Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Л. Блошанский, О. В. Лифанцева, Максимальные множества сходимости и неограниченной расходимости кратных рядов Фурье с J_k -лакунарной последовательностью частичных сумм, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 6, 938–941

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8527>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:43:51

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Максимальные множества сходимости и неограниченной расходимости кратных рядов Фурье с J_k -лакунарной последовательностью частичных сумм

И. Л. Блошанский, О. В. Лифанцева

В настоящей работе мы будем рассматривать поведение прямоугольных частичных сумм $S_n(x; f)$ кратного тригонометрического ряда Фурье функций

$$f \in L_p(\mathbb{T}^N), \quad p \geq 1, \quad \text{где } \mathbb{T}^N = (-\pi, \pi)^N, \quad N \geq 3,$$

при $n \rightarrow \infty$ (т.е. $\min_{1 \leq j \leq N} n_j \rightarrow \infty$) в случае, когда некоторые из компонент n_j вектора $n = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ являются элементами (однократных) лакунарных последовательностей. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть $M = \{1, 2, \dots, N\}$ и $k \in M$. Обозначим: $J_k = \{j_1, \dots, j_k\}$, $j_s < j_l$ при $s < l$, и (в случае $k < N$) $M \setminus J_k = \{m_1, \dots, m_{N-k}\}$, $m_s < m_l$ при $s < l$, — непустые подмножества множества M .

Пусть

$$\alpha = \alpha(J_k) = (\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k}) \in \mathbb{Z}_+^k, \quad j_s \in J_k, \quad s = 1, \dots, k,$$

и пусть

$$n^{(\alpha)} = n^{(\alpha)}[J_k] = (n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{Z}_+^N$$

— N -мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j \in J_k$ являются элементами некоторых (однократных) лакунарных последовательностей (при $j \in J_k$: $n_j = n_j^{(\alpha_j)}$, $n_j^{(\alpha_j)} \rightarrow \infty$ при $\alpha_j \rightarrow \infty$ и $n_j^{(\alpha_j+1)}/n_j^{(\alpha_j)} \geq q > 1$, $\alpha_j = 1, 2, \dots$). Символом $S_{n^{(\alpha)}[J_k]}(x; f)$ обозначим “ J_k -лакунарную последовательность прямоугольных частичных сумм” кратного ряда Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$.

В [1] (см. также [2]) одним из авторов данной работы были введены понятия максимальных множеств сходимости и неограниченной расходимости почти всюду (п.в.) (суммируемых по прямоугольникам) кратных рядов Фурье функций из $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p \geq 1$, $N \geq 1$, равных нулю на некотором множестве. Дадим аналогичные определения для кратных рядов Фурье с J_k -лакунарной последовательностью прямоугольных частичных сумм.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, $\mu \mathfrak{A} > 0$ ($\mu = \mu_N$ — N -мерная мера Лебега), и пусть $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Максимальным множеством неограниченной расходимости* (сокращенно ММНР) почти всюду кратных рядов Фурье с J_k -лакунарной последовательностью прямоугольных частичных сумм функций из класса $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, будем называть множество E_1 , $E_1 \subseteq \mathbb{T}^N$, $\mu E_1 > 0$, которое

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00669).

- во-первых, является множеством неограниченной расходимости (МНР) почти всюду указанных рядов, т.е. существует функция $f_1 \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $f_1(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, такая, что

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k, \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n(\alpha)[J_k]}(x; f_1)| = +\infty \quad \text{почти всюду на } E_1;$$

- во-вторых, множество E_1 является максимальным, т.е. для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$,

$$\overline{\lim}_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k, \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} |S_{n(\alpha)[J_k]}(x; f)| < +\infty \quad \text{почти всюду на } CE_1 = \mathbb{T}^N \setminus E_1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Максимальным множеством сходимости (ММС) почти всюду кратных рядов Фурье с J_k -лакунарной последовательностью прямоугольных частичных сумм функций из класса $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, будем называть множество E_2 , $E_2 \subseteq \mathbb{T}^N$, $\mu E_2 > 0$, которое*

- во-первых, является множеством сходимости (МС) почти всюду указанных рядов, т.е. для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, существует предел

$$\lim_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k, \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}} S_{n(\alpha)[J_k]}(x; f) = f(x) \quad \text{почти всюду на } E_2;$$

- во-вторых, множество E_2 является максимальным, т.е. существует функция $f_2 \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $f_2(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, такая, что $S_{n(\alpha)[J_k]}(x; f_2)$ расходится (при $\alpha_j \rightarrow \infty$, $j \in J_k$, и $n_j \rightarrow \infty$, $j \in M \setminus J_k$) почти всюду на $CE_2 = \mathbb{T}^N \setminus E_2$.

В настоящей работе для широкого класса измеримых множеств $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$ (с некоторыми ограничениями на границу множества $\mathfrak{A}$), и для любого $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, мы укажем структурные и геометрические характеристики ММНР и ММС п.в. кратных рядов Фурье с J_k -лакунарной последовательностью прямоугольных частичных сумм $S_{n(\alpha)[J_k]}(x; f)$ функций из пространства $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, равных нулю на $\mathfrak{A}$. Для формулировки результатов введем следующие обозначения.

Разложим пространство $\mathbb{R}^N$ на сумму двух подпространств $\mathbb{R}[J_s]$ и $\mathbb{R}[M \setminus J_s]$, где

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[J_s] &= \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_j = 0 \text{ при } j \in M \setminus J_s\}, \\ \mathbb{R}[M \setminus J_s] &= \{x \in \mathbb{R}^N : x_j = 0 \text{ при } j \in J_s\}. \end{aligned}$$

Обозначим также

$$\begin{aligned} \mathbb{T}[J_s] &= \{x \in \mathbb{R}[J_s] : -\pi < x_j < \pi \text{ при } j \in J_s\}, \\ \mathbb{T}[M \setminus J_s] &= \{x \in \mathbb{R}[M \setminus J_s] : -\pi < x_j < \pi \text{ при } j \in M \setminus J_s\}. \end{aligned}$$

Пусть Ω , $\Omega \subset \mathbb{T}^N$, – произвольное (непустое) открытое множество, и пусть $\Omega[J_2] = \text{pr}_{(J_2)}\{\Omega\}$ – ортогональная проекция множества Ω на пространство $\mathbb{R}[J_2]$, $J_2 \subset M$.

Положим $W[J_2] = \Omega[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]$, $J_2 \subset M$, и для любого J_k , $1 \leq k \leq N-2$, рассмотрим следующие множества:

$$\begin{aligned} W &= W(J_k) = W(\Omega, J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2], \\ W^0 &= W^0(J_k) = W^0(\Omega, J_k) = \bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2]. \end{aligned}$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Для любого открытого множества Ω , $\Omega \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, и для любого $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, существует функция $f \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такая, что

$$1) f(x) = 0 \text{ при } x \in \mathbb{T}^N \setminus \Omega;$$

2) выполнено

$$\overline{\lim_{\substack{\alpha_j \rightarrow \infty, j \in J_k, \\ n_j \rightarrow \infty, j \in M \setminus J_k}}} |S_{n(\alpha)}(x; f)| = +\infty \quad \text{для почти всех } x \in W(\Omega, J_k);$$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f) = 0$ для почти всех $x \in \mathbb{T}^N \setminus W(\Omega, J_k)$, причем

$$\left\| \sup_{n>0} |S_n(x; f)| \right\|_{L_p(\mathbb{T}^N \setminus W(\Omega, J_k))} \leq C(p), \quad 1 < p < \infty.$$

Теорема 1 показывает, что для любого замкнутого множества $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, и для любого $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, множество $W(\mathfrak{B}, J_k)$, где $\mathfrak{B} = \mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}$, является МНР п.в. кратных рядов Фурье с J_k -лакунарной последовательностью прямоугольных частичных сумм $S_{n(\alpha)}(x; f)$ функций $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$.

Далее, так как понятия максимальных множеств сходимости и неограниченной расходимости п.в. рассматриваемых нами кратных рядов Фурье вводятся для функций, равных нулю на измеримом множестве $\mathfrak{A}$, $\mu \mathfrak{A} > 0$, вопросы, обсуждаемые в настоящей работе, тесно связаны с понятием слабой обобщенной локализации п.в. для данных рядов. Найденный нами (ранее) критерий справедливости слабой обобщенной локализации п.в. для кратных рядов Фурье с J_k -лакунарной последовательностью (прямоугольных) частичных сумм (см. [3; теорема 1]) и результат теоремы 1 позволяют описать структуру и геометрию ММС п.в. и ММНР п.в. указанных рядов. Для формулировки полученного результата введем следующие обозначения.

Обозначим через $\text{int } P$ множество внутренних точек P , через $\overline{P}$ – замыкание множества P и через $\text{Fr } P$ – границу множества P .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{A}$ – произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, $0 < \mu \mathfrak{A} < \mu \mathbb{T}^N$, $\mathfrak{B} = \mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}$, и пусть $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$.

1) Если $\mu W(\text{int } \mathfrak{B}, J_k) = \mu \mathbb{T}^N$, то

а) множество $W(\text{int } \mathfrak{B}, J_k)$ является максимальным множеством неограниченной расходимости почти всюду для кратных рядов Фурье с J_k -лакунарной последовательностью прямоугольных частичных сумм функций $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$;

б) множеств сходимости указанных рядов нет.

2) Если $\mu W(\text{int } \mathfrak{B}, J_k) < \mu \mathbb{T}^N$ и множество $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \mu(\mathfrak{B} \setminus \overline{\text{int } \mathfrak{B}}) &= 0, \\ \mu_2 \text{Fr}_{(J_2)} \{\text{int } \mathfrak{B}\} &= 0, \quad J_2 \subset M \setminus J_k, \end{aligned}$$

то

а) множество $W(\text{int } \mathfrak{B}, J_k)$ – максимальное множество неограниченной расходимости почти всюду кратных рядов Фурье с J_k -лакунарной последовательностью прямоугольных частичных сумм функций $f \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, при суммировании по прямоугольникам;

б) множество $\mathfrak{A}_1 = \mathbb{T}^N \setminus W(\text{int } \mathfrak{B}, J_k)$ – максимальное множество сходимости почти всюду указанных рядов, при этом

– выполнено

$$\mathfrak{A}_1 = \bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k} \{\Omega_{J_2} \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]\},$$

где $\Omega_{J_2} = \mathbb{T}^2 \setminus \overline{\text{pr}_{(J_2)}\{\text{int } \mathfrak{B}\}}$;

– существует множество

$$W(\mathfrak{A}_1, J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} \{\Omega_{J_2} \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]\}$$

такое, что $\mu(W(\mathfrak{A}_1, J_k) \setminus \mathfrak{A}) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. С учетом данного в работе [3] определения свойства $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, пункт 2, b) теоремы 2 означает, что множество $\mathfrak{A}$ обладает максимальным свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(\mathfrak{A}_1)$ (см. [3; определение 2]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] И. Л. Блошанский, *Докл. АН СССР*, **283**:5 (1985), 1040–1044. [2] И. Л. Блошанский, *Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа*, Дис. ... докт. физ.-матем. наук, МИАН, М., 1991. [3] И. Л. Блошанский, О. В. Лифанцева, *Докл. РАН*, **423**:4 (2008), 439–442.

И. Л. Блошанский

Московский государственный областной университет

E-mail: i.bloshn@g23.relcom.ru

Поступило

23.01.2009

О. В. Лифанцева

Московский государственный областной университет

E-mail: ov-lifantseva@yandex.ru