Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. С. Барсегян, О возможности усиления неравенства
Либа–Тирринга, *Матем. заметки*, 2009, том 86, вы-
пуск 6, 803–818

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8525>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:31:01

О возможности усиления неравенства Либа–Тирринга

Д. С. Барсегян

В 1976 г. Либом и Тиррингом была получена оценка сверху для квадрата нормы в $L^2(\mathbb{R}^2)$ суммы квадратов функций конечной ортонормированной системы суммой квадратов норм их градиентов. В дальнейшем серия неравенств Либа–Тирринга для ортонормированных систем была установлена многими авторами. В данной работе с помощью стандартного аппарата теории функций, доказываются неравенства Либа–Тирринга, которые имеют применение в теории уравнений с частными производными.

Библиография: 7 названий.

В 1976 г. Либом и Тиррингом [1] была доказана следующая

ТЕОРЕМА. Для произвольной ортонормированной системы

$$\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^2)$$

имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_\Phi^2 dx dy \leq C \sum_{j=1}^N \|\nabla \varphi_j\|_2^2. \quad (1)$$

В (1) и ниже

$$\rho_\Phi \equiv \sum_{j=1}^N \varphi_j^2(x, y),$$

C – абсолютная постоянная и, как обычно, $\nabla \varphi \equiv (\partial \varphi / \partial x, \partial \varphi / \partial y)$.

Для функции $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ определим преобразование Фурье:

$$\widehat{f}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f(\xi, \eta) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta.$$

Тогда неравенство (1) может быть преобразовано к виду

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_\Phi^2 dx dy \leq C \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} (x^2 + y^2) |\widehat{\varphi_j}|^2(x, y) dx dy. \quad (2)$$

В дальнейшем серия неравенств типа Либа–Тирринга для ортонормированных систем была установлена многими авторами (см., в частности, [2]–[4]).

Кашиным был поставлен следующий вопрос: верно ли, что для любой ортонормированной системы Φ имеет место оценка

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^2 dx dy \leq C \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |xy| |\widehat{\varphi}_j|^2(x, y) dx dy \quad (3)$$

с некоторой не зависящей от N постоянной C .

Ясно, что выполнение для системы Φ оценки (3) гарантирует и выполнение неравенства (1).

Из классических теорем вложения вытекает справедливость неравенства (3) при $N = 1$.

Оказывается, однако, что неравенство (3) справедливо не всегда. Точнее, имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Существует абсолютная постоянная $C > 0$ такая, что для любого числа N , представимого в виде*

$$N = 2^{3M}(2^{3M} - 1)(M + 1) + 2^{2M}(2^{M+1} - 1),$$

M – натуральное число, в $L^2(\mathbb{R}^2)$ найдется ортонормированная система функций $\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N$, для которой выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^2 dx dy \geq C \cdot \ln N \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |xy| |\widehat{\varphi}_j|^2(x, y) dx dy.$$

Построенный в теореме 1 пример показывает точность следующего результата.

ТЕОРЕМА 2. *Для произвольной ортонормированной системы действительных функций $\Phi = \{\varphi_j(x, y)\}_{j=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^2)$, $N = 1, 2, \dots$, выполняется неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^2 dx dy \leq C' (\ln N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |xy| |\widehat{\varphi}_j|^2(x, y) dx dy,$$

где C' – абсолютная постоянная.

Отметим еще, что для ортонормированных систем Φ , состоящих из функций вида $\varphi_j(x, y) = u_j(x)v_j(y)$ автором установлено, что неравенство (3) имеет место. Доказательство будет приведено отдельно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть M зафиксировано и $Q = 2^{3M}$.

Положим

$$\Phi = \{\varphi_{j,q,k}\}_{k=0,\dots,M, j=2^k, \dots, 2^k Q, q=1, \dots, 2^{-k} Q},$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{j,q,k}(\xi, \eta) = & \frac{1}{2^{(M-2)/2}} (\chi_{[2^{k-1}, 2^k)}(\xi) + \chi_{(-2^k, -2^{k-1}]}(\xi)) \\ & \times (\chi_{[2^{M-k-1}, 2^{M-k})}(\eta) + \chi_{(-2^{M-k}, -2^{M-k-1}]}(\eta)) \sin \frac{\xi \pi j}{2^{k-1}} \sin \frac{\eta \pi q}{2^{M-k-1}}, \end{aligned}$$

для $k = 0, \dots, M$, $j = 2^k, \dots, 2^k Q$ и $q = 1, \dots, 2^{-k} Q$.

Ортонормированность системы Φ вытекает из попарной ортогональности функций $\widehat{\varphi}_{j,q,k}$ и изометрического свойства преобразования Фурье.

Восстановим функции $\varphi_{j,q,k}$. Имеем

$$\begin{aligned}
 \varphi_{j,q,k}(x, y) &= -\frac{1}{2^{(M-4)/2}\pi} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \sin \frac{\xi\pi j}{2^{k-1}} \sin \xi x \, d\xi \int_{2^{M-k-1}}^{2^{M-k}} \sin \frac{\eta\pi q}{2^{M-k-1}} \sin \eta y \, d\eta \\
 &= -\frac{1}{2^{M/2}\pi} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \left(\cos \left(\frac{j\pi}{2^{k-1}} + x \right) \xi - \cos \left(\frac{j\pi}{2^{k-1}} - x \right) \xi \right) d\xi \\
 &\quad \times \int_{2^{M-k-1}}^{2^{M-k}} \left(\cos \left(\frac{q\pi}{2^{M-k-1}} + y \right) \eta - \cos \left(\frac{q\pi}{2^{M-k-1}} - y \right) \eta \right) d\eta \\
 &= -\frac{1}{2^{M/2}\pi} \left\{ (\sin 2^k x - (-1)^j \sin 2^{k-1} x) \frac{1}{x + j\pi/2^{k-1}} \right. \\
 &\quad \left. - (\sin 2^k x - (-1)^j \sin 2^{k-1} x) \frac{1}{x - j\pi/2^{k-1}} \right\} \\
 &\quad \times \left\{ (\sin 2^{M-k} y - (-1)^q \sin 2^{M-k-1} y) \frac{1}{y + q\pi/2^{M-k-1}} \right. \\
 &\quad \left. - (\sin 2^{M-k} y - (-1)^q \sin 2^{M-k-1} y) \frac{1}{y - q\pi/2^{M-k-1}} \right\} \\
 &= -\frac{1}{2^{(3M-8)/2}} (\sin 2^k x - (-1)^j \sin 2^{k-1} x) (\sin 2^{M-k} y - (-1)^q \sin 2^{M-k-1} y) \\
 &\quad \times \frac{\pi j q}{(x^2 - j^2 \pi^2 / 4^{k-1})(y^2 - q^2 \pi^2 / 4^{M-k-1})}.
 \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\psi_j(x) = \frac{j}{x^2 - j^2 \pi^2} (\sin 2x - (-1)^j \sin x).$$

Имеем

$$\varphi_{j,q,k}(x, y) = -2^{M/2}\pi \psi_j(2^{k-1}x) \cdot \psi_q(2^{M-k-1}y).$$

Заметим, что для $x \in [j\pi, j\pi + 1]$

$$\psi_j^2(x) > \frac{1}{9\pi^2} \frac{(\sin 2x - (-1)^j \sin x)^2}{(x - j\pi)^2} = \frac{1}{9\pi^2} \frac{(\sin 2(x - j\pi) - \sin(x - j\pi))^2}{(x - j\pi)^2} > \alpha > 0, \quad (4)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{9\pi^2} \min_{x \in [0,1]} \left\{ \frac{(\sin 2x - \sin x)^2}{x^2} \right\}.$$

Раскрывая скобки в сумме ρ_{Φ}^2 , находим

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^2 \, dx \, dy &\geq \pi^4 \cdot 2^{2M} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k=0}^M \sum_{j=2^k}^{2^k Q} \sum_{q=1}^{2^{-k} Q} \psi_j^2(2^{k-1}x) \psi_q^2(2^{M-k-1}y) \\
 &\quad \times \sum_{p=0}^{M-k} \sum_{j_1=2^{k+p}}^{2^{k+p} Q} \sum_{q_1=1}^{2^{-k-p} Q} \psi_{j_1}^2(2^{k+p-1}x) \psi_{q_1}^2(2^{M-k-p-1}y) \, dx \, dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi^4 \cdot 2^{2M} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k=0}^M \sum_{p=0}^{M-k} \sum_{j=2^k}^{2^k Q} \sum_{q=1}^{2^{-k} Q} \psi_j^2(2^{k-1}x) \psi_q^2(2^{M-k-1}y) \\
&\quad \times \sum_{j_1=2^{k+p}}^{2^{k+p} Q} \sum_{q_1=1}^{2^{-k-p} Q} \psi_{j_1}^2(2^{k+p-1}x) \psi_{q_1}^2(2^{M-k-p-1}y) dx dy \\
&= \pi^4 \cdot 2^{2M} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{k=0}^M \sum_{p=0}^{M-k} \sum_{j=2^k}^{2^k Q} \psi_j^2(2^{k-1}x) \sum_{q=1}^{2^{-k} Q} \psi_q^2(2^{M-k-1}y) \\
&\quad \times \sum_{j_1=2^{k+p}}^{2^{k+p} Q} \psi_{j_1}^2(2^{k+p-1}x) \sum_{q_1=1}^{2^{-k-p} Q} \psi_{q_1}^2(2^{M-k-p-1}y) dx dy \\
&= \pi^4 \cdot 2^{2M} \sum_{k=0}^M \sum_{p=0}^{M-k} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=2^k}^{2^k Q} \psi_j^2(2^{k-1}x) \cdot \sum_{j_1=2^{k+p}}^{2^{k+p} Q} \psi_{j_1}^2(2^{k+p-1}x) dx \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} \sum_{q=1}^{2^{-k} Q} \psi_q^2(2^{M-k-1}y) \cdot \sum_{q_1=1}^{2^{-k-p} Q} \psi_{q_1}^2(2^{M-k-p-1}y) dy. \quad (5)
\end{aligned}$$

После линейной замены переменных правая часть в (5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
I &\equiv 4\pi^4 \cdot 2^M \sum_{k=0}^M \sum_{p=0}^{M-k} \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=2^k, \dots, 2^k Q} \psi_j^2(x) \cdot \sum_{j_1=2^{k+p}, \dots, 2^{k+p} Q} \psi_{j_1}^2(2^p x) dx \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} \sum_{q=1, \dots, 2^{-k} Q} \psi_q^2(y) \cdot \sum_{q_1=1}^{2^{-k-p} Q} \psi_{q_1}^2(2^{-p} y) dy. \quad (6)
\end{aligned}$$

Делая еще одну замену переменной в (6), получаем, что

$$\begin{aligned}
I &\geq 4\pi^4 \cdot 2^M \sum_{k=0}^M \sum_{p=0}^{M-k} \int_{\mathbb{R}} 2^{-p} \sum_{j=2^k, \dots, 2^k Q} \psi_j^2(2^{-p} x) \cdot \sum_{j_1=2^{k+p}, \dots, 2^{k+p} Q} \psi_{j_1}^2(x) dx \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}} \sum_{q=1, \dots, 2^{-k} Q} \psi_q^2(y) \cdot \sum_{q_1=1, \dots, 2^{-k-p} Q} \psi_{q_1}^2(2^{-p} y) dy. \quad (7)
\end{aligned}$$

В силу того, что на множестве

$$\left\{ \bigcup_{j=2^k, \dots, 2^k Q} [2^p j \pi, 2^p j \pi + 2^p] \right\} \times \left\{ \bigcup_{q_1=1, \dots, 2^{-k-p} Q} [2^p q_1 \pi, 2^p q_1 \pi + 2^p] \right\}$$

каждая из сумм

$$\sum_{j=2^k, \dots, 2^k Q} \psi_j^2(2^{-p} x) \quad \text{и} \quad \sum_{q_1=1, \dots, 2^{-k-p} Q} \psi_{q_1}^2(2^{-p} y)$$

больше или равна α , а на всей прямой неотрицательна, мы можем оценивать (7) на прямом произведении множеств

$$F_p = \bigcup_{j=2^k, \dots, 2^k Q} [2^p j\pi, 2^p j\pi + 2^p] \quad \text{и} \quad G_p = \bigcup_{q_1=1, \dots, 2^{-k-p} Q} [2^p q_1\pi, 2^p q_1\pi + 2^p].$$

Следовательно, неравенство (7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} I &> 4\pi^4 \cdot 2^M \alpha^2 \sum_{k=0}^M \sum_{p=0}^{M-k} \int_{F_p} 2^{-p} \sum_{j_1=2^{k+p}, \dots, 2^{k+p} Q} \psi_{j_1}^2(x) dx \cdot \int_{G_p} \sum_{q=1, \dots, 2^{-k} Q} \psi_q^2(y) dy \\ &> 4\pi^4 \cdot 2^M \alpha^2 \sum_{k=0}^M \sum_{p=0}^{M-k} \int_{\bigcup_{j=2^k, \dots, 2^k Q} [2^p j\pi, 2^p j\pi + 2^p]} 2^{-p} \\ &\quad \sum_{k_1=2^k, \dots, 2^k(Q-1)} \sum_{h=2^p k_1, \dots, 2^p k_1 + [(2^p-1)/\pi]} \psi_h^2(x) dx \\ &\quad \times \int_{\bigcup_{q_1=1, \dots, 2^{-k-p} Q} [2^p q_1\pi, 2^p q_1\pi + 2^p]} \\ &\quad \sum_{k_2=1, \dots, 2^{-k-p}(Q-2^{k+p})} \sum_{h=2^p k_2, \dots, 2^p k_2 + [(2^p-1)/\pi]} \psi_h^2(y) dy \\ &> 4\pi^4 \cdot 2^M \alpha^2 \sum_{k=0}^M \sum_{p=0}^{M-k} 2^{-p} \sum_{k_1=2^k, \dots, 2^k(Q-1)} \sum_{h=2^p k_1, \dots, 2^p k_1 + [(2^p-1)/\pi]} \int_{[h\pi, h\pi+1]} \psi_h^2(x) dx \\ &\quad \times \sum_{k_2=1, \dots, 2^{-k-p}(Q-2^{k+p})} \sum_{h=2^p k_2, \dots, 2^p k_2 + [(2^p-1)/\pi]} \int_{[h\pi, h\pi+1]} \psi_h^2(y) dy. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу (4)

$$\int_{[j\pi, j\pi+1]} \psi_j^2(x) dx > \alpha > 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^2 dx dy \\ &> 4\pi^4 \cdot 2^M \alpha^4 \sum_{k=0}^M \sum_{p=0}^{M-k} 2^{-p} \left[\frac{2^p-1}{\pi} \right] (2^k(Q-2)+1) \left[\frac{2^p-1}{\pi} \right] 2^{-k-p} \cdot (Q-2^{k+p}) \\ &> 4\pi^4 \cdot 2^M \alpha^4 \sum_{k=0}^{M-4} \sum_{p=4}^{M-k} 2^{-p} \left(\frac{2^p-1}{2\pi} \right)^2 2^k(Q-2) 2^{-k-p} \frac{Q}{2} \\ &> \frac{\pi^2}{2} \cdot 2^M \alpha^4 \sum_{k=0}^{M-4} \sum_{p=4}^{M-k} \cdot (Q-2)Q > C \cdot 2^M Q^2 M^2, \end{aligned}$$

где C – константа.

Теперь оценим правую часть в неравенстве (3) для построенной системы Φ , используя явный вид каждой функции $\widehat{\varphi}_{j,q,k}$. Итак,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^M \sum_{j=2^k}^{2^k Q} \sum_{q=1}^{2^{-k} Q} \int_{\mathbb{R}^2} |xy| |\widehat{\varphi}_{j,q,k}|^2(x, y) dx dy \\ & \leq 2^{M-2} \sum_{k=0}^M 2^{-k} Q (2^k (Q-1) + 1) = 2^{M-2} \sum_{k=0}^M (Q(Q-1) + 2^{-k} Q) \\ & \leq 2^{M-1} Q(Q-1)(M+1). \end{aligned}$$

Следовательно, правая часть в (3) оценивается сверху $2^M Q^2 M$, а левая превосходит $2^M Q^2 M^2$.

Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Нам потребуются два утверждения из теории ортогональных рядов.

1) Пусть $1 \leq p < \infty$ и $\psi_j \in L^p(\mathbb{R}^2)$, $1 \leq j \leq N$; тогда [5]

$$C_1(p) \|\rho_\Psi^{1/2}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p \leq \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^N r_j(t) \psi_j \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p dt \leq C_2(p) \|\rho_\Psi^{1/2}\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^p, \quad (8)$$

где $\{r_j(t)\}_{j=1}^N$ – система Радемахера, а $C_1(p) > 0$ – постоянная.

2) Пусть $1 < p < \infty$ и $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$. Для ν и β отличных от нуля введем обозначение

$$\delta_{\nu,\beta}(f)(x, y) := \int_{\Delta_{\nu,\beta}} \widehat{f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta,$$

где

$$\Delta_{\nu,\beta} = \{2^{|\nu|-1} \leq \xi \operatorname{sgn} \nu < 2^{|\nu|}\} \cdot \{2^{|\beta|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}.$$

Если ν равно нулю, но $\beta \neq 0$, будем считать, что

$$\begin{aligned} \delta_{0,\beta}(f) &:= \left| \int_{[-1,0] \cdot \{2^{|\beta|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} \widehat{f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right| \\ &+ \left| \int_{[0,1] \cdot \{2^{|\beta|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} \widehat{f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right|. \end{aligned}$$

Также, если $\beta = 0$, но $\nu \neq 0$, считаем

$$\begin{aligned} \delta_{\nu,0}(f) &:= \left| \int_{\{\xi: 2^{|\nu|-1} \leq \xi \operatorname{sgn} \nu < 2^{|\nu|}\} \cdot [-1,0]} \widehat{f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right| \\ &+ \left| \int_{\{\xi: 2^{|\nu|-1} \leq \xi \operatorname{sgn} \nu < 2^{|\nu|}\} \cdot [0,1]} \widehat{f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right|. \end{aligned}$$

Когда $\nu = \beta = 0$

$$\delta_{0,0}(f) = \int_{[-1,1]^2} \widehat{f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta;$$

тогда оказывается верным следующее неравенство [6]:

$$C_3(p)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq \left\| \left(\sum_{\nu, \beta=-\infty}^{\infty} |\delta_{\nu, \beta}^2(f)| \right)^{1/2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \leq C_4(p)\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}, \quad (9)$$

с некоторой постоянной $C_3(p) > 0$, не зависящей от f .

Перед тем как перейти к доказательству теоремы, рассмотрим следующие системы:

- 1) $\Phi_1 = \{\varphi_{1_j}\}$, где $\widehat{\varphi}_{1_j} = \widehat{\varphi}_j \chi_{\{|\xi| \geq 1, |\eta| \geq 1\}}$,
- 2) $\Phi_2 = \{\varphi_{2_j}\}_{j=1}^N$, где $\widehat{\varphi}_{2_j} = \widehat{\varphi}_j \chi_{\{|\xi| < 1, |\eta| \geq 1\}}$,
- 3) $\Phi_3 = \{\varphi_{3_j}\}_{j=1}^N$, где $\widehat{\varphi}_{3_j} = \widehat{\varphi}_j \chi_{\{|\xi| \geq 1, |\eta| < 1\}}$,
- 4) $\Phi_4 = \{\varphi_{4_j}\}_{j=1}^N$, где $\widehat{\varphi}_{4_j} = \widehat{\varphi}_j \chi_{(-1, 1)^2}$.

Докажем требуемое в теореме неравенство для каждой системы отдельно, так как $\varphi_j = \varphi_{1_j} + \varphi_{2_j} + \varphi_{3_j} + \varphi_{4_j}$ и, следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi}^2 d\xi d\eta \leq 64 \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} (\rho_{\Phi_1}^2 + \rho_{\Phi_2}^2 + \rho_{\Phi_3}^2 + \rho_{\Phi_4}^2) d\xi d\eta.$$

Итак, перейдем к рассмотрению случая 1). В силу (8) и (9) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi_1}^2 d\xi d\eta &\leq C_5 \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^N r_j(t) \varphi_{1_j} \right\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^4 dt \\ &\leq C_6 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ \sum_{\nu, \beta=-\infty}^{\infty} |\delta_{\nu, \beta}^2(t, \xi, \eta)| \right\}^2 d\xi d\eta dt \\ &\leq C_6 \sum_{\nu, \beta, \nu_1, \beta_1=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} |\delta_{\nu, \beta}^2(t, \xi, \eta)| |\delta_{\nu_1, \beta_1}^2(t, \xi, \eta)| d\xi d\eta dt, \end{aligned}$$

где

$$\delta_{\nu, \beta}(t, \xi, \eta) = \delta_{\nu, \beta} \left(\sum_{j=1}^N r_j(t) \varphi_{1_j} \right) = \sum_{j=1}^N r_j(t) \delta_{\nu, \beta}(\varphi_{1_j}).$$

Учитывая, что интеграл $\int_0^1 r_j r_q r_h r_s dt = 0$, если одно из чисел j, q, h, s отлично от остальных, и этот интеграл равен единице в противном случае, мы будем иметь, что

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^2} |\delta_{\nu, \beta}^2(t, \xi, \eta)| |\delta_{\nu_1, \beta_1}^2(t, \xi, \eta)| d\xi d\eta dt \\ &= \sum_{j, q, h, s=1}^N \int_0^1 (r_j r_q r_h r_s)(t) dt \int_{\mathbb{R}^2} \delta_{\nu, \beta}(\varphi_{1_j}) \overline{\delta_{\nu, \beta}(\varphi_{1_q})} \delta_{\nu_1, \beta_1}(\varphi_{1_h}) \overline{\delta_{\nu_1, \beta_1}(\varphi_{1_s})} d\xi d\eta \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{h=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\delta_{\nu, \beta}^2(\varphi_{1_j})| |\delta_{\nu_1, \beta_1}^2(\varphi_{1_h})| d\xi d\eta \\ &\quad + \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} \delta_{\nu, \beta}(\varphi_{1_j}) \delta_{\nu_1, \beta_1}(\varphi_{1_j}) \overline{\delta_{\nu, \beta}(\varphi_{1_q})} \overline{\delta_{\nu_1, \beta_1}(\varphi_{1_q})} d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N \sum_{q=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} \delta_{\nu,\beta}(\varphi_{1_j}) \overline{\delta_{\nu_1,\beta_1}(\varphi_{1_j}) \delta_{\nu,\beta}(\varphi_{1_q})} \delta_{\nu_1,\beta_1}(\varphi_{1_q}) d\xi d\eta \\
& - 2 \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\delta_{\nu,\beta}^2(\varphi_{1_j})| |\delta_{\nu_1,\beta_1}^2(\varphi_{1_q})| d\xi d\eta \\
& \leq 3 \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N |\delta_{\nu,\beta}^2(\varphi_{1_j})| \sum_{q=1}^N |\delta_{\nu_1,\beta_1}^2(\varphi_{1_q})| d\xi d\eta.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi_1}^2 d\xi d\eta & \leq 3C_6 \sum_{\nu,\beta,\nu_1,\beta_1=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N |\delta_{\nu,\beta}^2(\varphi_{1_j})| \sum_{q=1}^N |\delta_{\nu_1,\beta_1}^2(\varphi_{1_q})| d\xi d\eta \\
& \leq 6C_6 \sum_{\nu,\beta=-\infty}^{\infty} \sum_{|\nu_1|+|\beta_1| \leq |\nu|+|\beta|} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N |\delta_{\nu,\beta}^2(\varphi_{1_j})| \sum_{q=1}^N |\delta_{\nu_1,\beta_1}^2(\varphi_{1_q})| d\xi d\eta \\
& \leq 6C_6 \sum_{\nu,\beta=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\delta_{\nu,\beta}^2(\varphi_{1_j})| \sum_{|\nu_1|+|\beta_1| \leq |\nu|+|\beta|} \sum_{q=1}^N |\delta_{\nu_1,\beta_1}^2(\varphi_{1_q})| d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{10}$$

Для продолжения доказательства нам потребуются две леммы.

ЛЕММА 1. Для произвольной системы ортонормированных функций

$$\Phi = \{\varphi_j\}_{j=1}^N \subset L^2(\mathbb{R}^2)$$

имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^N |\delta_{\nu,\beta}^2(\varphi_j)| \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{|\nu|+|\beta|+2}. \tag{11}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Обозначим

$$A := \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |\delta_{\nu,\beta}|^2(\varphi_j) \right\}.$$

Сначала предположим, что ν и β отличны от нуля. Пусть $\{x_n, y_n\}_{n=1}^\infty$ есть такая последовательность, что

$$\sum_{j=1}^N |\delta_{\nu,\beta}^2(\varphi_j)(x_n, y_n)| = A - \varepsilon_n(x_n, y_n), \quad \varepsilon_n(x_n, y_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для фиксированного числа n рассмотрим последовательность $\{c_{j_n}\}_{j=1}^N$, заданную следующим правилом:

$$c_{j_n} = \frac{\overline{\delta_{\nu,\beta}(\varphi_j)(x_n, y_n)}}{\sqrt{A - \varepsilon_n(x_n, y_n)}}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{A - \varepsilon_n(x_n, y_n)} &\leq \left\| \sum_{j=1}^N c_{j_n} \delta_{\nu, \beta}(\varphi_j) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = \left\| \sum_{j=1}^N c_{j_n} \int_{\Delta_{\nu, \beta}} \widehat{\varphi}_j e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &= \left\| \int_{\Delta_{\nu, \beta}} \sum_{j=1}^N c_{j_n} \widehat{\varphi}_j e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq 2^{(|\nu| + |\beta|)/2} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_{j=1}^N c_{j_n} \widehat{\varphi}_j \right|^2 d\xi d\eta \right\}^{1/2} \leq 2^{(|\nu| + |\beta|)/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $A - \varepsilon_n(x_n, y_n) \leq 2^{(|\nu| + |\beta|)}$ для любого числа n .

Отсюда получаем, что

$$\left\| \sum_{j=1}^N |\delta_{\nu, \beta}(\varphi_j)| \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{|\nu| + |\beta| + 2}.$$

Если $\nu = 0$, а $\beta \neq 0$, то рассмотрим последовательность

$$c_{j_n} = \frac{\int_{[-1, 0] \cdot R} \widehat{\varphi}(\xi, \eta) e^{i(\xi x_n + \eta y_n)} d\xi d\eta}{\sqrt{A - \varepsilon_n(x_n, y_n)}}.$$

Аналогично

$$\left\| \sum_{j=1}^N \left| \int_{[-1, 0] \cdot \{2^{|\beta| - 1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} \widehat{\varphi}_j e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right|^2 \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{|\beta|}.$$

Также

$$\left\| \sum_{j=1}^N \left| \int_{[0, 1] \cdot \{2^{|\beta| - 1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} \widehat{\varphi}_j e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right|^2 \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq 2^{|\beta|}.$$

Случай $\beta = 0$ и $\nu \neq 0$ рассматривается аналогично.

Также ясно, что когда $\nu = \beta = 0$, имеем $A \leq 4$.

Лемма 1 доказана.

Аналогично лемме 1 проверяется, что для ортонормированной системы функций $\{\psi_j\}_{j=1}^N$ в $L^2(\mathbb{R})$ и для любого целого числа $\nu \neq 0$ имеет место неравенство

$$A := \left\| \sum_{j=1}^N |\delta_\nu^2(\psi_j)| \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 2^{|\nu| + 1}. \quad (12)$$

ЛЕММА 2. Для любых нормированных в $L^2(\mathbb{R}^2)$ функций f и g и чисел $\nu, \beta, \nu_1, \beta_1$ таких, что $|\nu_1| = |\nu| - k$, $|\beta_1| = |\beta| + k_1$, $\nu, \beta, \nu_1, \beta_1 \neq 0$, выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\delta_{\nu, \beta}^2(f)| |\delta_{\nu_1, \beta_1}^2(g)| d\xi d\eta \leq 4 \cdot 2^{-k} \cdot 2^{|\nu| + |\beta|} \int_{\Delta_{\nu, \beta}} |\widehat{f}|^2 d\xi d\eta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Поскольку тригонометрическая система полна в $L^2((-\pi, \pi)^2)$ [7], нам достаточно доказать лемму 2 для функций вида

$$f = \sum_{j,q=1}^N a_{j,q}(f) \varphi_j(\xi) \psi_q(\eta) \quad \text{и} \quad g = \sum_{j,q=1}^{N'} a_{j,q}(g) \varphi'_j(\xi) \psi'_q(\eta),$$

где $\varphi_j(\xi)$, $\varphi'_j(\xi)$, $j = 1, 2, \dots$, и $\psi_q(\eta)$, $\psi'_q(\eta)$, $q = 1, 2, \dots$, – такие ортонормированные системы, что их преобразования Фурье удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \widehat{\varphi}_j &\subset [2^{|\nu|-1} \leq \xi \operatorname{sgn} \nu < 2^{|\nu|}], & j = 1, 2, \dots, \\ \operatorname{supp} \widehat{\varphi}'_j &\subset [2^{|\nu_1|-1} \leq \xi \operatorname{sgn} \nu_1 < 2^{|\nu_1|}], & j = 1, 2, \dots, \\ \operatorname{supp} \widehat{\psi}_q &\subset [2^{|\beta|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}], & q = 1, 2, \dots, \\ \operatorname{supp} \widehat{\psi}'_q &\subset [2^{|\beta_1|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta_1 < 2^{|\beta_1|}], & q = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

и составляют полные ортонормированные системы соответственно на отрезках

$$\begin{aligned} [2^{|\nu|-1} \leq \xi \operatorname{sgn} \nu < 2^{|\nu|}], & \quad [2^{|\nu_1|-1} \leq \xi \operatorname{sgn} \nu_1 < 2^{|\nu_1|}], \\ [2^{|\beta|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}], & \quad [2^{|\beta_1|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta_1 < 2^{|\beta_1|}], \end{aligned}$$

а коэффициенты Фурье удовлетворяют условиям

$$\sum_{j,q=1}^N |a_{j,q}^2(f)| \leq 1 \quad \text{и} \quad \sum_{j,q=1}^M |a_{j,q}^2(g)| \leq 1,$$

так как если функция $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ нормирована и функция $g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ такая, что $\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \varepsilon$, то отсюда легко вытекает, что

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\delta_{\nu,\beta}^2(f)| |\delta_{\nu_1,\beta_1}^2(g)| dx dy \leq 2^{|\nu|+|\beta|+2\varepsilon}$$

для любых ν , ν_1 , β , β_1 .

Определим функцию

$$\widetilde{g} = 2^{(k-k_1)/2} g(2^k \xi, 2^{-k_1} \eta).$$

Рассмотрим соответственно системы

$$\widetilde{\varphi}_j(\xi) = 2^{k/2} \varphi'_j(2^k \xi), \quad j = 1, 2, \dots, \quad \text{и} \quad \widetilde{\psi}_q(\eta) = 2^{-k_1/2} \psi'_q(2^{-k_1} \eta), \quad q = 1, 2, \dots$$

Ясно, что это ортонормированные системы. Их преобразования Фурье удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \operatorname{supp} \widehat{\widetilde{\varphi}}_j &\subset [2^{|\nu|-1} \leq \xi \operatorname{sgn} \nu_1 < 2^{|\nu|}], & j = 1, 2, \dots, \\ \operatorname{supp} \widehat{\widetilde{\psi}}_q &\subset [2^{|\beta|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta_1 < 2^{|\beta|}], & q = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

и составляют полные ортонормированные системы соответственно на отрезках

$$[2^{|\nu|-1} \leq \xi \operatorname{sgn} \nu_1 < 2^{|\nu|}] \quad \text{и} \quad [2^{|\beta|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta_1 < 2^{|\beta|}].$$

Тогда

$$\tilde{g} = \sum_{j,q=1}^{N'} a_{j,q}(\tilde{g}) \tilde{\varphi}_j(\xi) \tilde{\psi}_q(\eta) \quad \text{и} \quad \sum_{j,q=1}^{N'} |a_{j,q}^2(\tilde{g})| \leq 1.$$

Для этой функции

$$\delta_{\nu_1, \beta_1}(g)(\xi, \eta) = 2^{(-k+k_1)/2} \delta_{|\nu| \operatorname{sgn} \nu_1, |\beta| \operatorname{sgn} \beta_1}(\tilde{g})(2^{-k}\xi, 2^{k_1}\eta). \quad (13)$$

Следовательно, принимая во внимание (12) и (13), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} |\delta_{\nu, \beta}^2(f)| |\delta_{\nu_1, \beta_1}^2(g)| d\xi d\eta \\ &= 2^{-k+k_1} \int_{\mathbb{R}^2} |\delta_{\nu, \beta}^2(f)(\xi, \eta)| |\delta_{|\nu| \operatorname{sgn} \nu_1, |\beta| \operatorname{sgn} \beta_1}^2(\tilde{g})(2^{-k}\xi, 2^{k_1}\eta)| d\xi d\eta \\ &= 2^{-k+k_1} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_{j,q=1}^N a_{j,q}(f) \delta_{\nu}(\varphi_j)(\xi) \delta_{\beta}(\psi_q)(\eta) \right|^2 \\ & \quad \times \left| \sum_{j_1, q_1=1}^{N'} a_{j_1, q_1}(\tilde{g}) \delta_{|\nu| \operatorname{sgn} \nu_1}(\tilde{\varphi}_{j_1})(2^{-k}\xi) \delta_{|\beta| \operatorname{sgn} \beta_1}(\tilde{\psi}_{q_1})(2^{k_1}\eta) \right|^2 d\xi d\eta \\ &= 2^{-k} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_{j,q=1}^N a_{j,q}(f) \delta_{\nu}(\varphi_j)(\xi) \delta_{\beta}(\psi_q)(2^{-k_1}\eta) \right|^2 \\ & \quad \times \left| \sum_{j_1, q_1=1}^{N'} a_{j_1, q_1}(\tilde{g}) \delta_{|\nu| \operatorname{sgn} \nu_1}(\tilde{\varphi}_{j_1})(2^{-k}\xi) \delta_{|\beta| \operatorname{sgn} \beta_1}(\tilde{\psi}_{q_1})(\eta) \right|^2 d\xi d\eta \\ &= 2^{-k} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \sum_{q=1}^N \delta_{\beta}(\psi_q)(2^{-k_1}\eta) \sum_{j=1}^N a_{j,q}(f) \delta_{\nu}(\varphi_j)(\xi) \right|^2 \\ & \quad \times \left| \sum_{j_1=1}^{N'} \delta_{|\nu| \operatorname{sgn} \nu_1}(\tilde{\varphi}_{j_1})(2^{-k}\xi) \sum_{q_1=1}^{N'} a_{j_1, q_1}(\tilde{g}) \delta_{|\beta| \operatorname{sgn} \beta_1}(\tilde{\psi}_{q_1})(\eta) \right|^2 d\xi d\eta \\ &\leq 2^{-k} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{q=1}^N \left| \delta_{\beta}^2(\psi_q)(2^{-k_1}\eta) \right| \sum_{q=1}^N \left| \sum_{j=1}^N a_{j,q}(f) \delta_{\nu}(\varphi_j)(\xi) \right|^2 \\ & \quad \times \sum_{j_1=1}^{N'} \left| \delta_{|\nu| \operatorname{sgn} \nu_1}^2(\tilde{\varphi}_{j_1})(2^{-k}\xi) \right| \sum_{j_1=1}^{N'} \left| \sum_{q_1=1}^{N'} a_{j_1, q_1}(\tilde{g}) \delta_{|\beta| \operatorname{sgn} \beta_1}(\tilde{\psi}_{q_1})(\eta) \right|^2 d\xi d\eta \\ &\leq 2^{-k} \int_{\mathbb{R}^2} 2^{|\beta|+1} \sum_{q=1}^N \left| \sum_{j=1}^N a_{j,q}(f) \delta_{\nu}(\varphi_j)(\xi) \right|^2 \\ & \quad \times 2^{|\nu|+1} \sum_{j_1=1}^{N'} \left| \sum_{q_1=1}^{N'} a_{j_1, q_1}(\tilde{g}) \delta_{|\beta| \operatorname{sgn} \beta_1}(\tilde{\psi}_{q_1})(\eta) \right|^2 d\xi d\eta \\ &\leq 4 \cdot 2^{-k} \cdot 2^{|\nu|+|\beta|} \sum_{j,q=1}^N |a_{j,q}^2(f)| \leq 4 \cdot 2^{-k} \cdot 2^{|\nu|+|\beta|} \int_{\triangle_{\nu, \beta}} |\hat{f}|^2 d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Перейдем к доказательству неравенства для случая 1). Из (10) имеем, что

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Phi_1}^2 d\xi d\eta \\
 & \leq 6C_6 \sum_{\nu, \beta=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\delta_{\nu, \beta}^2(\varphi_{1_j})| \sum_{\substack{k, k_1 \geq 0, \\ |\nu_1| = |\nu| - k, |\beta_1| = |\beta| - k_1}} \sum_{q=1}^N |\delta_{\nu_1, \beta_1}^2(\varphi_{1_q})| d\xi d\eta \\
 & + 6C_6 \sum_{\nu, \beta=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\delta_{\nu, \beta}^2(\varphi_{1_j})| \sum_{\substack{k \geq k_1 \geq 0, \\ |\nu_1| = |\nu| - k, |\beta_1| = |\beta| + k_1}} \sum_{q=1}^N |\delta_{\nu_1, \beta_1}^2(\varphi_{1_q})| d\xi d\eta \\
 & + 6C_6 \sum_{\nu, \beta=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\delta_{\nu, \beta}^2(\varphi_{1_j})| \sum_{\substack{k_1 \geq k \geq 0, \\ |\nu_1| = |\nu| + k, |\beta_1| = |\beta| - k_1}} \sum_{q=1}^N |\delta_{\nu_1, \beta_1}^2(\varphi_{1_q})| d\xi d\eta \\
 & = 6C_6(I_1 + I_2 + I_3).
 \end{aligned}$$

Ввиду леммы 1

$$I_1 \leq \sum_{\nu, \beta=-\infty}^{\infty} 4 \sum_{k, k_1 \geq 0} 2^{|\nu|+|\beta|} \cdot 2^{-k-k_1} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N |\delta_{\nu, \beta}^2(\varphi_{1_j})| d\xi d\eta \leq 4 \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\xi \eta| |\widehat{\varphi}_{1_j}|^2 d\xi d\eta.$$

Рассмотрим I_2 . С помощью лемм 1 и 2 имеем

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \sum_{\nu, \beta=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq k \leq \log_2 N, \\ |\nu_1| = |\nu| - k, |\beta_1| = |\beta| + k_1}} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N |\delta_{\nu, \beta}^2(\varphi_{1_j})| \sum_{q=1}^N |\delta_{\nu_1, \beta_1}^2(\varphi_{1_q})| d\xi d\eta \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\substack{0 \leq k_1 \leq k, k > \log_2 N, \\ |\nu_1| = |\nu| - k, |\beta_1| = |\beta| + k_1}} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N |\delta_{\nu, \beta}^2(\varphi_{1_j})| \sum_{q=1}^N |\delta_{\nu_1, \beta_1}^2(\varphi_{1_q})| d\xi d\eta \right\} \\
 & \leq 4 \sum_{\nu, \beta=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{0 \leq k_1 \leq k \leq \log_2 N} 2^{|\nu|+|\beta|} \cdot 2^{k_1-k} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N |\delta_{\nu, \beta}^2(\varphi_{1_j})| d\xi d\eta \right\} \\
 & \quad + 4 \sum_{\nu, \beta=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{0 \leq k_1 \leq k, k > \log_2 N} 2^{|\nu|+|\beta|} \cdot 2^{-k} \cdot N \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N |\delta_{\nu, \beta}^2(\varphi_{1_j})| d\xi d\eta \right\} \\
 & \leq 8(\log_2 N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\xi \eta| |\widehat{\varphi}_{1_j}|^2 d\xi d\eta.
 \end{aligned}$$

Также и

$$I_3 \leq 8(\log_2 N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\xi \eta| |\widehat{\varphi}_{1_j}|^2 d\xi d\eta.$$

Перейдем к рассмотрению случая 2). Ясно, что для этого случая достаточно доказать требуемое неравенство для системы $\Phi'_2 = \{\varphi'_{2_j}\}_{j=1}^N$, где $\widehat{\varphi}'_{2_j} = \widehat{\varphi}_{2_j} \chi_{[-1,1] \times \{|\eta| \leq 2^M\}}$ для некоторого большого числа M .

Перед тем как перейти к доказательству, рассмотрим функции

$$\psi_j = 2^{k/2} \varphi'_{2_j}(2^k \xi, \eta), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

для некоторого большого числа k . Тогда при некотором большом числе k для любых $\beta = 1, \dots, M$

$$\begin{aligned} \int_{[-1,1] \cdot \{2^{|\beta|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} |\widehat{\psi}_j|^2 d\xi d\eta &= \int_{\{|\xi| \leq 1/2^k\} \cdot \{2^{|\beta|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} |\widehat{\varphi}'_{2_j}|^2 d\xi d\eta \\ &< \int_{\mathbb{R} \cdot \{2^{|\beta|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} |\xi| |\widehat{\psi}_j|^2 d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (14)$$

Достаточно доказать неравенство для системы $\{\psi_j\}_{j=1}^N$, так как обе части в неравенстве теоремы умножаются на одно и то же число.

Ясно, что носители преобразования Фурье ψ_j , $j = 1, \dots, N$, не пересекаются с полосой $|y| \leq 1$.

Для $j = 1, \dots, N$ введем обозначения

$$\begin{aligned} \psi_{1_j}, \quad & \text{где} \quad \widehat{\psi}_{1_j} = \widehat{\psi}_j \cdot \chi_{\{[-1,1]^c \cdot [-1,1]^c\}}, \\ \psi_{2_j}, \quad & \text{где} \quad \widehat{\psi}_{2_j} = \widehat{\psi}_j \cdot \chi_{\{[-1,1] \cdot [-1,1]^c\}}. \end{aligned}$$

Так как $\psi_j = \psi_{1_j} + \psi_{2_j}$, то

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=1}^N \psi_j^2(\xi, \eta) \right)^2 d\xi d\eta \leq 8 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=1}^N \psi_{1_j}^2(\xi, \eta) \right)^2 d\xi d\eta + 8 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=1}^N \psi_{2_j}^2(\xi, \eta) \right)^2 d\xi d\eta. \quad (15)$$

Для функции f в $L^2(\mathbb{R}^2)$ по определению

$$\begin{aligned} \delta_{0,\beta}(f) &= \left| \int_{[-1,0] \cdot \{2^{|\beta|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} \widehat{f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right| \\ &\quad + \left| \int_{[0,1] \cdot \{2^{|\beta|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} \widehat{f} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right|, \end{aligned}$$

следовательно, применив (8) и (9) к интегралу от $\rho_{\Psi_2}^2$, получим

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Psi_2}^2 d\xi d\eta \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \delta_{0,\beta}^2(t, \xi, \eta) \right)^2 d\xi d\eta,$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{0,\beta}(t, \xi, \eta) &= \left| \int_{[-1,0] \cdot \{2^{|\beta|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} \left(\sum_{j=1}^N r_j(t) \widehat{\psi}_{2_j} e^{i(\xi x + \eta y)} \right) d\xi d\eta \right| \\ &\quad + \left| \int_{[0,1] \cdot \{2^{|\beta|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} \left(\sum_{j=1}^N r_j(t) \widehat{\psi}_{2_j} e^{i(\xi x + \eta y)} \right) d\xi d\eta \right|. \end{aligned}$$

Продолжая раскрывать скобки в $\rho_{\Psi_2}^2$, получим

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Psi_2}^2 d\xi d\eta \\
 & \leq 8C \sum_{\beta, \beta_1 = -\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j, q, h, s=1}^N \left(r_j(t) r_q(t) r_h(t) r_s(t) \int_{[-1, 0] \cdot \{2^{|\beta|} - 1 \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} \widehat{\psi}_{2_j} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right. \\
 & \quad \times \overline{\int_{[-1, 0] \cdot \{2^{|\beta|} - 1 \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} \widehat{\psi}_{2_q} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta} \\
 & \quad \times \overline{\int_{[-1, 0] \cdot \{2^{|\beta_1|} - 1 \leq \eta \operatorname{sgn} \beta_1 < 2^{|\beta_1|}\}} \widehat{\psi}_{2_h} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta} \\
 & \quad \times \left. \overline{\int_{[-1, 0] \cdot \{2^{|\beta_1|} - 1 \leq \eta \operatorname{sgn} \beta_1 < 2^{|\beta_1|}\}} \widehat{\psi}_{2_s} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta} \right) dx dy \\
 & + 8C \sum_{\beta = -\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j, q, h, s=1}^N \left(r_j(t) r_q(t) r_h(t) r_s(t) \int_{[0, 1] \cdot \{2^{|\beta|} - 1 \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} \widehat{\psi}_{2_j} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta \right. \\
 & \quad \times \overline{\int_{[0, 1] \cdot \{2^{|\beta|} - 1 \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} \widehat{\psi}_{2_q} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta} \\
 & \quad \times \overline{\int_{[0, 1] \cdot \{2^{|\beta_1|} - 1 \leq \eta \operatorname{sgn} \beta_1 < 2^{|\beta_1|}\}} \widehat{\psi}_{2_h} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta} \\
 & \quad \times \left. \overline{\int_{[0, 1] \cdot \{2^{|\beta_1|} - 1 \leq \eta \operatorname{sgn} \beta_1 < 2^{|\beta_1|}\}} \widehat{\psi}_{2_s} e^{i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta} \right) dx dy.
 \end{aligned}$$

Повторяя те же оценки, что и в (10), получаем

$$\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\Psi_2}^2 d\xi d\eta \leq C' \sum_{|\beta_1| \leq |\beta|} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N \delta_{0, \beta}^2(\psi_{2_j}) \sum_{q=1}^N \delta_{0, \beta_1}^2(\psi_{2_q})^2 d\xi d\eta.$$

Применяя уже доказанный результат случая 1) к системе $\{\psi_{1_j}\}_{j=1}^N$ и (12), имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=1}^N \psi_j^2 \right)^2 d\xi d\eta \\
 & \leq 8 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=1}^N \psi_{1_j}^2 \right)^2 d\xi d\eta + 8 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=1}^N \psi_{2_j}^2 \right)^2 d\xi d\eta \\
 & \leq C \cdot (\ln N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\xi \eta| |\widehat{\psi}_{1_j}|^2 d\xi d\eta \\
 & \quad + C \cdot \sum_{|\beta_1| \leq |\beta|} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N |\delta_{0, \beta}^2(\psi_{2_j})| \sum_{q=1}^N |\delta_{0, \beta_1}^2(\psi_{2_q})| d\xi d\eta \\
 & \leq C \cdot (\ln N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\xi \eta| |\widehat{\psi}_{1_j}|^2 d\xi d\eta + C \cdot \sum_{|\beta_1| \leq |\beta|} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N 2^{|\beta_1|} |\delta_{0, \beta}^2(\psi_{2_j})| d\xi d\eta \\
 & \leq C \cdot (\ln N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\xi \eta| |\widehat{\psi}_{1_j}|^2 d\xi d\eta + 4C \cdot \sum_{\beta = -\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N 2^{|\beta|} \delta_{0, \beta}^2(\psi_{2_j}) d\xi d\eta.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Ввиду (14) и того, что $|\delta_{\nu,\beta}(\psi_{1_j})| \leq |\delta_{\nu,\beta}(\psi_j)|$, $\delta_{\nu,\beta}(\psi_{2_j}) \leq |\delta_{\nu,\beta}(\psi_j)|$, из (15) выведем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=1}^N \psi_j^2 \right)^2 d\xi d\eta \\ & \leq C \cdot (\ln N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\xi \eta| |\widehat{\psi}_{1_j}|^2 d\xi d\eta + 4C \cdot \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^N 2^{|\beta|} |\delta_{0,\beta}^2(\psi_j)| d\xi d\eta \\ & \leq C \cdot (\ln N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\xi \eta| |\widehat{\psi}_j|^2 d\xi d\eta \\ & \quad + 4C \cdot \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} 2^{|\beta|} \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R} \cdot \{2^{|\beta|-1} \leq \eta \operatorname{sgn} \beta < 2^{|\beta|}\}} |\xi| |\widehat{\psi}_j|^2 d\xi d\eta \\ & \leq C \cdot (\ln N + 1) \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\xi \eta| |\widehat{\psi}_j|^2 d\xi d\eta + 4C \sum_{j=1}^N \cdot \int_{\mathbb{R}^2} |\xi \eta| |\widehat{\psi}_j|^2 d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Этим завершается рассмотрение случая 2), случай 3) рассматривается аналогично.

Наконец, рассмотрим случай 4). Перейдем к системе функций

$$\psi'_j = 2^k \varphi_{4_j}(2^k \xi, 2^k \eta), \quad j = 1, \dots, N.$$

Для нее

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\delta_{0,0}^2(\psi'_j)| d\xi d\eta = \int_{[-1/2^k, 1/2^k]^2} |\widehat{\varphi}_{4_j}|^2 d\xi d\eta < \int_{\mathbb{R}^2} |\xi| |\eta| |\widehat{\psi}'_j|^2 d\xi d\eta.$$

По уже сказанным соображениям, достаточно рассмотреть случай 3) для $\{\psi'_j\}_{j=1}^N$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=1}^N \psi_j'^2 \right)^2 d\xi d\eta \leq 4 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=1}^N \psi_{1_j}'^2 \right)^2 d\xi d\eta + 4 \int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=1}^N \psi_{2_j}'^2 \right)^2 d\xi d\eta,$$

где носители $\widehat{\psi}'_{1_j}$ не пересекаются с $[-1, 1]^2$, а $\psi'_{2_j} = \psi'_j - \psi'_{1_j}$.

Для $\{\psi'_{1_j}\}_{j=1}^N$ требуемое неравенство уже доказано. Для $\{\psi'_{2_j}\}_{j=1}^N$ в силу (12) и $|\delta_{\nu,\beta}(\psi'_{2_j})| \leq |\delta_{\nu,\beta}(\psi'_j)|$, выводим

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\sum_{j=1}^N \psi_{2_j}'^2 \right)^2 d\xi d\eta \leq 2 \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} \delta_{0,0}^2(\psi'_{2_j}) d\xi d\eta \leq 2 \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^2} |\xi \eta| |\widehat{\psi}'_j|^2 d\xi d\eta.$$

Следовательно, неравенство доказано для $\{\psi'_j\}_{j=1}^N$, а значит, и для $\{\varphi_{4_j}\}_{j=1}^N$.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Е. Н. Lieb, W. Thirring, “Inequalities for the moments of the eigenvalues of the Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequalities”, *Studies in Mathematical Physics. Essays in Honor of Valentine Bargmann*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1976, 269–303.

- [2] Б. С. Капин, “Об одном классе неравенств для ортонормированных систем”, *Матем. заметки*, **80**:2 (2006), 204–208.
- [3] Д. С. Барсегян, “О неравенствах типа Либа–Тирринга”, *Матем. заметки*, **82**:4 (2007), 504–514.
- [4] С. В. Асташкин, “Неравенство Либа–Тирринга для L_p -норм”, *Матем. заметки*, **83**:2 (2008), 163–169.
- [5] Б. С. Капин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, Изд-во АФЦ, М., 1999.
- [6] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.
- [7] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.

Д. С. Барсегян

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило

30.05.2009