Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Л. Попов, Алгебраические конусы, *Матем. заметки*,
2009, том 86, выпуск 6, 947–949

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8529>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:15:07

Алгебраические конусы

В. Л. Попов

В этой заметке дан ответ на вопрос К. Аджамагбо, поставленный в письме к автору от 9 июля 2009 г.

Все рассматриваемые ниже алгебраические многообразия определены над алгебраически замкнутым полем k .

Неприводимое алгебраическое многообразие X называется *конусом*, если X аффинно и его координатная алгебра $k[X]$ допускает связную $\mathbb{N}$ -градуировку:

$$k[X] = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} k[X]_d, \quad k[X]_0 = k. \quad (1)$$

Пусть $\mathbf{M}_m$ – мультипликативный алгебраический моноид, подлежащим многообразию которого является аффинная прямая $\mathbf{A}^1$, а умножение $\mu: \mathbf{A}^1 \times \mathbf{A}^1 \rightarrow \mathbf{A}^1$ определено умножением в k , т.е. $\mu^*(T) = T \otimes T$, где T – стандартная координатная функция на $\mathbf{A}^1$. Группой единиц в $\mathbf{M}_m$ является $\mathbf{M}_m \setminus \{0\} = \mathbf{G}_m$. Обозначим

$$\chi_d: \mathbf{G}_m \rightarrow \mathbf{G}_m, \quad t \mapsto t^d, \quad (2)$$

Мы говорим, что $\mathbf{M}_m$ *действует* на многообразии Y , если задан такой морфизм $\alpha: \mathbf{M}_m \times Y \rightarrow Y$, что $\alpha(g, \alpha(h, y)) = \alpha(gh, y)$ и $\alpha(1, y) = y$ для любых $g, h, \in \mathbf{M}_m$, $y \in Y$. Мы используем запись $g(y) := \alpha(g, y)$. Ограничение α на $\mathbf{G}_m \times Y$ является обычным действием группы $\mathbf{G}_m$ на Y . Множество $\mathbf{M}_m(y) := \{g(y) \mid g \in \mathbf{M}_m\}$ называется *$\mathbf{M}_m$ -орбитой* точки y (предупреждение: различные $\mathbf{M}_m$ -орбиты могут иметь непустое пересечение). Если $\mathbf{M}_m(y) = y$, то y называется *неподвижной точкой* действия.

ТЕОРЕМА. Пусть X – неприводимое алгебраическое многообразие. Рассмотрим следующие свойства:

- (i) X является конусом;
- (ii) существует действие $\mathbf{M}_m$ на X с единственной неподвижной точкой;
- (iii) существует действие $\mathbf{G}_m$ на X с неподвижной точкой, которая является единственной замкнутой орбитой.

Тогда (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) и, если X нормально, (iii) $\Rightarrow$ (i).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы можем считать, что $\dim X > 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Пусть X является конусом. Рассмотрим градуировку (1). Тогда формула $t \cdot f := t^d f$, где $t \in \mathbf{G}_m$, $f \in k[X]_d$, определяет действие $\mathbf{G}_m$ на $k[X]$ автоморфизмами k -алгебры. В свою очередь, оно определяет (алгебраическое) действие $\mathbf{G}_m$ на X . Ввиду связности градуировки (1) мы имеем

$$k[X]^{\mathbf{G}_m} = k. \quad (3)$$

Поскольку $k[X]^{\mathbf{G}_m}$ разделяет замкнутые $\mathbf{G}_m$ -орбиты [1; следствие A1.3], из (3) и [2; следствие I.1.8] следует, что существует единственная такая орбита O . Координатная алгебра $k[O]$ многообразия O не содержит $\mathbf{G}_m$ -стабильных собственных идеалов, поскольку множество нулей такого идеала было бы собственным $\mathbf{G}_m$ -стабильным подмножеством в O . Значит, поскольку из замкнутости O следует сюръективность отображения

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00095), программы “Ведущие научные школы” (грант № 1987.2008.1) и программы “Современные проблемы теоретической математики” отделения математики РАН.

$k[X] \rightarrow k[O]$, $f \mapsto f|_O$, мы получаем, что $\mathbf{G}_m$ -стабильный идеал $\bigoplus_{d>0} k[X]_d$ обращается на O в нуль. Следовательно, O является точкой.

Ввиду теоремы вложения [3; теорема 1.5] мы можем считать, что X является замкнутым $\mathbf{G}_m$ -стабильным подмножеством конечномерного $\mathbf{G}_m$ -модуля V и X не содержится ни в каком его собственном подмодуле. Но множество нулей всех линейных функций на V , обращающихся в нуль на X , является подмодулем, содержащим X . Следовательно, мы имеем вложение $\mathbf{G}_m$ -модулей $V^* \hookrightarrow k[X]$, $\ell \mapsto \ell|_X$. Поскольку веса V обратны весам V^* , отсюда и из (3) следует, что нулевой вектор 0_V является единственной $\mathbf{G}_m$ -неподвижной точкой в V ; в частности, $O = 0_V$. Ввиду (1) отсюда также следует, что для любого $\mathbf{G}_m$ -веса χ_d модуля V^* мы имеем $d \in \mathbb{N}$. Значит, ввиду (2) существуют числа $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}$ и базис $e_1, \dots, e_n$ в V такие, что $t(e_i) = t^{d_i} e_i$ для любых $t \in \mathbf{G}_m$ и i . Это показывает, что, положив $0(v) = 0_V$ для любого $v \in V$, мы получаем продолжение действия $\mathbf{G}_m$ на V . Поскольку $\mathbf{M}_m$ является замыканием $\mathbf{G}_m$, а X замкнуто и $\mathbf{G}_m$ -стабильно, то X также и $\mathbf{M}_m$ -стабильно. По той же причине 0_V является неподвижной точкой для $\mathbf{M}_m$. Поскольку $V^{\mathbf{G}_m} = \{0_V\}$, других неподвижных точек нет.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Предположим, что $\mathbf{M}_m$ действует на неприводимом многообразии X с единственной неподвижной точкой x . Ограничим это действие на $\mathbf{G}_m$. Возьмем какую-либо точку $y \in X$. Если $\mathbf{G}_m$ -орбита $\mathbf{G}_m(y)$ замкнута в X , то $\mathbf{G}_m(y) = \mathbf{M}_m(y)$, поскольку $\mathbf{G}_m$ плотно в $\mathbf{M}_m$.

Мы утверждаем, что тогда $\mathbf{G}_m(y)$ является точкой, а потому $\mathbf{G}_m(y) = x$ ввиду единственности x . В самом деле, допустим, что это не так, т.е. $\dim \mathbf{G}_m(y) = 1$. Орбитное отображение $\varphi_y: \mathbf{M}_m \rightarrow \mathbf{M}_m(y)$, $g \mapsto g(y)$, является сюръективным морфизмом одномерных гладких многообразий, его слои конечны и для любой точки $z \in \mathbf{M}_m(y)$, $z \neq \varphi_y(0)$, число точек в слое $\varphi_y^{-1}(z)$ равно порядку $\mathbf{G}_m$ -стабилизатора точки y (обозначим его через s), тогда как число точек в слое $\varphi_y^{-1}(\varphi_y(0))$ равно $s + 1$. Согласно [4; раздел 2, следствие 2] это невозможно; противоречие. Таким образом, x – единственная замкнутая $\mathbf{G}_m$ -орбита.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Предположим теперь, что $\mathbf{G}_m$ действует на X с единственной неподвижной точкой x и других замкнутых орбит нет. Тогда для каждой точки $y \in X$, $y \neq x$, замыкание $\overline{\mathbf{G}_m(y)}$ орбиты $\mathbf{G}_m(y)$ одномерно и

$$x \in \overline{\mathbf{G}_m(y)}. \quad (4)$$

Предположим далее, что X нормально. Тогда по теореме Сумихиро [5; следствие 2 леммы 8] существует $\mathbf{G}_m$ -стабильная аффинная открытая окрестность U точки x . Мы утверждаем, что $X = U$. В самом деле, если это не так, то $X \setminus U$ является непустым $\mathbf{G}_m$ -стабильным подмножеством в X и (4) невозможно для $y \in X \setminus U$; противоречие.

Таким образом, $X = U$ и, значит, X аффинно.

Поскольку функции из $k[X]^{\mathbf{G}_m}$ постоянны на $\mathbf{G}_m$ -орбитах, из (4) следует, что $f(y) = f(x)$ для любых $f \in k[X]^{\mathbf{G}_m}$ и $y \in X$; следовательно, выполнено (3).

Пусть $k[X]_d$ обозначает χ_d -изотипную компоненту $\mathbf{G}_m$ -модуля $k[V]$. Тогда

$$k[X] = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} k[X]_d \quad (5)$$

является $\mathbb{Z}$ -градуировкой k -алгебры $k[X]$. Ввиду (3) она связна, т.е. $k[X]_0 = k$.

Мы утверждаем, что не существует таких целых чисел $d_1 > 0$ и $d_2 < 0$, что $k[X]_{d_i} \neq 0$ при $i = 1, 2$. В самом деле, предположим, что это не так. Тогда существует такая точка $y \in X$, что $k[X]_{d_i}$, $i = 1, 2$, не лежит в ядре отображения $k[X] \rightarrow k[\overline{\mathbf{G}_m(y)}]$, $f \mapsto f|_{\overline{\mathbf{G}_m(y)}}$. Значит, χ_{d_i} -изотипная компонента $\mathbf{G}_m$ -модуля $k[\overline{\mathbf{G}_m(y)}]$ является ненулевой для каждого $i = 1, 2$. Отсюда следует, что существует такое целое число $d \neq 0$, что $\mathbf{G}_m$ -стабильный максимальный идеал $\{f \in k[\overline{\mathbf{G}_m(y)}] \mid f(x) = 0\}$ в $k[\overline{\mathbf{G}_m(y)}]$ имеет ненулевые изотипные компоненты весов χ_d и χ_d^{-1} . Пусть p и q – ненулевые элементы соответственно первой

и второй из них. Тогда функция pq постоянна на $\mathbf{G}_m(y)$, а следовательно, и на $\overline{\mathbf{G}_m(y)}$. Поскольку $pq(x) = 0$, это означает, что $pq = 0$ вопреки неприводимости $\overline{\mathbf{G}_m(y)}$; противоречие.

Таким образом, $k[X]_d = 0$ в (5) либо для всех отрицательных, либо для всех положительных d . Заменяя, если необходимо, действие $\mathbf{G}_m$ на X на $g \cdot y := g^{-1}(y)$, мы можем считать, что реализуется первая возможность, т.е. выполнено (1). Это завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ. Следующий пример показывает, что в общем случае без предположения о нормальности X импликации (iii) $\Rightarrow$ (i) и (ii) $\Rightarrow$ (i) не имеют места.

ПРИМЕР. Пусть X – образ морфизма

$$\begin{aligned} \nu: \mathbf{P}^1 &\rightarrow \mathbf{P}^2, & (a_0 : a_1) &\mapsto (p^3 : q^2t - p^3 : q^3 - qp^2), \\ p &= a_1 - a_0, & q &= a_1 + a_0. \end{aligned}$$

Многообразие X является проективной плоской кубикой с обычной двойной точкой $O = (1 : 0 : 0)$, а $\mathbf{P}^1 \rightarrow X$, $x \mapsto \nu(x)$, – ее нормализацией. Формула $\alpha(t, (a_0 : a_1)) = (a_0 : ta_1)$ определяет действие $\mathbf{G}_m$ на $\mathbf{P}^1$, которое спускается на X с помощью ν , см. [6]. Для этого действия O является единственной неподвижной точкой, а $X \setminus O$ – орбитой. Оно продолжается до действия $\mathbf{M}_m$, при котором $0(x) = O$ для любой точки $x \in X$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Mumford, J. Fogarty, *Geometric Invariant Theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **34**, Springer-Verlag, Berlin, 1982. [2] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Grad. Texts in Math., **126**, Springer-Verlag, New York, 1991. [3] Э.Б. Винберг, В.Л. Попов, *Алгебраическая геометрия* – 4, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **55**, ВИНТИ, М., 1989, 137–309. [4] A. Grothendieck, *Classification de groupes de Lie algébriques*, Séminaire Claude Chevalley, 1956–1958, **1**, Secrétariat mathématique, Paris, 1958, Exposé no. 5, 19 pp. [5] H. Sumihiro, *J. Math. Kyoto Univ.*, **14** (1974), 1–28. [6] В.Л. Попов, *Матем. заметки*, **23:2** (1978), 183–195.

В. Л. Попов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: popovvl@orc.ru

Поступило

01.09.2009