пусть c_β – первая ненулевая среди постоянных $c_1, c_2, \dots$. Обрывая ряд (4) на членах порядка $i = \beta$ для $\tilde{h}_i$ и порядка $\beta - (p-q)/2$ для $\hat{h}_{i-(p-q)/2}$, получим вместо системы (5) систему

$$\begin{cases} \dot{\rho} = c_\beta \rho^\beta + \dots, \\ \dot{\varphi} = \rho^{(p-q)/2} + \dots, \end{cases} \quad (10)$$

где многоточием отмечены бесконечно малые при $\rho \rightarrow 0$ по сравнению с выписанными слагаемыми функции.

Так как устойчивость нулевого решения уравнения (1) по отношению к $x, \dot{x}$ эквивалентна в силу (2) устойчивости по отношению к переменной r , а, значит, и ρ , то справедлива

ТЕОРЕМА 1. Если $c_\beta < 0$, то нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво, а если $c_\beta > 0$, то оно неустойчиво.

Рассмотрим в разложении функции $X(x, \dot{x}, t)$ член

$$A(t)x^{2d}\dot{x}, \quad \text{где } \bar{A}(t) \neq 0, \quad d \geq 1.$$

В разложении $R(r, \varphi, t)$ ему соответствует член

$$\frac{1}{q} A(t)C^{2d}(\varphi)S^2(\varphi)r^{2dq+1},$$

у которого среднее значение коэффициента отлично от нуля. Рассмотрим величину c_{2qd+1} , где d – наименьшее из возможных.

В случае общего положения $c_{2qd+1} \neq 0$, так как указанное ненулевое среднее значение является одним из слагаемых суммы, определяющей коэффициент c_{2qd+1} . При этом может, конечно, оказаться, что существуют $\beta < 2qd + 1$, для которых $c_\beta \neq 0$. Тем не менее, будем вычислять c_i вплоть до c_{2qd+1} . Тогда индексы i функций $\tilde{h}_i(\varphi, t)$ и индексы $j = i - (p - q)/2$ функций $\hat{h}_j(\varphi)$ будут удовлетворять неравенствам

$$\begin{cases} \frac{p-q}{2} + 2 \leq i \leq 2qd + 1, \\ 2 \leq j \leq \frac{1}{2}((4d+1)q - p + 2). \end{cases} \quad (11)$$

Кроме того, $2dq + 1 \geq (p - q)/2 + 2$, а так как d – наименьшее из возможных, то выполнено $2q(d - 1) + 1 < (p - q)/2 + 2$. Следовательно,

$$(4d - 3)q \leq p \leq (4d + 1)q - 2, \quad (12)$$

откуда

$$\frac{p - q + 2}{4q} \leq d \leq \frac{p + 3q}{4q}. \quad (13)$$

Из (11) и (12) вытекает, что

$$2 \leq j \leq 2q + 1. \quad (14)$$

При этом если $d = 1$, то в силу (11) $2 \leq j \leq 2q$, так как $p \geq q + 2$.

Заметим, что $d = 1$ тогда и только тогда, когда $p \leq 5q - 2$. Мы видим, что в случае общего положения верхняя граница количества членов в оборванном ряде (4) не зависит от p и d .

Частный случай: $q = 1$. В силу (14) $2 \leq j \leq 3$. Положим $p = 2n - 1$. В силу (13) $n/2 \leq d \leq (n + 1)/2$.

Если n – четное число, $n = 2k$, то $d = k$, $2d = n$. В силу (11)

$$2 \leq j \leq \frac{1}{2}((4k + 1) - (4k - 1) + 2) = 2.$$

Итак, если n – четное, то замена (4) имеет вид

$$r = \rho + h_2(\varphi)\rho^2 + h_{n+1}(\varphi, t)\rho^{n+1}.$$

Если же n – нечетное число, $n = 2k + 1$, то $d = k + 1$, $2d = n + 1$. В силу (11) $2 \leq j \leq 3$. В этом случае замена (4) принимает вид

$$r = \rho + h_2(\varphi)\rho^2 + h_3(\varphi)\rho^3 + h_{n+1}(\varphi, t)\rho^{n+1} + h_{n+2}(\varphi, t)\rho^{n+2}.$$

Выполняя указанные замены и используя установленный Ляпуновым [1] факт, что среднее значение функций $C^m(\varphi)S^\ell(\varphi)$, у которых хотя бы один из показателей m или ℓ нечетен, равно нулю, получаем следующий результат:

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p/q = 2n - 1$, g – среднее значение коэффициента при $x^n \dot{x}$ в разложении функции $X(x, \dot{x}, t)$, если n четно, и при $x^{n+1} \dot{x}$, если n нечетно. Тогда, если $g < 0$, то нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво, а если $g > 0$, то оно неустойчиво.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] А. М. Ляпунов, *Собр. соч.*, Т. 2, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1956, 272–331. [2] Ю. Н. Биби́ков, *Матем. заметки*, **65:3** (1999), 323–335. [3] Ю. Н. Биби́ков, *Локальные проблемы теории многочастотных нелинейных колебаний*, Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, СПб., 2003.

Ю. Н. Биби́ков

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: bibicoff@yandex.ru

Поступило

24.09.2013