Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Еряшкин, С. М. Скрыбин, Наибольшая подалгебра Хопфа в биалгебре, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 6, 942–946

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8528>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 13:33:03

Наибольшая подалгебра Хопфа в биалгебре

М. С. Еряшкин, С. М. Скрыбин

Как известно, алгебры Хопфа выделяются среди биалгебр наличием антипода – обратного к тождественному отображению относительно операции конволюции. Для двух подалгебр Хопфа H_1, H_2 биалгебры B не ясно, всегда ли существует подалгебра Хопфа, содержащая H_1 и H_2 одновременно. Основной результат настоящей работы заключается в том, что ответ на этот вопрос положителен, если B слабо конечна, и в этом случае B имеет наибольшую подалгебру Хопфа $\mathcal{H}(B)$. Для произвольной алгебры Хопфа H образ любого гомоморфизма биалгебр $H \rightarrow B$ содержится в $\mathcal{H}(B)$.

Слабо конечными являются многие классы колец (см., например, [1] или [2]). В частности, сформулированный выше результат применим к любой нётеровой слева или справа биалгебре, а также к любой биалгебре, удовлетворяющей полиномиальному тождеству. По крайней мере, утверждение о гомоморфизмах $H \rightarrow B$ перестает быть верным без предположения о слабой конечности.

Следствие 2.4 показывает, что биидеал J алгебры Хопфа H с необходимостью является идеалом Хопфа (т.е. факторбиалгебра H/J является алгеброй Хопфа) при условии, что H/J слабо конечна. Это усиливает результат работы [3].

1. Наибольшая обратимая подкоалгебра. Все рассматриваемые алгебры и коалгебры определены над полем k . Алгебры предполагаются ассоциативными с единицей, коалгебры – коассоциативными с коединицей. Через $\Delta: C \rightarrow C \otimes C$ будем обозначать коумножение, а через $\varepsilon: C \rightarrow k$ – коединицу коалгебры C . Если A – алгебра, то векторное пространство $\text{Hom}(C, A)$ всех линейных отображений $C \rightarrow A$ наделено структурой алгебры посредством конволюции $*$, задаваемой по формуле

$$\varphi * \psi = M \circ (\varphi \otimes \psi) \circ \Delta, \quad \varphi, \psi \in \text{Hom}(C, A),$$

где $M: A \otimes A \rightarrow A$ – умножение в A (см. [4], [5]). Единичным элементом этой алгебры служит отображение $u \circ \varepsilon$, где $u: k \rightarrow A$ определено сопоставлением $\alpha \mapsto \alpha 1_A$. В случае, когда $\dim C < \infty$, имеется канонический изоморфизм алгебр $\text{Hom}(C, A) \cong C^* \otimes A$. Если $g: D \rightarrow C$ – морфизм коалгебр, а $f: A \rightarrow B$ – морфизм алгебр, то отображение

$$\text{Hom}(g, f): \text{Hom}(C, A) \rightarrow \text{Hom}(D, B), \quad \varphi \mapsto f \circ \varphi \circ g,$$

является морфизмом алгебр. В частности, для обратимого элемента φ алгебры $\text{Hom}(C, A)$ с обратным φ^{-1} имеем $f \circ \varphi^{-1} \circ g = (f \circ \varphi \circ g)^{-1}$ в $\text{Hom}(D, B)$.

Пусть далее B – некоторая биалгебра. Если H – подалгебра Хопфа в B , то ее антипод s_H , рассматриваемый как линейное отображение $H \rightarrow B$, является обратным к отображению включения $H \rightarrow B$ в алгебре $\text{Hom}(H, B)$. Это мотивирует следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Назовем подкоалгебру $C \subseteq B$ *слабо обратимой* в B , если отображение включения $i: C \rightarrow B$ обратимо в $\text{Hom}(C, B)$. Обозначим $s_C = i^{-1}$. Назовем C *обратимой* в B , если, кроме того, $\text{Im } s_C \subseteq C$.

ЛЕММА 1.1. *Линейное отображение $\varphi: C \rightarrow A$ обратимо относительно $*$ в каждом из следующих случаев:*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00222).

- (а) $C = \varinjlim C_\alpha$ есть прямой предел индуктивной системы коалгебр $(C_\alpha, \mu_{\alpha\beta})$, и $\varphi_\alpha = \varphi \circ \mu_\alpha$ обратимо в $\text{Hom}(C_\alpha, A)$ для каждого индекса α , где $\mu_\alpha: C_\alpha \rightarrow C$ – каноническое отображение;
- (б) $C = \sum C_\alpha$ есть сумма некоторого семейства подкоалгебр, причем $\varphi|_{C_\alpha}$ обратимо в $\text{Hom}(C_\alpha, A)$ для каждого α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}$ в $\text{Hom}(C_\alpha, A)$. В случае (а) $\varphi_\alpha = \varphi_\beta \circ \mu_{\alpha\beta}$ для каждой пары индексов $\alpha \leq \beta$; так как $\mu_{\alpha\beta}: C_\alpha \rightarrow C_\beta$ – морфизм коалгебр, то $\psi_\alpha = \psi_\beta \circ \mu_{\alpha\beta}$. Следовательно, существует единственное линейное отображение $\psi: C \rightarrow A$ такое, что $\psi_\alpha = \psi \circ \mu_\alpha$ для всех α . Так как μ_α – морфизм коалгебр, то $(\varphi * \psi) \circ \mu_\alpha = \varphi_\alpha * \psi_\alpha$ есть единица алгебры $\text{Hom}(C_\alpha, A)$, т.е. $u \circ \varepsilon \circ \mu_\alpha$. Отсюда $\varphi * \psi = u \circ \varepsilon$, и аналогично $\psi * \varphi = u \circ \varepsilon$. Значит, $\psi = \varphi^{-1}$ в $\text{Hom}(C, A)$.

В случае (б) рассмотрим множество $\mathcal{G}$ всех подкоалгебр $D \subseteq C$ таких, что $\varphi|_D$ обратимо в $\text{Hom}(D, A)$. Проверим, что $D_1 + D_2 \in \mathcal{G}$ для любых $D_1, D_2 \in \mathcal{G}$. Обозначая $D = D_1 + D_2$ и $\psi_i = (\varphi|_{D_i})^{-1}$, имеем

$$\psi_i|_{D_1 \cap D_2} = (\varphi|_{D_1 \cap D_2})^{-1} \quad \text{для } i = 1, 2.$$

Поэтому ψ_1 совпадает с ψ_2 на $D_1 \cap D_2$, и существует линейное отображение $\psi: D \rightarrow A$ такое, что $\psi_i = \psi|_{D_i}$ для $i = 1, 2$. Отображения $\varphi|_D * \psi$ и $\psi * \varphi|_D$ совпадают с $u \circ \varepsilon$ на D_1 и на D_2 , откуда $\psi = (\varphi|_D)^{-1}$. Таким образом, множество $\mathcal{G}$, упорядоченное по включению, есть индуктивная система коалгебр. Так как $C_\alpha \in \mathcal{G}$ для всех α , то

$$C = \sum_{D \in \mathcal{G}} D = \varinjlim \mathcal{G},$$

и можно воспользоваться (а).

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Сумма $C = \sum C_\alpha$ любого семейства (слабо) обратимых подкоалгебр в B является (слабо) обратимой подкоалгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя лемму 1.1 к отображению включения $C \rightarrow B$, получаем, что подкоалгебра C слабо обратима в B . Так как ограничение s_C на C_α совпадает с s_{C_α} , то $\text{Im } s_C = \sum \text{Im } s_{C_\alpha}$. Если $\text{Im } s_{C_\alpha} \subseteq C_\alpha$ для всех α , то $\text{Im } s_C \subseteq C$.

Обозначим через B^{op} биалгебру, полученную из B изменением умножения на противоположное ($a \cdot_{B^{\text{op}}} b = b \cdot_B a$ для $a, b \in B$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Любая биалгебра B содержит наибольшую обратимую в B подкоалгебру. Кроме того, B содержит наибольшую подкоалгебру, обратимую как в B , так и в B^{op} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим следствие 1.2 к множеству всех подкоалгебр, обратимых в B в одном случае и обратимых одновременно в B и в B^{op} в другом случае.

Без дополнительных теоретико-кольцевых предположений не удастся доказать, что подкоалгебры, существование которых установлено в предложении 1.3, замкнуты относительно умножения в B .

2. Подалгебры Хопфа в слабо конечных биалгебрах. Кольцо R называется слабо (или стабильно) конечным, если для любого целого $n > 0$ и любых $(n \times n)$ -матриц $X, Y \in \text{Mat}_n(R)$ равенство $XY = 1$ влечет равенство $YX = 1$. Напомним, что R -модуль M называется хопфовым, если любой сюръективный эндоморфизм $M \rightarrow M$ биективен [6; упражнение 1.12]. Таким образом, R слабо конечно тогда и только тогда, когда свойство Хопфа выполнено для всех конечно порожденных свободных правых R -модулей, причем данное условие на правые R -модули равносильно аналогичному условию на левые

R -модули. В [7] найдена характеристика колец, для которых каждый конечно порожденный правый модуль хопфов. Этот класс колец содержит все нётеровы справа кольца, а также все кольца, являющиеся справа конечно порожденным модулем над коммутативным подкольцом. В частности, такие кольца слабо конечны. Слабая конечность колец, удовлетворяющих полиномиальному тождеству, доказана в [1; с. 599, следствие 1].

ЛЕММА 2.1. Пусть R – слабо конечная алгебра, A – конечномерная алгебра, A' – подалгебра в A . Если элемент $x \in A' \otimes R$ обратим в алгебре $A \otimes R$, то $x^{-1} \in A' \otimes R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. отождествим R и $N = A' \otimes R$ с подалгебрами тензорного произведения алгебр $M = A \otimes R$. Отображение $q: M \rightarrow M$, $m \mapsto xm$, имеет обратное отображение $m \mapsto x^{-1}m$. Значит, q биективно. Рассмотрим M как R -модуль относительно правых умножений. Тогда $q \in \text{End}_R M$. Так как $q(N) = xN \subseteq N$, то q индуцирует сюръективный R -линейный эндоморфизм $\tilde{q}: M/N \rightarrow M/N$. Поскольку R -модуль $M/N \cong A/A' \otimes R$ свободен и конечно порожден, то $\tilde{q}$ биективен в силу условия слабой конечности. Следовательно, $q^{-1}(N) = N$. Из включения $1 \in N$ выводим $x^{-1} = q^{-1}(1) \in N$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если алгебра R нётерова слева, то лемма 2.1 может быть доказана следующим образом. Так как алгебра $N = A' \otimes R$ нётерова слева, а $M = A \otimes R$ – нётеров N -модуль относительно левых умножений, то $x^{-n} \in \sum_{i=0}^{n-1} Nx^{-i}$ для достаточно большого $n > 0$. Умножая справа на x^{n-1} , находим $x^{-1} \in N$. Похожее рассуждение применимо в случае, когда R – конечно порожденный модуль над коммутативным подкольцом.

ЛЕММА 2.2. Пусть B – слабо конечная биалгебра, C – коалгебра, $\varphi: C \rightarrow B$ – морфизм коалгебр. Если φ – обратимый элемент алгебры $\text{Hom}(C, B)$, то подкоалгебра $\varphi(C)$ слабо обратима в B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай, когда $\dim C < \infty$. Пусть i обозначает отображение включения $\varphi(C) \rightarrow B$. Сюръективный морфизм коалгебр $\varphi: C \rightarrow \varphi(C)$ индуцирует инъективный морфизм алгебр

$$\varphi(C)^* \otimes B \cong \text{Hom}(\varphi(C), B) \hookrightarrow \text{Hom}(C, B) \cong C^* \otimes B,$$

при котором $i \mapsto \varphi$, так что образ i в $C^* \otimes B$ обратим. В силу леммы 2.1 получаем $i^{-1} \in \varphi(C)^* \otimes B$.

Пусть C – произвольная коалгебра. Если C' – конечномерная подкоалгебра в C , то подкоалгебра $\varphi(C')$ слабо обратима в B ввиду уже рассмотренного случая, поскольку $\varphi|_{C'}$ обратимо в $\text{Hom}(C', B)$. Как известно, C есть сумма семейства $\mathcal{F}$ своих конечномерных подкоалгебр [4; теорема 2.2.1]. Теперь заключение леммы вытекает из следствия 1.2, поскольку $\varphi(C) = \sum_{C' \in \mathcal{F}} \varphi(C')$.

ТЕОРЕМА 2.3. Слабо конечная биалгебра B имеет наибольшую подалгебру Хопфа $\mathcal{H}(B)$, а также наибольшую подалгебру Хопфа с биективным антиподом $\mathbb{H}(B)$. При этом $\mathcal{H}(B)$ (соответственно $\mathbb{H}(B)$) совпадает с наибольшей обратимой в B (соответственно в B и в B^{op}) подкоалгеброй. Для произвольной алгебры Хопфа (соответственно алгебры Хопфа с биективным антиподом) H морфизмы биалгебр $H \rightarrow B$ находятся в биективном соответствии с морфизмами алгебр Хопфа $H \rightarrow \mathcal{H}(B)$ (соответственно $H \rightarrow \mathbb{H}(B)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через C наибольшую обратимую в B подкоалгебру. Наделим $C \otimes C$ структурой тензорного произведения коалгебр [4; раздел 3.0]. Отображение $\varphi: C \otimes C \rightarrow B$, задаваемое умножением в B , является морфизмом коалгебр. Кроме того, φ имеет обратный

$$\psi: C \otimes C \rightarrow B, \quad \psi(a \otimes b) = s_C(b)s_C(a),$$

в алгебре $\text{Hom}(C \otimes C, B)$. Подкоалгебра $C^2 = CC = \varphi(C \otimes C)$ слабо обратима в B по лемме 2.2. В силу функториальности $s_{C^2} \circ \varphi = \psi$, т.е.

$$s_{C^2}(ab) = s_C(b)s_C(a) \in C^2 \quad \text{для } a, b \in C.$$

Значит, подкоалгебра C^2 обратима в B , что дает $C^2 \subseteq C$. Так как $k1_B$ – обратимая в B подкоалгебра, то $1_B \in C$. Таким образом, C – подбиалгебра в B . Поскольку $s_C: C \rightarrow C$ является обратным для тождественного отображения id_C в алгебре $\text{Hom}(C, C)$, то C – подалгебра Хопфа. Любая подалгебра Хопфа в B является обратимой в B подкоалгеброй и, следовательно, содержится в C .

Пусть $f: H \rightarrow B$ – морфизм биалгебр, где H – алгебра Хопфа с антиподом $s_H: H \rightarrow H$. Тогда $f^{-1} = f \circ s_H$ в алгебре $\text{Hom}(H, B)$. По лемме 2.2 $f(H)$ – слабо обратимая подкоалгебра в B , так что $s_{f(H)}: f(H) \rightarrow B$ определено. В силу функториальности $f^{-1} = s_{f(H)} \circ f$ в $\text{Hom}(H, B)$. Отсюда

$$\text{Im } s_{f(H)} = \text{Im}(s_{f(H)} \circ f) = \text{Im}(f \circ s_H) \subseteq f(H),$$

т.е. $s_{f(H)}$ дает антипод биалгебры $f(H)$. Следовательно, $f(H)$ – подалгебра Хопфа и, в частности, $f(H) \subseteq C$. Равенство $f \circ s_H = s_{f(H)} \circ f$ означает, что f – морфизм алгебр Хопфа $H \rightarrow f(H)$ [4; лемма 4.0.4].

Рассмотрим теперь наибольшую подкоалгебру $D \subseteq B$, обратимую в B и в B^{op} . Как и выше, проверяется, что подкоалгебра D^2 обратима в B и в B^{op} . Это влечет, что D – подалгебра Хопфа в B и в B^{op} . Для алгебры Хопфа H условие, что биалгебра H^{op} – алгебра Хопфа, равносильно биективности антипода H [8; предложение 1.6.2]. В частности, D имеет биективный антипод. Если $f: H \rightarrow B$ – морфизм биалгебр, где H – алгебра Хопфа с биективным антиподом, то $f(H)$ является подалгеброй Хопфа в B и в B^{op} , что влечет $f(H) \subseteq D$.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. *Если J – биидеал алгебры Хопфа H , причем биалгебра H/J слабо конечна, то J является идеалом Хопфа. В частности, любой биидеал является идеалом Хопфа в случае, когда H нётерова справа или слева, а также в случае, когда H удовлетворяет полиномиальному тождеству.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B = H/J$ и $\pi: H \rightarrow B$ – каноническая проекция. Так как B слабо конечна, то $B = \pi(H) \subseteq \mathcal{H}(B)$. Следовательно, B – алгебра Хопфа, а J – идеал Хопфа. Свойства кольца быть нётеровым с одной из сторон или удовлетворять полиномиальному тождеству наследуется всеми факторкольцами, которые в этом случае будут слабо конечными. Отсюда вытекает второе утверждение.

В [3; теорема 1] утверждение о том, что J является идеалом Хопфа, сформулировано для нескольких случаев: H/J конечномерна, H/J коммутативна, H точечна, H кокоммутативна. То же самое заключение верно в предположении о том, что H – строго коплюский H/J -комодуль справа или слева [9; следствие 1.5].

В [3] приведен также пример биидеала некоторой алгебры Хопфа, не являющегося идеалом Хопфа. Мы предполагаем, что существуют две алгебры Хопфа H_1, H_2 и биидеал J алгебры Хопфа $H_1 \otimes H_2$, который не является идеалом Хопфа и имеет нулевые пересечения с $H_1 \otimes 1$ и с $1 \otimes H_2$. В этом случае H_1, H_2 будут вкладываться в биалгебру $B = (H_1 \otimes H_2)/J$ и порождать всю B , так что B не будет содержать наибольшей подалгебры Хопфа. В качестве H_1, H_2 придется взять весьма большие алгебры Хопфа – например, свободные алгебры Хопфа, построенные в [10], – и проверка высказанного утверждения потребует громоздких выкладок, связанных с построением базиса Гребнера.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Montgomery, *Comm. Algebra*, **11**:6 (1983), 595–610. [2] L. H. Rowen, *Ring Theory*, Vol. I, Pure Appl. Math., **127**, Acad. Press, Boston, MA, 1988. [3] W. D. Nichols, *Comm. Algebra*, **6**:17 (1978), 1789–1800. [4] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Math. Lecture Note Ser., W. A. Benjamin, New York, 1969. [5] S. Montgomery, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **82**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993. [6] T. Y. Lam, *Exercises in Classical Ring Theory*, Problem Books in Math., Springer-Verlag, New York, NY, 2003. [7] K. R. Goodearl, *Comm. Algebra*, **15**:3 (1987), 589–609. [8] L. A. Lambe, D. E. Radford, *Introduction to the Quantum Yang–Baxter Equation and Quantum Groups. An Algebraic Approach*, Math. Appl., **423**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997. [9] M. Takeuchi, *Comm. Algebra*, **22**:7 (1994), 2503–2523. [10] M. Takeuchi, *J. Math. Soc. Japan*, **23** (1971), 561–582.

М. С. Еряшкин

Казанский государственный университет

С. М. Скрябин

НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарева,

Казанский государственный университет

E-mail: Serge.Skryabin@ksu.ru

Поступило

28.11.2008

Исправленный вариант

23.03.2009