Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Д. Икрамов, Критерии унитарной конгруэнтности комплексных (2×2) -матриц, *Матем. заметки*, 2010, том 88, выпуск 2, 249–260

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8524>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:05:23

УДК 512

Критерии унитарной конгруэнтности комплексных (2×2) -матриц

Х. Д. Икрамов

Дано описание канонических форм комплексных (2×2) -матриц относительно унитарных конгруэнций, что далее используется для получения простых критериев унитарной конгруэнтности (2×2) -матриц.

Библиография: 4 названия.

1. Введение

Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ унитарно подобны, если подобие между ними можно осуществить посредством унитарной матрицы U :

$$B = U^*AU. \quad (1)$$

Проверить, что A и B унитарно подобны, можно с помощью классического критерия Шпехта (см. [1]).

КРИТЕРИЙ ШПЕХТА. Матрицы A и B унитарно подобны тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{tr} W(A, A^*) = \operatorname{tr} W(B, B^*) \quad (2)$$

для любого слова $W(s, t)$ от некоммутирующих переменных s и t .

Критерий Шпехта неэффективен, поскольку сводится к проверке бесконечного множества условий (2). Пирси (см. [2]) придал ему эффективную форму, показав, что для $(n \times n)$ -матриц A и B проверку равенств (2) можно ограничить словами длины, не превосходящей $2n^2$. Однако и эта оценка, по-видимому, очень завышена. Например, известно, что для малых n достаточно проверить лишь небольшое число равенств (2). Так, (2×2) -матрицы A и B унитарно подобны тогда и только тогда, когда имеют одинаковые собственные значения и одинаковую евклидову норму (называемую также нормой Фробениуса). Сличение собственных значений и норм сводится к проверке трех следовых равенств

$$\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B, \quad (3)$$

$$\operatorname{tr} A^2 = \operatorname{tr} B^2, \quad (4)$$

$$\operatorname{tr}(AA^*) = \operatorname{tr}(BB^*). \quad (5)$$

Если наперед известно, что матрицы A и B нормальны, то из этой системы можно удалить равенство (5).

Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ конгруэнтны, если $B = S^T A S$ для некоторой невырожденной матрицы S . Если конгруэнцию между A и B можно осуществить посредством унитарной матрицы U , т.е.

$$B = U^T A U,$$

то говорят, что A и B унитарно конгруэнтны.

В отличие от ситуации с унитарным подобием, в настоящее время не известен никакой (даже неэффективный) критерий унитарной конгруэнтности. Рассмотрим, например, следующий результат из [3].

ТЕОРЕМА 1. Матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ унитарно конгруэнтны тогда и только тогда, когда существует унитарная матрица V такая, что

$$B B^* = V^* (A A^*) V, \quad B \bar{B} = V^* (A \bar{A}) V, \quad B^T \bar{B} = V^* (A^T \bar{A}) V.$$

Унитарное подобие для каждой из пар $(A A^*, B B^*)$, $(A \bar{A}, B \bar{B})$, $(A^T \bar{A}, B^T \bar{B})$ можно проверить, пользуясь критерием Шпехта–Пирси. Однако не видно способа для проверки того, что все три этих унитарных подобия можно осуществить с помощью одной и той же унитарной матрицы V .

Цель настоящей публикации – описать канонические формы комплексных (2×2) -матриц относительно унитарных конгруэнций, что позволит нам сформулировать простые критерии унитарной конгруэнтности по крайней мере для этого минимального порядка. Отметим, что для матриц большего порядка не известны канонические формы даже относительно унитарных подобий. Укажем также, почему задача описания канонических форм сложнее в случае унитарных конгруэнций по сравнению с унитарными подобиями.

Из соотношений

$$B = Q^T A Q, \quad Q Q^* = I \tag{6}$$

следует

$$B \bar{B} = Q^T A Q Q^* \bar{A} \bar{Q} = Q^T A \bar{A} \bar{Q},$$

т.е. матрицы $A_R = A \bar{A}$ и $B_R = B \bar{B}$ унитарно подобны и подобие между ними осуществляет унитарная матрица $\bar{Q}$. Таким образом, инвариантами унитарных конгруэнций, выполняемых с матрицей A , являются все инварианты унитарных подобий, относящиеся к A_R . В то же время, как мы увидим впоследствии, унитарное подобие между A_R и B_R не гарантирует унитарной конгруэнтности между A и B .

После изложения необходимых предварительных сведений (раздел 2) мы даем описание канонических форм в разделе 3. В основу описания положен вид формы Шура матрицы $A_R = A \bar{A}$, определяемый нормальностью (или аномальностью) и характером спектра этой матрицы. Различным типам форм Шура соответствуют различные канонические формы относительно унитарных конгруэнций. Обсуждение этих форм в разделе 4 приводит к критериям унитарной конгруэнтности (2×2) -матриц.

2. Предварительные сведения

Согласно теореме Шура (см., например, [1; § 2.3]) всякую матрицу $A \in M_n(\mathbb{C})$ можно унитарным подобием привести к треугольному виду. Будем для определенности говорить о верхней треугольной форме. Для (2×2) -матриц верхняя форма

Шура имеет вид

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \tau \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Для нормальной матрицы A (и только в этом случае) $\tau = 0$. Если $\tau \neq 0$, то посредством дополнительного подобия с диагональной унитарной матрицей можно добиться, чтобы элемент в позиции $(1, 2)$ стал положительным. Иначе говоря, унитарно подобны все матрицы вида (7), имеющие одни и те же собственные значения λ_1 и λ_2 и одинаковый модуль элемента в позиции $(1, 2)$. Поэтому матрицу (7) с неотрицательным τ можно считать канонической формой относительно унитарного подобия.

Заметим, что число $|\tau|$ называется *отклонением* (матриц A и Δ) от нормальности. Поскольку

$$|\tau|^2 = \|A\|_F^2 - |\lambda_1|^2 - |\lambda_2|^2,$$

то отклонение от нормальности есть инвариант унитарного подобия. (Символ $\|\cdot\|_F$ обозначает матричную норму Фробениуса, которая в литературе на русском языке чаще именуется евклидовой нормой.)

Для матрицы A общего положения λ_1 и λ_2 могут быть любыми комплексными числами. Если же говорить о матрицах вида $A_R = A\bar{A}$, то их собственные значения не вполне произвольны. В общем случае (т.е. для произвольного порядка n) особенности спектра этих матриц таковы.

а) Если λ – невещественное собственное значение матрицы $A\bar{A}$, то $\bar{\lambda}$ – также собственное значение. При этом в жордановой структуре матрицы $A\bar{A}$ числам λ и $\bar{\lambda}$ отвечают жордановы клетки одних и тех же порядков.

Порядки жордановых клеток, относящихся к собственному значению λ , нередко называют *частичными кратностями* этого собственного значения. Таким образом, λ и $\bar{\lambda}$ имеют одни и те же частичные кратности и, как следствие, одинаковую алгебраическую кратность.

б) Если $\lambda < 0$ является собственным значением матрицы $A\bar{A}$, то каждая его частичная кратность повторяется четное число раз. Иначе говоря, в жордановой структуре матрицы $A\bar{A}$ всякий жорданов блок для λ встречается четное число раз.

В разделе 3 нам придется многократно решать уравнения вида

$$az + b\bar{z} = 0. \quad (8)$$

Если $|a| \neq |b|$, то это уравнение имеет только тривиальное решение $z = 0$. При $a = b = 0$ решением является любое число $z \in \mathbb{C}$. Пусть $|a| = |b|$, причем

$$a = \rho \exp(i\phi_a), \quad b = \rho \exp(i\phi_b), \quad \rho > 0.$$

В этом случае решениями уравнения (8) будут все вещественные кратные комплексного числа

$$z_0 = i \exp\left(i \frac{\phi_a + \phi_b}{2}\right).$$

3. Канонические формы

3.1. Анормальная матрица A_R с комплексными собственными значениями. Пусть в (7) числа λ_1 и λ_2 невещественны и комплексно сопряжены, а $\tau \neq 0$.

Для определенности будем считать, что $\text{Im}\lambda_1 > 0$. Посмотрим, что можно сказать о матрице A , для которой A_R имеет форму (7).

Записывая A в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

находим

$$|a_{11}|^2 + a_{12}\bar{a}_{21} = \lambda_1, \quad (9)$$

$$|a_{22}|^2 + a_{21}\bar{a}_{12} = \bar{\lambda}_1, \quad (10)$$

$$\bar{a}_{11}a_{21} + a_{22}\bar{a}_{21} = 0. \quad (11)$$

Из равенств (9) и (10) следует, что

$$|a_{11}| = |a_{22}|. \quad (12)$$

При этом $a_{11} \neq 0$. Выполняя, если потребуется, надлежащую диагональную унитарную конгруэнцию, можем считать, что

$$x = a_{11} = a_{22} > 0. \quad (13)$$

Теперь соотношение (11) означает, что элемент a_{21} должен быть чисто мнимым числом:

$$a_{21} = iy, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

Используя, если это необходимо, еще одну диагональную унитарную конгруэнцию с трансформирующей матрицей $D = \text{diag}(1, -1)$, можем добиться, чтобы элемент

$$a_{12} = u + iv \quad (15)$$

имел положительную вещественную часть u . (Как мы сейчас увидим, равенство $u = 0$ невозможно.) Для определения четырех вещественных величин x , y , u и v получаем четыре уравнения

$$x^2 + yv = a, \quad (16)$$

$$yu = b, \quad (17)$$

$$xu = c, \quad (18)$$

$$2x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = d. \quad (19)$$

Здесь $a = \text{Re}\lambda_1$, $b = \text{Im}\lambda_1$ и первые два уравнения суть вещественный эквивалент комплексного соотношения (9). По условию $b \neq 0$, поэтому $u \neq 0$. Величина c в уравнении (18) есть половина отклонения матрицы (7) от нормальности. Само это уравнение есть запись соотношения $\{A_R\}_{12} = a_{11}\bar{a}_{12} + a_{12}\bar{a}_{22}$. Наконец,

$$d = \|A\|_F^2. \quad (20)$$

Тем самым, (19) есть требование сохранения евклидовой нормы при преобразовании исходной матрицы A в искомую каноническую форму.

Для решения системы (16)–(19) можно предложить следующий способ: из первых трех уравнений x , y и v выражаются через u формулами

$$x = \frac{c}{u}, \quad y = \frac{b}{u}, \quad v = \frac{au^2 - c^2}{bu}. \quad (21)$$

Эти выражения подставляются в (19), что приводит к биквадратному уравнению относительно u :

$$(a^2 + b^2)u^4 - (b^2d + 2ac^2)u^2 + (b^2 + c^2)^2 = 0. \quad (22)$$

Наличие вещественных корней у этого уравнения вытекает из известного факта разрешимости матричного уравнения

$$X\overline{X} = \Delta \quad (23)$$

с невырожденной правой частью Δ (см. [4]). Поскольку старший коэффициент и свободный член положительны, то при ненулевом дискриминанте уравнение (22) имеет два различных положительных корня $\tilde{u}$ и $\hat{u}$. Им соответствуют две матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{u} + i\tilde{v} \\ i\tilde{y} & \tilde{x} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{u} + i\hat{v} \\ i\hat{y} & \hat{x} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

в которых $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{v}$ и $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{v}$ определяются формулами (21) соответственно по $\tilde{u}$ и $\hat{u}$.

Неожиданным оказывается следующее утверждение:

ТЕОРЕМА 2. *Если $\tilde{u} \neq \hat{u}$, то матрицы (24) и (25) не являются унитарно конгруэнтными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что матрицы A_1 и A_2 унитарно конгруэнтны и конгруэнция между ними осуществляется посредством матрицы Q . Тогда, как отмечено во введении, матрица $\overline{Q}$ преобразует подобием $A_1\overline{A_1}$ в $A_2\overline{A_2}$. Но $A_1\overline{A_1}$ и $A_2\overline{A_2}$ суть одна и та же матрица (7). Поскольку Δ – треугольная матрица, первый столбец в $\overline{Q}$ есть собственный вектор для Δ , отвечающий собственному значению λ_1 . Такой вектор с точностью до скалярного множителя должен совпадать с координатным вектором $e_1 = (1, 0)^T$. Унитарная матрица $\overline{Q}$ с таким первым столбцом обязана быть диагональной. Поскольку и A_1 , и A_2 имеют положительные диагональные элементы, то диагональная унитарная матрица, преобразующая A_1 в A_2 , в действительности является единичной. Но тогда $A_1 = A_2$. Это противоречие доказывает теорему.

Таким образом, классу унитарного подобия, представляемому матрицей (7), соответствуют два различных класса унитарной конгруэнтности, определяемые каноническими формами (24) и (25).

3.2. Нормальная матрица A_R с комплексными собственными значениями. Пусть по-прежнему $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ и $\text{Im}\lambda_1 > 0$. Однако, в отличие от предыдущего случая, будем считать, что $\tau = 0$, т.е. матрица (7) является нормальной. Заметим, что решения уравнения (23), в котором матрица Δ нормальна, называются *конгруэнтно-нормальными матрицами*.

Как и прежде, приходим к равенству (12). Если допустить, что справедливы соотношения (13), то, рассуждая, как выше, придем к противоречию: с одной стороны, согласно (17) должно быть $u \neq 0$; с другой, в силу (18) $u = 0$, так как в данном случае $c = 0$. Итак, вместо (13) имеем

$$a_{11} = a_{22} = 0.$$

Отсюда следует, что модули (ненулевых) элементов a_{12} и a_{21} суть сингулярные числа матрицы A . С помощью подходящей диагональной унитарной конгруэнции один из этих элементов (для определенности, a_{21}) можно сделать положительным, тогда он попросту совпадет с одним из сингулярных чисел. Соотношение

$$a_{12}\bar{a}_{21} = a_{12}a_{21} = \lambda_1$$

однозначно определяет элемент a_{12} .

Ситуация, описанная в теореме 2, имеет соответствие и в данном случае.

ТЕОРЕМА 3. *Если $\tilde{s} > 0$, $\hat{s} > 0$ и $\tilde{s} \neq \hat{s}$, то матрицы*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_1}{\tilde{s}} \\ \tilde{s} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_1}{\hat{s}} \\ \hat{s} & 0 \end{pmatrix}$$

не являются унитарно конгруэнтными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем по схеме, использованной в теореме 2. Пусть унитарная матрица Q осуществляет конгруэнцию между A_1 и A_2 ; тогда $\bar{Q}$ преобразует подобием диагональную матрицу Δ в себя. Поэтому столбцы $\bar{Q}$ суть собственные векторы для Δ , отвечающие соответственно λ_1 и λ_2 , т.е. эти столбцы с точностью до скалярных множителей суть координатные векторы e_1 и e_2 . Тем самым, матрица $\bar{Q}$ диагональная. Отсюда, в частности, следует, что внедиагональный элемент в позиции $(2, 1)$ должен иметь один и тот же модуль в A_1 и A_2 , тогда как по условию $\tilde{s} \neq \hat{s}$. Это противоречие доказывает теорему.

3.3. Анормальная матрица A_R с простыми положительными собственными значениями. Пусть теперь собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы (7) положительны и различны. Число τ считаем ненулевым, но необязательно вещественным.

В системе (9)–(11) уравнение (10) нужно заменить уравнением

$$|a_{22}|^2 + a_{21}\bar{a}_{12} = \lambda_2. \quad (26)$$

Поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, из соотношений (9) и (26) следует, что

$$|a_{11}| \neq |a_{22}|. \quad (27)$$

В этом случае равенство (11) возможно лишь при $a_{21} = 0$, т.е. если A – верхнетреугольная матрица. Посредством диагональной унитарной конгруэнции ее диагональные элементы можно сделать положительными, после чего они станут арифметическими квадратными корнями из чисел λ_1 и λ_2 . Итак,

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & a_{12} \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Остается определить значение элемента a_{12} .

Сопоставим (невыврожденной) матрице A матрицу

$$C = A(A^{-1})^T, \quad (29)$$

называемую *кокватратом* матрицы A . Если A претерпевает унитарную конгруэнцию (6), то

$$B(B^{-1})^T = Q^T A Q Q^* (A^{-1})^T \overline{Q} = Q^T A (A^{-1})^T \overline{Q},$$

т.е. матрица $A(A^{-1})^T$ преобразуется унитарным подобием, а потому ее след можно считать инвариантом унитарных конгруэнций, выполняемых с A .

Кокватрат матрицы (28) имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{a_{12}^2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} & \frac{a_{12}}{\sqrt{\lambda_2}} \\ -\frac{a_{12}}{\sqrt{\lambda_1}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что число a_{12} связано со следом t кокватрата исходной матрицы A равенством

$$2 - \frac{a_{12}^2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} = t. \quad (30)$$

Матрицы (28), соответствующие двум значениям a_{12} , даваемым этим равенством, отличаются друг от друга унитарной конгруэнцией с диагональной трансформирующей матрицей $D = \text{diag}(1, -1)$. Обе эти матрицы можно считать каноническими формами данного класса унитарной конгруэнтности.

3.4. Нормальная матрица A_R с простыми положительными собственными значениями. Пусть матрица (7) имеет те же собственные значения, что и в предыдущем пункте, но $\tau = 0$, т.е. Δ – нормальная матрица.

Рассуждения, приводящие к равенству $a_{21} = 0$, остаются неизменными, однако условие $\tau = 0$ означает, что и $a_{12} = 0$. Обеспечив, как обычно, положительность диагональных элементов, приходим к единственной канонической матрице

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Отметим, что весь класс унитарной конгруэнтности, определяемый матрицей (31), состоит из симметричных матриц, имеющих сингулярные числа $\sqrt{\lambda_1}$ и $\sqrt{\lambda_2}$.

3.5. Вырожденная анормальная матрица A_R с неотрицательными собственными значениями. Положим $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\tau \neq 0$. Тогда вместо (28) получим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

После надлежащей унитарной конгруэнции число a_{12} можно считать положительным. Если d определено, как в (20), т.е. как квадрат евклидовой нормы исходной матрицы, то a_{12} вычисляется из соотношения

$$\lambda_1 + a_{12}^2 = d.$$

Матрица (32) с найденным положительным значением a_{12} есть единственная каноническая форма данного класса унитарной конгруэнтности.

3.6. Вырожденная нормальная матрица A_R с неотрицательными собственными значениями. Заменяв в условиях предыдущего случая неравенство $\tau \neq 0$ равенством $\tau = 0$, приходим к единственной канонической матрице

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Класс унитарной конгруэнтности, определяемый матрицей (33), состоит из (вырожденных) симметричных матриц с ненулевым сингулярным числом $\sqrt{\lambda_1}$.

3.7. Анормальная матрица A_R с кратным положительным собственным значением. Пусть в матрице (7) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ и $\tau \neq 0$. Как и в случае комплексных собственных значений, выводим равенство (12) из уравнений (9) и (10). При этом элементы a_{11} и a_{22} отличны от нуля, так как в противном случае матрица $A\bar{A}$ была бы диагональной вопреки условию $\tau \neq 0$. Добившись с помощью диагональной унитарной конгруэнции выполнения соотношений

$$a_{11} = a_{22} > 0,$$

снова найдем, что

$$a_{21} = iy, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Новым по сравнению с п. 3.1 является включение

$$a_{12}\bar{a}_{21} \in \mathbb{R}. \quad (34)$$

Отсюда следует, что

$$a_{21} = 0, \quad a_{12} \neq 0.$$

В самом деле, допуская, что $a_{21} \neq 0$, мы заключаем из (34), что

$$a_{12} = iz, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Но в таком случае

$$\Delta_{12} = \{A\bar{A}\}_{12} = -a_{11}iz + iz a_{11} = 0,$$

что противоречит предположению о недиагонализуемости матрицы Δ .

Итак, A должна быть матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & a_{12} \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Значение коэффициента a_{12} , как и в п. 3.3, определяется следом t коквадрата исходной матрицы A (см. равенство (30), где следует положить $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). Матрица (35) с любым из двух возможных значений a_{12} и есть каноническая форма для рассматриваемого случая.

3.8. Нормальная матрица A_R с кратным положительным собственным значением. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda > 0$ и $\tau = 0$, то Δ есть скалярная матрица λI . По-прежнему выполняются соотношения (12), (14) и (34). Если

$$a_{11} = a_{22} = 0, \quad (36)$$

то дополнительной диагональной унитарной конгруэнцией можно добиться неравенства $a_{21} > 0$. В этом случае элемент a_{21} совпадет с одним из сингулярных чисел матрицы A . Соответствующий элемент a_{12} также имеет положительное значение, равное λ/a_{21} , а потому также является сингулярным числом. Обозначая сингулярные числа s_1 и s_2 , приходим к тому, что любая из матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & s_2 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ s_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

(получаемых друг из друга перестановкой строк и столбцов) является канонической.

Указанный вывод сделан в предположении (36). Покажем, что это предположение можно удовлетворить, если для первоначально взятого решения уравнения

$$A\bar{A} = \Delta$$

оно не было выполнено. Мы воспользуемся тем обстоятельством, что *любая* унитарная конгруэнция, производимая с матрицей A , не изменяет скалярной матрицы Δ .

Итак, пусть $a_{11} = a_{22} \neq 0$. Мы начинаем, как обычно, с диагональной унитарной конгруэнции, присваивающей диагональным элементам положительные значения. В результате оба внедиагональных элемента a_{12} и a_{21} станут чисто мнимыми числами. Еще одна конгруэнция с диагональной трансформирующей матрицей $D = \text{diag}(1, i)$ сделает эти элементы вещественными, изменив знак диагонального элемента в позиции $(2, 2)$. Таким образом, от первоначальной матрицы A мы перешли к *вещественной* матрице вида

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & -x \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Поскольку $\text{tr } \tilde{A} = 0$, то хаусдорфово множество матрицы $\tilde{A}$ содержит число нуль и найдется нормированный вектор $r \in \mathbb{R}^2$ такой, что

$$(\tilde{A}r, r) = 0.$$

(Напомним, что *хаусдорфовым множеством* (иначе, *числовой областью*) матрицы $A \in M_n(\mathbb{C})$ называется совокупность чисел вида (Ax, x) , где x – произвольный вектор длины 1 из $\mathbb{C}^n$.)

Пусть s – нормированный вектор из $\mathbb{R}^2$, ортогональный к r . Совершив переход от текущего (координатного) базиса к базису $\{r, s\}$, мы заменим матрицу (38) *подобной* ей вещественной матрицей с нулевыми диагональными элементами. Остается заметить, что для вещественных матриц преобразования ортогонального подобия и ортогональной конгруэнции тождественны.

Итак, во всех случаях мы приходим к каноническим формам (37).

3.9. Нулевая матрица A_R . Пусть теперь $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Случай $\tau \neq 0$ невозможен, так как уравнение

$$A\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau \neq 0,$$

решений не имеет (см. [4]). Поэтому должно быть $\Delta = 0$. Анализ, проведенный в предыдущем пункте, сохраняет силу с тем отличием, что хотя бы одно из сингулярных чисел матрицы A равно нулю. Матрицы (37) остаются каноническими.

3.10. Матрица A_R с кратным отрицательным собственным значением.

Последний возможный случай: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$. При этом τ не может быть ненулевым числом (см. свойство б) в разделе 2). И здесь проходят рассуждения из п. 3.8. Единственное (но важное) отличие состоит в том, что если значением элемента в позиции $(2, 1)$ является сингулярное число s_i , $i = 1, 2$, то элемент в позиции $(1, 2)$ равен λ/s_i и, следовательно, знаком отличается от второго сингулярного числа. Поэтому каноническими будут матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & -s_2 \\ s_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -s_1 \\ s_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Критерии унитарной конгруэнтности

Обсудим, какие величины требуется найти, чтобы построить канонические формы, описанные в предыдущем разделе.

Во всех случаях нужны собственные значения матрицы $A_R = A\bar{A}$. Они указывают, какую именно каноническую форму следует искать, а функции от них (например, квадратные корни) могут выступать как элементы этой формы. Если вычислены следы t_1 и t_2 матрицы A_R и ее квадрата, то характеристический многочлен этой матрицы имеет вид

$$f_2(\lambda) = \lambda^2 - t_1\lambda + \frac{t_1^2 - t_2}{2},$$

а его дискриминант, определяющий характер спектра, равен $2t_2 - t_1^2$.

В нескольких типах канонических форм участвуют сингулярные числа матрицы A . Коэффициенты квадратного уравнения, корнями которого являются эти числа, выражаются через следы матриц $S = A\bar{A}^*$ и S^2 .

Чтобы вычислить элемент в позиции $(1, 2)$ форм (28) и (35), нужно найти след коквадрата матрицы A . Для формы (32) элемент в той же позиции выражается (помимо $\sqrt{\lambda_1}$) через квадрат d евклидовой нормы матрицы A , т.е. через след матрицы $A\bar{A}^*$.

Наиболее сложным является случай комплексных собственных значений λ_1 и λ_2 . Составление уравнений (16)–(19), из которых определяются элементы форм (24) и (25), требует знания не только чисел λ_1 и d , но и отклонения матрицы A_R от нормальности. Это отклонение (число τ в (7)) можно найти, вычислив след матрицы $A_R A_R^*$ (иначе говоря, квадрат евклидовой нормы матрицы A_R).

Предположим, что все величины, указанные в предыдущем абзаце, уже вычислены и система (16)–(19) решена. Остается главная трудность: если положительные корни $\tilde{u}$ и $\hat{u}$ уравнения (22) различны, то какую из двух возможных форм (24) и (25) имеет заданная матрица A ?

Ответить на этот вопрос нам опять поможет коквадрат матрицы A . Начнем с более простой ситуации, когда A_R – нормальная матрица. Для матрицы вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_1}{s} \\ s & 0 \end{pmatrix}, \quad s \neq 0,$$

имеем

$$(\Lambda^{-1})^T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{s}{\lambda_1} \\ \frac{1}{s} & 0 \end{pmatrix}, \quad t(s) = \operatorname{tr}\{\Lambda(\Lambda^{-1})^T\} = \frac{\lambda_1}{s^2} + \frac{s^2}{\lambda_1}.$$

Несложно проверить, что равенство

$$t(s_1) = t(s_2)$$

невозможно для невещественного числа λ_1 , если положительные числа s_1 и s_2 различны.

Итак, матрица A , для которой A_R – нормальная матрица с комплексными собственными значениями λ_1 и $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, имеет ту из двух канонических форм, указываемых теоремой 3, коквадрат которой совпадает с коквадратом A .

Обратимся теперь к формам (24) и (25). Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} x & z \\ iy & x \end{pmatrix}, \quad z = u + iv, \quad u > 0,$$

параметры которой (т.е. вещественные величины x , y , u и v) связаны равенствами (16)–(19) и вытекающими из них соотношениями (21) и (22). Имеем

$$\det A = x^2 - iyz = \lambda_1, \quad (A^{-1})^T = \frac{1}{\lambda_1} \begin{pmatrix} x & -iy \\ -z & x \end{pmatrix}.$$

Отсюда выводим

$$t = \operatorname{tr}\{A(A^{-1})^T\} = \frac{1}{\lambda_1}(2x^2 + y^2 - z^2).$$

Используя равенства (19) и (21), находим

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 - z^2 &= 2x^2 + y^2 + v^2 - u^2 - 2iuv = d - 2u^2 - 2iuv \\ &= d - 2u^2 - 2i\left(\frac{a}{b}u^2 - \frac{c^2}{b}\right) = d + 2i\frac{c^2}{b} - 2\left(1 + i\frac{a}{b}\right)u^2. \end{aligned}$$

Из этих выражений видно, что при фиксированных a , b , c , d и λ_1 величину t можно рассматривать как функцию только от u , причем ее значения различны для различных положительных u . Мы приходим к тому же выводу, что и для нормальной матрицы A_R : матрица A имеет ту из двух канонических форм (24) и (25), коквадрат которой совпадает с коквадратом A .

Из проведенного обсуждения вытекает следующий алгоритм для проверки унитарной конгруэнтности (2×2) -матриц A и B .

1. Проверить равенства

$$\operatorname{tr} A_R = \operatorname{tr} B_R, \tag{39}$$

$$\operatorname{tr}(A_R^2) = \operatorname{tr}(B_R^2). \tag{40}$$

Если хотя бы одно из них нарушено, то A и B не могут быть унитарно конгруэнтны. Если же равенства (39) и (40) верны, то матрицы A_R и B_R имеют один и тот же характеристический многочлен, дискриминант которого определяет вид канонической формы для матриц A и B .

2. В зависимости от вида канонической формы, проверить для A и B совпадение евклидовых норм, сингулярных чисел и/или следов их коквадратов. В случае аномальных матриц A_R и B_R , имеющих комплексные собственные значения, нужно еще убедиться в равенстве евклидовых норм этих матриц. Несовпадение каких-то из указанных характеристик свидетельствует о том, что A и B не могут быть унитарно конгруэнтны. Если же все они совпадают, то A и B имеют одну и ту же каноническую форму и, следовательно, унитарно конгруэнтны.

Все описанные операции сводятся к проверке небольшого числа следовых равенств. В этом смысле предлагаемый алгоритм можно сопоставить с алгоритмом (3)–(5) для проверки унитарного подобия между (2×2) -матрицами A и B . Отличие состоит в том, что помимо A , A^* , B и B^* наш алгоритм вовлекает еще и матрицы $\bar{A}$, $A(A^{-1})^T$, $\bar{B}$ и $B(B^{-1})^T$.

Закончим статью указанием одного любопытного инварианта (2×2) -матриц, который не пригодился в нашем исследовании.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Число

$$e = |a_{12} - a_{21}|$$

есть инвариант комплексной (2×2) -матрицы относительно унитарных конгруэнций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

имеем

$$\operatorname{tr} A_R = |a_{11}|^2 + |a_{22}|^2 + 2 \operatorname{Re}\{a_{12}\bar{a}_{21}\}, \quad d = \|A\|_F^2 = |a_{11}|^2 + |a_{22}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2.$$

Обе эти величины, как мы знаем, инвариантны относительно унитарных конгруэнций, производимых с матрицей A . Инвариантна, следовательно, и их разность, которая (с точностью до знака) равна числу e^2 .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ*, Мир, М., 1989.
- [2] С. Pearcy, “A complete set of unitary invariants for operators generating finite W^* -algebras of type I”, *Pacific J. Math.*, **12** (1962), 1405–1416.
- [3] Y. Hong, R. A. Horn, “A characterization of unitary congruence”, *Linear and Multilinear Algebra*, **25**:2 (1989), 105–119.
- [4] Х. Д. Икрамов, “О матричном уравнении $X\bar{X} = A$ ”, *Докл. РАН*, **424**:3 (2009), 304–307.

Х. Д. Икрамов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступило

15.10.2009

Исправленный вариант

10.01.2010