Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Г. Смирнова, Представление функции Грина уравнения теплопроводности на компактной группе Ли, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 3, 397–413

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm853>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 18:12:55

УДК 517.1

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА КОМПАКТНОЙ ГРУППЕ ЛИ

М. Г. Смирнова

Получена явная формула, представляющая решение уравнения теплопроводности на компактной группе Ли в виде предела конечнократных сверток функции Грина для уравнения теплопроводности в евклидовом пространстве.

Библиография: 14 названий.

Основной результат работы можно рассматривать как метод построения броуновского движения на произвольном компактном римановом многообразии, обладающим постоянной кривизной Риччи; он совершенно отличен от используемых в настоящее время подходов, ставших уже почти стандартными и основанных на применении теории полу-групп (см. [1], [2]) и стохастических дифференциальных уравнений (см., например, [3]–[7] и имеющиеся там ссылки).

Существует еще и совсем иной более алгебраический подход, применимый только к компактным группам Ли и дающий “явное” представление решений уравнения теплопроводности в виде бесконечного ряда по (выраженным весьма громоздкими формулами) собственным функциям оператора Бельтрами–Лапласа на группе, которые могут быть найдены методами теории представлений [8]. Значительное внимание, которое сейчас уделяется в литературе случайным процессам и дифференциальным уравнениям на компактных римановых многообразиях, объясняется, в частности, той ролью, которую они играют в квантовой теории (например, в теории струн и в теории калибровочных полей).

Представление решений эволюционных уравнений с частными производными (относительно функций, определенных на евклидовых пространствах) в виде предела конечнократных интегралов было впервые получено Р. Фейнманом в его известной работе [9], в которой фактически была угадана формула Троттера. Точный математический смысл рассуждениям Р. Фейнмана был придан Э. Нельсоном в [10]. Доказанную в работе формулу (без доказательства она была приведена в [11]) можно интерпретировать как распространение формулы Фейнмана на уравнение теплопроводности с сингулярным потенциалом типа “регуляризованной” δ -функции, сосредоточенным на многообразии, вложенном в подходящее евклидово пространство. Точная формулировка полученного результата следующая.

Пусть G – компактная связная группа Ли, реализованная согласно теореме Петера–Вейля как подгруппа некоторой унитарной группы $U(N)$ и, соответственно, как поверхность в пространстве $M \cong \mathbb{C}^{N^2}$ всех комплексных $N \times N$ матриц. Эрмитово ска-

лярное произведение в $\mathbb{C}^{N^2}$, задаваемое формулой $(A, B) = \text{tr } AB^* = \sum_{i,j} A_{ij} \overline{B}_{ij}$, инвариантно относительно действия группы $U(N)$.

Тогда решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta f, \quad f|_{t=0} = f_0,$$

где $f: G \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f_0 \in C^2(G)$, может быть записано в виде:

$$f(t, X) = \lim_{\substack{\max h_i \rightarrow 0 \\ h_1 + \dots + h_n = t}} \int_G \dots \int_G f_0(X_1) p(X_1, X_2, h_1) \times p(X_2, X_3, h_2) \dots p(X_n, X, h_n) dX_1 \dots dX_n,$$

где

$$p(X, Y, h) = \frac{C_h}{(\sqrt{2\pi h})^m} e^{-\|X-Y\|^2/(2h)}, \quad \int_G \frac{C_h}{(\sqrt{2\pi h})^m} e^{-\|X-E\|^2/(2h)} dX = 1.$$

Здесь $\Delta = -\Delta_{BL}$, Δ_{BL} – оператор Бельтрами–Лапласа (см., например, [12]); $\|X\| = \sqrt{(X, X)}$ – норма в пространстве M , $m = \dim G$ – размерность G , E – единица группы G (единичная матрица).

1. Предварительные сведения. Пусть ν_G и $\nu_{T_E G}$ – меры на группе G и на касательном пространстве $T_E G$ соответственно, индуцированные вложением G и $T_E G$ в евклидово пространство M с мерой Лебега. Из инвариантности скалярного произведения следует инвариантность меры ν_G относительно умножений в группе. Везде в дальнейшем при интегрировании по группе G и пространству $T_E G$ подразумевается интегрирование по мере ν_G и $\nu_{T_E G}$ соответственно.

Для доказательства основной формулы нам потребуется ряд вспомогательных утверждений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (см. [13, § 11]). Пусть G – компактная матричная группа Ли, наделенная римановой метрикой, инвариантной относительно групповой операции. Тогда геодезические этой метрики имеют вид Be^{At} , где $B \in G$, $A \in T_E G$ – касательному пространству в единице к группе G , причем если $\|A\| = 1$, то t – натуральный параметр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть F^n – риманово многообразие, и $\varphi \in C^2(F^n)$. Тогда

$$\Delta \varphi(x) = \sum_{l=1}^n \left. \frac{d^2 \varphi(x_l(t))}{dt^2} \right|_{t=0},$$

где $x_l(t)$ – семейство геодезических, выходящих из точки x и таких, что векторы $\dot{x}_l(t)|_{t=0}$ образуют ортонормированный базис в касательном пространстве к F^n в точке x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть G – компактная группа Ли. Существует ограниченная симметричная окрестность нуля U в $T_E G$ такая, что экспоненциальное отображение $\exp: Y \mapsto e^Y$ ($T_E G \rightarrow G$) взаимно однозначно отображает U на $\exp(U)$ и $\nu_G(G \setminus \exp(U)) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать G подгруппой группы унитарных матриц $U(n)$ для некоторого n . Тогда $T_E G$ – подпространство в пространстве $\mathcal{K}_n$ всех косозермитовых матриц порядка n . Введем в пространстве $\mathcal{K}_n$ норму

$$\|A\|_1 = \max_{x \in \mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Множество $U = \{X \in T_E G : \|X\|_1 < \pi\}$ ограничено, открыто и симметрично; экспоненциальное отображение сюръективно отображает его замыкание $\overline{U} = \{X \in T_E G : \|X\|_1 \leq \pi\}$ на группу G . Инъективность экспоненциального отображения на U проверяется элементарно. Поскольку якобиан экспоненциального отображения ограничен на $\overline{U}$ и множество $\overline{U} \setminus U$ имеет лебегову меру нуль, то $\nu_G(G \setminus \exp(U)) = 0$. Предложение доказано.

Везде в дальнейшем мы будем считать, что окрестность $U \subset T_E G$, удовлетворяющая условиям предложения 3, фиксирована. Отметим, что для любой функции $\varphi \in C(G)$

$$\int_G \varphi(X) dX = \int_U \psi(Y) |\mathcal{J}(Y)| dY,$$

где $\psi(Y) = \varphi(e^Y)$, $\mathcal{J}$ – якобиан отображения $\exp: T_E G \rightarrow G$.

Отметим также, что $\mathcal{J}(-X) = \mathcal{J}(X)$, и, поскольку $\mathcal{J}(0) = 1$, в окрестности нуля в $T_E G$ выполняется неравенство $1 - c\|X\|^2 \leq |\mathcal{J}(X)| \leq 1 + c\|X\|^2$.

Положим

$$p_h(X) = \begin{cases} p(e^X, E, h) |\mathcal{J}(X)|, & X \in U; \\ 0, & X \in T_E G \setminus U. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_{T_E G} \varphi(e^Y) p_h(Y) dY = \int_G \varphi(X) p(X, E, h) dX, \quad (1.1)$$

где $\varphi \in C(G)$. Символом ξ_h будем обозначать случайную величину, принимающую значения в $T_E G$, распределение которой имеет плотность p_h относительно меры $\nu_{T_E G}$. Случайная величина e^{ξ_h} принимает значения в G , и ее распределение согласно (1.1) имеет плотность $p(X, E, h)$ относительно меры ν_G . Заметим, что $p(AX, AY, h) = p(X, Y, h)$ и

$$\int_G \varphi(X) dX = \int_G \varphi(XY) dX,$$

поскольку форма объема dX , задаваемая метрикой, индуцированной вложением $G \subset M$, инвариантна относительно групповой операции. Эти два факта будут в дальнейшем использоваться без пояснений. Символом $E\xi$ обозначается математическое ожидание случайной величины ξ .

ЛЕММА 1. Пусть ξ_1 и ξ_2 – две независимые случайные величины, принимающие значения в G , с плотностями p_{ξ_1} и p_{ξ_2} относительно меры ν_G . Тогда случайная величина $\xi_1 \xi_2$ имеет плотность

$$p_{\xi_1 \xi_2}(X) = \int_G p_{\xi_1}(XY^{-1}) p_{\xi_2}(Y) dY.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Случайная величина $e^{\xi_{h_1}} \dots e^{\xi_{h_n}}$ имеет плотность

$$p(X_1) = \int_G \dots \int_G p(X_1, X_2, h_1) p(X_2, X_3, h_2) \dots p(X_n, E, h_n) dX_2 \dots dX_n.$$

Кроме того

$$\begin{aligned} E\varphi(e^{\xi_{h_1}} \dots e^{\xi_{h_n}} X) &= \int_G \dots \int_G \varphi(X_1) p(X_1, X_2, h_1) \\ &\quad \times p(X_2, X_3, h_2) \dots p(X_n, X, h_n) dX_1 dX_2 \dots dX_n. \end{aligned}$$

2. Случайные величины, принимающие значения в группе G . Непосредственно проверяется, что для нормы в пространстве $M \cong C^{N^2}$, индуцированной скалярным произведением

$$(A, B) = \sum_{i,j=1}^N A_{ij} \overline{B}_{ij},$$

выполняется неравенство $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$. В дальнейшем этот факт будет использоваться без пояснений.

Утверждения следующих четырех технических лемм проверяются непосредственно.

ЛЕММА 2. Пусть $X \in T_E G$. Тогда $\|X\|^2 - \|e^X - E\|^2 \leq O(\|X\|^4)$ ($\|X\| \rightarrow 0$).

ЛЕММА 3. Справедлива оценка $|C_h - 1| = O(h)$ ($h \rightarrow 0$).

ЛЕММА 4. Выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int_{\mathbb{R}^1} x^{2k} e^{-|x|^2/(2h)} dx &= \frac{(2k)!}{2^k k!} h^k, \\ \frac{1}{(\sqrt{2\pi h})^m} \int_{\mathbb{R}^m} (x_1^2)^{\alpha_1} \dots (x_m^2)^{\alpha_m} e^{-\|x\|^2/(2h)} dx &= \frac{(2\alpha_1)! \dots (2\alpha_m)!}{2^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m} \alpha_1! \dots \alpha_m!} h^{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}, \\ \frac{1}{(\sqrt{2\pi h})^m} \int_{\mathbb{R}^m} \|x\|^{2k} e^{-\|x\|^2/(2h)} dx &= \frac{h^k k!}{2^k} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_m = k} \frac{(2\alpha_1)! \dots (2\alpha_m)!}{(\alpha_1! \dots \alpha_m!)^2} \leq c^k h^k k!, \\ \frac{1}{(\sqrt{2\pi h})^m} \int_{\mathbb{R}^m} \|x\|^{2k-1} e^{-\|x\|^2/(2h)} dx &\leq c^{k-1/2} h^{k-1/2} k!, \end{aligned}$$

где c зависит только от m .

ЛЕММА 5. Справедливы оценки

$$\begin{aligned} \int_U \|X\|^k p_h(X) dX &\leq c(m)^k \frac{1}{(\sqrt{2\pi h})^m} \int_{T_E G} \|X\|^k e^{-\|X\|^2/(2h)} dX, \\ \int_U (X_1^2)^{\alpha_1} \dots (X_m^2)^{\alpha_m} p_h(X) dX &\leq \frac{c(m)^\alpha}{(\sqrt{2\pi h})^m} \int_{T_E G} (X_1^2)^{\alpha_1} \dots (X_m^2)^{\alpha_m} e^{-\|X\|^2/(2h)} dX, \end{aligned}$$

где $m = \dim G$, $\alpha = 2(\alpha_1 + \dots + \alpha_m)$, $X_1, \dots, X_m$ — координаты вектора X в некотором ортонормированном базисе в $T_E G$.

Из лемм 2–5 и оценки $1 - c\|X\|^2 \leq |\mathcal{J}(X)| \leq 1 + c\|X\|^2$ следует

ЛЕММА 6. *Выполняется асимптотическая формула*

$$\left| \int_U \|X\|^k p_h(X) dX - \frac{1}{(\sqrt{2\pi h})^m} \int_{\mathbb{R}^m} \|X\|^k e^{-\|X\|^2/(2h)} dX \right| = O(h^{k/2+1}) \quad (h \rightarrow 0),$$

где константа в $O(h^{k/2+1})$ не зависит от h и k .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\xi_{h_1^i}, \dots, \xi_{h_{n_i}^i}$ – независимые случайные величины с плотностями $p_{h_1^i}, \dots, p_{h_{n_i}^i}$ и

$$\max_{1 \leq j \leq n_i} h_j^i \rightarrow 0 \quad (i \rightarrow \infty), \quad \sum_{j=1}^{n_i} h_j^i = s.$$

Тогда $\xi_{h_1^i} + \dots + \xi_{h_{n_i}^i} \xrightarrow{w} \zeta_s$ ($i \rightarrow \infty$), где ζ_s – гауссовская случайная величина в $T_E G$ с матрицей ковариаций sE_m , где E_m – единичная матрица размера $m \times m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ_{ξ_h} – характеристическая функция случайной величины ξ_h . Тогда

$$\varphi_{\xi_h}(t) = \int_{T_E G} e^{i(t, X)} p_h(X) dX = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int_{T_E G} (t, X)^k p_h(X) dX; \quad (2.1)$$

$p_h(-X) = p_h(X)$, так как $p(e^{-X}, E, h) = p(e^{-X}e^X, e^X, h) = p(E, e^X, h)$, $\mathcal{J}(-X) = \mathcal{J}(X)$. Следовательно,

$$\int_{T_E G} (t, X) p_h(X) dX = 0.$$

По лемме 6

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \int_{T_E G} (t, X)^2 p_h(X) dX - \frac{h}{2} \sum_{i=1}^m t_i^2 \right| \\ & \leq \left| \frac{1}{2} \int_{T_E G} \|t\|^2 \|X\|^2 \left(p_h(X) - \frac{1}{(\sqrt{2\pi h})^m} e^{-\|X\|^2/(2h)} \right) dX \right| = \|t\|^2 O(h^2) \quad (h \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Пользуясь леммами 4 и 5, получаем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=3}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int_{T_E G} (t, X)^k p_h(X) dX \right| \leq \left| \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\|t\|^k}{k!} \int_{T_E G} \|X\|^k p_h(X) dX \right| \\ & \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|t\|^{2k}}{(2k)!} c^{2k} h^k k! + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|t\|^{2k+1}}{(2k+1)!} c^{2k+1} h^{k+1/2} (k+1)! \\ & \leq O(\|t\|^3 h^{3/2}) \quad (\|t\| h^{1/2} \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Учитывая (2.1), (2.2) и (2.3), имеем

$$\varphi_{\xi_h}(t) = 1 - \frac{h\|t\|^2}{2} + O(h^{3/2}\|t\|^3) + O(\|t\|^2 h^2).$$

Пусть теперь

$$\xi^i = \sum_{j=1}^{n_i} \xi_{h_j^i}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ln \varphi_{\xi^i} &= \sum_{j=1}^{n_i} \ln \varphi_{\xi_{h_j^i}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_i} h_j^i \|t\|^2 + O\left(\sum_{j=1}^{n_i} (h_j^i)^{3/2} \|t\|^3\right) + O\left(\sum_{j=1}^{n_i} (h_j^i)^2 \|t\|^2\right) \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} h \|t\|^2 \quad (i \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Из известной теоремы о сходимости распределений следует, что $\xi^i \xrightarrow{w} \eta$ ($i \rightarrow \infty$).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\varphi \in C(G)$, μ_1, μ_2 – случайные величины, принимающие значения в группе G . Пусть $h_1 + \dots + h_n = h$ – разбиение отрезка $[0, h]$. Если $\xi_{h_1}, \dots, \xi_{h_n}$ с плотностями $p_{h_1}, \dots, p_{h_n}$ таковы, что $\mu_1, \mu_2, \xi_{h_1}, \dots, \xi_{h_n}$ – независимые случайные величины, и ζ_h – гауссовская случайная величина в $T_E G$ с матрицей ковариаций hE_m такая, что случайные величины μ_1, μ_2, ζ_h независимы, то

$$|\mathbb{E}\varphi(\mu_1 e^{\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}} \mu_2) - \mathbb{E}\varphi(\mu_1 e^{\zeta_h} \mu_2)| \rightarrow 0 \quad \left(\max_{1 \leq i \leq n} |h_i| \rightarrow 0\right),$$

равномерно по h_i и μ_1, μ_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 1 вытекает, что для любых $X, Y \in G$

$$|\mathbb{E}\varphi(X e^{\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}} Y) - \mathbb{E}\varphi(X e^{\zeta_h} Y)| \rightarrow 0 \quad \left(\max_{1 \leq i \leq n} |h_i| \rightarrow 0\right). \quad (2.4)$$

Поскольку семейство функций $\{f_\mu(X, Y) = \mathbb{E}\varphi(X\mu Y) : \mu - \text{случайная величина со значениями в } G\}$ равномерно непрерывно на компакте $G \times G$, сходимость в (2.4) равномерна по $X, Y \in G$, что и влечет нужное нам утверждение.

ЛЕММА 7. Пусть $\xi_{h_1}, \dots, \xi_{h_n}$ независимы, $h_i > 0$ и $h_1 + \dots + h_n = h$. Тогда

$$\mathbb{E}\|\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}\|^{2k} \leq \frac{(2k)!}{k!} c^k h^k, \quad \mathbb{E}\|\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}\|^{2k-1} \leq \frac{(2k)!}{k!} c^{k-1/2} h^{k-1/2},$$

где константа c зависит только от выбора группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\xi = \xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}$. Фиксируем произвольный ортонормированный базис в $T_E G$. В этом базисе $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^m)$, $\xi_{h_j} = (\xi_{h_j}^1, \dots, \xi_{h_j}^m)$, $\xi^i = \xi_{h_1}^i + \dots + \xi_{h_n}^i$. Из лемм 4 и 5 следует, что

$$\mathbb{E}(\xi^i)^{2k} \leq \frac{(2k)!}{k!} c^k h^k, \quad (2.5)$$

где c зависит только от группы G . По неравенству Гёльдера из (2.5) вытекает, что

$$\mathbb{E}(\xi^1)^{2k_1} \dots (\xi^m)^{2k_m} \leq \frac{(2k)!}{k!} c^k h^k.$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}\|\xi\|^{2k} \leq \frac{(2k)!}{k!} m^k c^k h^k.$$

Для оценки $\mathbb{E}\|\xi\|^{2k-1}$ снова воспользуемся неравенством Гёльдера и уже имеющейся оценкой для $\mathbb{E}\|\xi\|^{2k}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\|\xi\|^{2k-1} &\leq (\mathbb{E}\|\xi\|^{2k})^{(2k-1)/(2k)} \leq \left(\frac{(2k)!}{k!} m^k c^k h^k \right)^{(2k-1)/(2k)} \\ &\leq \frac{(2k)!}{k!} m^{k-1/2} c^{k-1/2} h^{k-1/2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Непосредственным следствием предыдущей леммы является

ЛЕММА 8. Пусть $\xi_{h_1}, \dots, \xi_{h_n}$ независимы и $h_1 + \dots + h_n = h$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \frac{\|\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}\|^j}{j!} \right) &= O(h^{k/2}), \\ \mathbb{E} \left(\frac{\|\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}\|^2}{2!} + \frac{\|\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}\|^3}{3!} + \dots \right)^2 &= O(h^2), \\ \mathbb{E} \left(\|\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}\| + \frac{\|\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}\|^2}{2!} + \dots \right)^2 &= O(h) \quad (h \rightarrow 0), \end{aligned}$$

где константы в $O(h^{k/2})$, $O(h^2)$, $O(h)$ зависят только от группы G .

ЛЕММА 9. Пусть $\varphi \in C^1(M)$, ξ_{h_1}, ξ_{h_2} — независимые случайные величины с плотностями p_{h_1}, p_{h_2} . Пусть ξ_h — случайная величина с плотностью p_h , $h = h_1 + h_2$. Тогда $|\mathbb{E}\varphi(e^{\xi_{h_1} + \xi_{h_2}}) - \mathbb{E}\varphi(e^{\xi_h})| \leq l(\varphi)O(h^{1/2})$, где

$$l(\varphi) = \max_{X \in B} \|\varphi'(X)\|, \quad \|\varphi'(X)\| = \sup_{Y \in M} \frac{|\varphi'(X)Y|}{\|Y\|},$$

B — шар в M с центром в нуле, содержащий компактную группу Ли G , и константа в $O(h^{1/2})$ зависит только от группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно,

$$|\mathbb{E}\varphi(e^{\xi_{h_1} + \xi_{h_2}}) - \mathbb{E}\varphi(e^{\xi_h})| \leq |\mathbb{E}\varphi(e^{\xi_{h_1} + \xi_{h_2}}) - \varphi(E)| + |\varphi(E) - \mathbb{E}\varphi(e^{\xi_h})|.$$

Поскольку

$$\varphi(e^{\xi_{h_1} + \xi_{h_2}}) - \varphi(E) = \varphi'(\zeta)(e^{\xi_{h_1} + \xi_{h_2}} - E),$$

где ζ — точка из отрезка $[e^{\xi_{h_1} + \xi_{h_2}}, E]$, согласно лемме 8 справедлива оценка

$$|\mathbb{E}\varphi(e^{\xi_{h_1} + \xi_{h_2}}) - \varphi(E)| \leq l(\varphi)\mathbb{E}\|e^{\xi_{h_1} + \xi_{h_2}} - E\| \leq l(\varphi)O(h^{1/2}).$$

Аналогичным образом $|\varphi(E) - \mathbb{E}\varphi(e^{\xi_h})| \leq l(\varphi)O(h^{1/2})$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть выполнены условия леммы 9, и пусть μ_1, μ_2 – случайные величины, принимающие значения в группе G , такие, что $\mu_1, \mu_2, \xi_{h_1}, \xi_{h_2}$ – независимые случайные величины и μ_1, μ_2, ξ_h – независимые случайные величины. Тогда

$$|\mathbb{E}\varphi(\mu_1 e^{\xi_{h_1}} e^{\xi_{h_2}} \mu_2) - \mathbb{E}\varphi(\mu_1 e^{\xi_h} \mu_2)| \leq l(\varphi) O(h^{1/2}),$$

где константа в $O(h^{1/2})$ зависит только от группы G .

ЛЕММА 10. Пусть случайные величины $\xi_{h_1}, \dots, \xi_{h_n}$ независимы. Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}(e^{\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}} - e^{\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_k}} e^{\xi_{h_{k+1}} + \dots + \xi_{h_n}})\| &\leq O(h^{3/2}), \\ \mathbb{E}\|e^{\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}} - e^{\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_k}} e^{\xi_{h_{k+1}} + \dots + \xi_{h_n}}\|^2 &\leq O(h^2), \quad h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

где $h = h_1 + \dots + h_n$; константы в $O(h^{3/2})$, $O(h^2)$ зависят только от группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta_1 = \xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_k}$ и $\eta_2 = \xi_{h_{k+1}} + \dots + \xi_{h_n}$. Тогда

$$\begin{aligned} e^{\eta_1 + \eta_2} - e^{\eta_1} e^{\eta_2} &= \frac{\eta_2 \eta_1 - \eta_1 \eta_2}{2} - e^{\eta_1} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(\eta_2)^i}{i!} - \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(\eta_1)^i}{i!} e^{\eta_2} \\ &\quad - \frac{(\eta_1)^2}{2!} \eta_2 - \eta_1 \frac{(\eta_2)^2}{2!} - \frac{(\eta_1)^2}{2!} \frac{(\eta_2)^2}{2!} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(\eta_1 + \eta_2)^i}{i!}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Поскольку $\mathbb{E}\eta_1 = \mathbb{E}\eta_2 = 0$ и η_1, η_2 независимы, то

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\eta_1 + \eta_2} - e^{\eta_1} e^{\eta_2}) &= -\mathbb{E}\left(e^{\eta_1} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(\eta_2)^i}{i!}\right) - \mathbb{E}\left(\sum_{i=3}^{\infty} \frac{(\eta_1)^i}{i!} e^{\eta_2}\right) \\ &\quad - \mathbb{E}\left(\frac{(\eta_1)^2}{2!} \frac{(\eta_2)^2}{2!}\right) + \mathbb{E} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(\eta_1 + \eta_2)^i}{i!}. \end{aligned}$$

Из лемм 7 и 8 следует, что

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}(e^{\eta_1 + \eta_2} - e^{\eta_1} e^{\eta_2})\| &\leq d \mathbb{E} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\|\eta_2\|^i}{i!} + d \mathbb{E} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\|\eta_1\|^i}{i!} + \mathbb{E} \frac{\|\eta_1\|^2}{2!} \mathbb{E} \frac{\|\eta_2\|^2}{2!} + \mathbb{E} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\|\eta_1 + \eta_2\|^i}{i!} \leq O(h^{3/2}). \end{aligned}$$

Здесь $d = \max_{X \in G} \|X\|$. Таким образом, первое утверждение леммы доказано. Из равенства (2.6) получаем, что

$$\begin{aligned} \|e^{\eta_1 + \eta_2} - e^{\eta_1} e^{\eta_2}\|^2 &\leq 7 \left(\left\| \frac{\eta_2 \eta_1 - \eta_1 \eta_2}{2} \right\|^2 + \left\| e^{\eta_1} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(\eta_2)^i}{i!} \right\|^2 + \left\| \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(\eta_1)^i}{i!} e^{\eta_2} \right\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{(\eta_1)^2}{2!} \eta_2 \right\|^2 + \left\| \eta_1 \frac{(\eta_2)^2}{2!} \right\|^2 + \left\| \frac{(\eta_1)^2}{2!} \frac{(\eta_2)^2}{2!} \right\|^2 + \left\| \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(\eta_1 + \eta_2)^i}{i!} \right\|^2 \right). \end{aligned}$$

Далее опять применяем леммы 7 и 8:

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E} \|e^{\eta_1 + \eta_2} - e^{\eta_1} e^{\eta_2}\|^2 \\
 & \leq 7 \left(\mathbb{E} \|\eta_1\|^2 \mathbb{E} \|\eta_2\|^2 + d^2 \mathbb{E} \left\| \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(\eta_2)^i}{i!} \right\|^2 + d^2 \mathbb{E} \left\| \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(\eta_1)^i}{i!} \right\|^2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\mathbb{E} \|\eta_1\|^4}{4} \mathbb{E} \|\eta_2\|^2 + \mathbb{E} \|\eta_1\|^2 \frac{\mathbb{E} \|\eta_2\|^4}{4} + \frac{\mathbb{E} \|\eta_1\|^4}{4} \frac{\mathbb{E} \|\eta_2\|^4}{4} + \mathbb{E} \left\| \sum_{i=3}^{\infty} \frac{(\eta_1 + \eta_2)^i}{i!} \right\|^2 \right) \\
 & \leq O(h^2) \quad (h \rightarrow 0).
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 11. Пусть $\varphi \in C^2(M)$, $\xi_{h_1}, \dots, \xi_{h_n}$ — независимые случайные величины с плотностями $p_{h_1}, \dots, p_{h_n}$. Тогда

$$|\mathbb{E} \varphi(e^{\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_k}} e^{\xi_{h_{k+1}} + \dots + \xi_{h_n}}) - \mathbb{E} \varphi(e^{\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}})| \leq m(\varphi) O(h^{3/2}) \quad (h \rightarrow 0),$$

где

$$\begin{aligned}
 m(\varphi) &= \max_{X \in B} \{ \|\varphi'(X)\|, \|\varphi''(X)\| \}, \\
 \|\varphi'(X)\| &= \max_{Y \in M} \frac{|\varphi'(X)Y|}{\|Y\|}, \quad \|\varphi''(X)\| = \max_{Y, Z \in M} \frac{|\varphi''(X)(Y, Z)|}{\|Y\| \|Z\|},
 \end{aligned}$$

$h = h_1 + \dots + h_n$, B — шар в M с центром в нуле, содержащий G , константа в $O(h^{3/2})$ зависит только от группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta_1 = \xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_k}$ и $\eta_2 = \xi_{h_{k+1}} + \dots + \xi_{h_n}$. По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\begin{aligned}
 \varphi(e^{\eta_1} e^{\eta_2}) - \varphi(e^{\eta_1 + \eta_2}) &= \varphi'(e^{\eta_1 + \eta_2})(e^{\eta_1} e^{\eta_2} - e^{\eta_1 + \eta_2}) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \varphi''(\zeta)(e^{\eta_1} e^{\eta_2} - e^{\eta_1 + \eta_2}, e^{\eta_1} e^{\eta_2} - e^{\eta_1 + \eta_2}),
 \end{aligned}$$

где ζ — точка, лежащая на отрезке $[e^{\eta_1} e^{\eta_2}, e^{\eta_1 + \eta_2}]$. Тогда

$$\begin{aligned}
 |\mathbb{E} \varphi(e^{\eta_1} e^{\eta_2}) - \mathbb{E} \varphi(e^{\eta_1 + \eta_2})| &\leq |\varphi'(E) \mathbb{E}(e^{\eta_1} e^{\eta_2} - e^{\eta_1 + \eta_2})| \\
 &\quad + |\mathbb{E}((\varphi'(e^{\eta_1 + \eta_2}) - \varphi'(E))(e^{\eta_1} e^{\eta_2} - e^{\eta_1 + \eta_2}))| + \frac{1}{2} m(\varphi) \mathbb{E} \|e^{\eta_1} e^{\eta_2} - e^{\eta_1 + \eta_2}\|^2.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Будем оценивать каждое слагаемое в предыдущем неравенстве. По лемме 10

$$|\varphi'(E) \mathbb{E}(e^{\eta_1} e^{\eta_2} - e^{\eta_1 + \eta_2})| \leq m(\varphi) \|\mathbb{E}(e^{\eta_1} e^{\eta_2} - e^{\eta_1 + \eta_2})\| = m(\varphi) O(h^{3/2}). \tag{2.8}$$

По формуле Лагранжа

$$(\varphi'(e^{\eta_1 + \eta_2}) - \varphi'(E))(e^{\eta_1} e^{\eta_2} - e^{\eta_1 + \eta_2}) = \varphi''(\theta)(e^{\eta_1 + \eta_2} - E, e^{\eta_1} e^{\eta_2} - e^{\eta_1 + \eta_2}),$$

где θ – точка, лежащая на отрезке $[e^{\eta_1+\eta_2}, E]$; следовательно,

$$\mathbf{E}|(\varphi'(e^{\eta_1+\eta_2}) - \varphi'(E))(e^{\eta_1}e^{\eta_2} - e^{\eta_1+\eta_2})| \leq m(\varphi)\mathbf{E}(\|e^{\eta_1+\eta_2} - E\| \|e^{\eta_1}e^{\eta_2} - e^{\eta_1+\eta_2}\|).$$

Согласно неравенству Коши–Буняковского и леммам 8 и 10

$$\begin{aligned} m(\varphi)\mathbf{E}(\|e^{\eta_1+\eta_2} - E\| \|e^{\eta_1}e^{\eta_2} - e^{\eta_1+\eta_2}\|) \\ \leq m(\varphi)(\mathbf{E}\|e^{\eta_1+\eta_2} - E\|^2)^{1/2}(\mathbf{E}\|e^{\eta_1}e^{\eta_2} - e^{\eta_1+\eta_2}\|^2)^{1/2} \leq m(\varphi)O(h^{3/2}). \end{aligned} \quad (2.9)$$

По лемме 10

$$\mathbf{E}\|e^{\eta_1}e^{\eta_2} - e^{\eta_1+\eta_2}\|^2 \leq O(h^2). \quad (2.10)$$

Подставляя в (2.7) оценки (2.8)–(2.10), получаем утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть выполнены условия леммы 11, и пусть μ_1, μ_2 – случайные величины, принимающие значения в группе G , такие, что $\mu_1, \mu_2, \xi_{h_1}, \dots, \xi_{h_n}$ – независимые случайные величины. Тогда

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}\varphi(\mu_1 e^{\xi_{h_1}+\dots+\xi_{h_k}} e^{\xi_{h_{k+1}+\dots+\xi_{h_{k+l}}} e^{\xi_{h_{k+l+1}+\dots+\xi_{h_n}}} \mu_2) - \mathbf{E}\varphi(\mu_1 e^{\xi_{h_1}+\dots+\xi_{h_n}} \mu_2)| \\ \leq m(\varphi)O(h^{3/2}), \end{aligned}$$

где константа в $O(h^{3/2})$ зависит только от группы G .

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi \in C^2(M)$, $\xi_{h_1}, \dots, \xi_{h_n}$ – независимые случайные величины с плотностями $p_{h_1}, \dots, p_{h_n}$. Тогда

$$|\mathbf{E}\varphi(e^{\xi_{h_1}} \dots e^{\xi_{h_n}}) - \mathbf{E}\varphi(e^{\xi_{h_1}+\dots+\xi_{h_n}})| \leq m(\varphi)O(h^{3/2}),$$

где $h = h_1 + \dots + h_n$, $m(\varphi)$ определено в лемме 11, B – шар в M с центром в нуле, содержащий G , константа в $O(h^{3/2})$ зависит только от группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t_0 = 0, t_1 = h_1, t_2 = h_1 + h_2, \dots, t_n = h$. Для произвольных $q \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}, l \leq 2^q$, введем следующие обозначения:

$$\xi_l^q \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{h_{i+1}} + \xi_{h_{i+2}} + \dots + \xi_{h_{i+j-1}}, \quad \tilde{\xi}_l^q \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \xi_{h_{i+j}}, & t_{i+j-1} < \frac{lh}{2^q} \text{ и } j > 0, \\ 0, & t_{i+j-1} = \frac{lh}{2^q} \text{ или } j = 0, \end{cases}$$

где $t_{i-1} < (l-1)h/2^q, t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+j-1} \in [(l-1)h/2^q, lh/2^q], t_{i+j} > lh/2^q$. Заметим, что

$$\xi_l^{q-1} = \begin{cases} \xi_{2l-1}^q, & t_i \notin \left[\frac{(2l-1)h}{2^q}, \frac{lh}{2^{q-1}} \right], i = 0, \dots, n, \\ \xi_{2l-1}^q + \tilde{\xi}_{2l-1}^q + \xi_{2l}^q, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\tilde{\xi}_l^{q-1} = \begin{cases} \tilde{\xi}_{2l-1}^q, & t_i \notin \left[\frac{(2l-1)h}{2^q}, \frac{lh}{2^{q-1}} \right], i = 0, \dots, n, \\ \tilde{\xi}_{2l}^q, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\xi_1^q + \tilde{\xi}_1^q + \dots + \xi_{2^q-1}^q + \tilde{\xi}_{2^q-1}^q + \xi_{2^q}^q = \xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}. \quad (2.13)$$

Учитывая (2.11)–(2.13) и следствие 4, получаем

$$\begin{aligned}
 & |\mathbb{E}\varphi(e^{\xi_1^q} e^{\tilde{\xi}_1^q} e^{\xi_2^q} e^{\tilde{\xi}_2^q} \dots e^{\xi_{2l-1}^q} e^{\tilde{\xi}_{2l-1}^q} e^{\xi_{2l}^q} e^{\tilde{\xi}_{2l}^q} \dots e^{\xi_{2q-1}^q} e^{\tilde{\xi}_{2q-1}^q} e^{\xi_{2q}^q}) \\
 & \quad - \mathbb{E}\varphi(e^{\xi_1^{q-1}} e^{\tilde{\xi}_1^{q-1}} \dots e^{\xi_l^{q-1}} e^{\tilde{\xi}_l^{q-1}} \dots e^{\xi_{2q-1}^{q-1}} e^{\tilde{\xi}_{2q-1}^{q-1}})| \\
 & \leq |\mathbb{E}\varphi(e^{\xi_1^q} e^{\tilde{\xi}_1^q} e^{\xi_2^q} e^{\tilde{\xi}_2^q} \dots e^{\xi_{2l-1}^q} e^{\tilde{\xi}_{2l-1}^q} e^{\xi_{2l}^q} e^{\tilde{\xi}_{2l}^q} \dots e^{\xi_{2q-1}^q} e^{\tilde{\xi}_{2q-1}^q} e^{\xi_{2q}^q}) \\
 & \quad - \mathbb{E}\varphi(e^{\xi_1^{q-1}} e^{\tilde{\xi}_1^{q-1}} \dots e^{\xi_{2l-1}^{q-1}} e^{\tilde{\xi}_{2l-1}^{q-1}} e^{\xi_{2l}^{q-1}} e^{\tilde{\xi}_{2l}^{q-1}} \dots e^{\xi_{2q-1}^{q-1}} e^{\tilde{\xi}_{2q-1}^{q-1}} e^{\xi_{2q}^{q-1}})| \\
 & \quad + |\mathbb{E}\varphi(e^{\xi_1^{q-1}} e^{\tilde{\xi}_1^{q-1}} \dots e^{\xi_l^{q-1}} e^{\tilde{\xi}_l^{q-1}} \dots e^{\xi_{2q-1}^{q-1}} e^{\tilde{\xi}_{2q-1}^{q-1}} e^{\xi_{2q}^{q-1}}) \\
 & \quad - \mathbb{E}\varphi(e^{\xi_1^{q-1}} e^{\tilde{\xi}_1^{q-1}} \dots e^{\xi_l^{q-1}} e^{\tilde{\xi}_l^{q-1}} \dots e^{\xi_{2q-1}^{q-1}} e^{\tilde{\xi}_{2q-1}^{q-1}})| \\
 & = 2^q O\left(\left(\frac{h}{2^{q-1}}\right)^{3/2}\right). \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

Заметим, что $e^{\xi_1^q} e^{\tilde{\xi}_1^q} \dots e^{\xi_{2q-1}^q} e^{\tilde{\xi}_{2q-1}^q} e^{\xi_{2q}^q} = e^{\xi_{h_1}} \dots e^{\xi_{h_n}}$ для достаточно большого q . Поэтому, учитывая (2.14), получаем

$$\begin{aligned}
 & |\mathbb{E}\varphi(e^{\xi_{h_1}} \dots e^{\xi_{h_n}}) - \mathbb{E}\varphi(e^{\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}})| \\
 & \leq |\mathbb{E}\varphi(e^{\xi_1^q} e^{\tilde{\xi}_1^q} \dots e^{\xi_{2q}^q}) - \mathbb{E}\varphi(e^{\xi_1^{q-1}} e^{\tilde{\xi}_1^{q-1}} \dots e^{\xi_{2q-1}^{q-1}})| + \dots \\
 & \quad + |\mathbb{E}\varphi(e^{\xi_1^1} e^{\tilde{\xi}_1^1} e^{\xi_2^1}) - \mathbb{E}\varphi(e^{\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}})| \\
 & \leq \sum_{s=0}^q 2^s O\left(\left(\frac{h}{2^{s-1}}\right)^{3/2}\right) \leq O(h^{3/2}) \sum_{s=0}^{\infty} 2^{(3-s)/2} = O(h^{3/2}).
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

В дальнейшем нам потребуется следующее небольшое усиление теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть выполнены условия теоремы 2, и пусть μ_1, μ_2 – случайные величины, принимающие значения в группе G , такие, что случайные величины $\mu_1, \mu_2, \xi_{h_1}, \dots, \xi_{h_n}$ – независимы. Тогда

$$|\mathbb{E}\varphi(\mu_1 e^{\xi_{h_1}} \dots e^{\xi_{h_n}} \mu_2) - \mathbb{E}\varphi(\mu_1 e^{\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_n}} \mu_2)| = m(\varphi) O(h^{3/2});$$

константа в $O(h^{3/2})$ зависит только от группы G .

3. Основные результаты. Пусть $T = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ – разбиение отрезка $[0, t]$. Определим оператор $A_t^T: C(G) \rightarrow C(G)$ следующим соотношением:

$$(A_t^T \varphi)(X) = \mathbb{E}\varphi(e^{\xi_{h_1}} \dots e^{\xi_{h_n}} X),$$

где $h_1 = t_1 - t_0, \dots, h_n = t_n - t_{n-1}$ – длины отрезков разбиения T .

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно следствию 1

$$\begin{aligned}
 (A_t^T \varphi)(X) &= \int_G \dots \int_G \varphi(YX) p(Y, Y_1, t_1) \\
 &\quad \times p(Y_1, Y_2, t_2 - t_1) \dots p(Y_{n-1}, E, t_n - t_{n-1}) dY_1 \dots dY_{n-1}.
 \end{aligned}$$

Из определения оператора A_t^T непосредственно следует

ЛЕММА 12. Пусть T – произвольное разбиение отрезка $[0, t]$ и $\varphi \in C(G)$. Тогда $\|A_t^T\| = 1$. Кроме того, если $Y \in G$ таково, что $|\varphi(XY) - \varphi(X)| \leq \varepsilon$ для всех $X \in G$, то $|(A_t^T \varphi)(XY) - (A_t^T \varphi)(X)| \leq \varepsilon$ для всех $X \in G$.

ЛЕММА 13. Пусть имеется последовательность разбиений $\{\tilde{T}_n\}$ отрезка $[0, t]$ с диаметрами разбиений $\Delta \tilde{T}_n \rightarrow 0$. Тогда из последовательности $\{\tilde{T}_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{T_n\}$ так, чтобы для произвольной функции $\varphi \in C(G)$ последовательность $\{A_t^{T_n} \varphi\}$ была фундаментальной в $C(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $\varphi \in C(G)$ по лемме 12 и теореме Арцела–Асколи из последовательности $A_t^{T_n} \varphi$ можно выделить фундаментальную в $C(G)$ подпоследовательность. С помощью диагональной процедуры можно выбрать подпоследовательность T_n последовательности $\{\tilde{T}_n\}$ такую, что последовательность $\{A_t^{T_n} \varphi\}$ фундаментальна в $C(G)$ для всех φ из некоторого счетного плотного в $C(G)$ множества. В силу равностепенной непрерывности семейства операторов $\{A_t^{T_n} : n \in \mathbb{N}\}$ ($\|A_t^{T_n}\| = 1$) последовательность $\{A_t^{T_n} \varphi\}$ фундаментальна в $C(G)$ для любой $\varphi \in C(G)$. Лемма доказана.

Возьмем последовательность разбиений $\{kt/2^n : k = 0, \dots, 2^n\}$ отрезка $[0, t]$. Согласно лемме 13 из нее можно выделить подпоследовательность разбиений T_n так, чтобы для любой функции $\varphi \in C(G)$ последовательность $\{A_t^{T_n} \varphi\}$ была фундаментальной в $C(G)$. Следовательно, существует линейный оператор $A_t : C(G) \rightarrow C(G)$ такой, что для любой функции $\varphi \in C(G)$ последовательность $\{A_t^{T_n} \varphi\}$ сходится к $A_t \varphi$ в пространстве $C(G)$. В силу леммы 12 $\|A_t\| \leq 1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\varphi \in C(G)$. Тогда

$$(A_t \varphi)(X) = \lim_{\substack{\max h_i \rightarrow 0 \\ h_1 + \dots + h_n = t}} \int_G \dots \int_G \varphi(X_1) p(X_1, X_2, h_1) \times p(X_2, X_3, h_2) \dots p(X_n, X, h_n) dX_1 \dots dX_n. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем эту формулу для $\varphi \in C^2(B)$, где B – шар в M с центром в нуле, содержащий G . Фиксируем $\varepsilon > 0$ и докажем, что можно выбрать $\delta > 0$ так, чтобы $|(A_t \varphi)(X) - (A_t^T \varphi)(X)| \leq \varepsilon$ для любого разбиения T с диаметром ΔT меньшим δ . Выберем $K_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы для любого $k \geq K_0$

$$\|(A_t^{T_k} \varphi) - (A_t \varphi)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.2)$$

Пусть $K \geq K_0$, L – число отрезков разбиения T_K . Для произвольного разбиения T отрезка $[0, t]$ с $\Delta T < h/L$ обозначим $\tilde{T} = T \cup T_K$. Пусть $h_1, \dots, h_s$ – отрезки разбиения $\tilde{T}$; тогда $h_1, \dots, h_{i_1} + h_{i_1+1}, \dots, h_{i_{L-1}} + h_{i_{L-1}+1}, \dots, h_s$ – отрезки разбиения T_0 . Для следующей оценки фиксируем разбиение T_k , $k > K$. Очевидно,

$$\|(A_t \varphi) - (A_t^T \varphi)\| \leq \|(A_t \varphi) - (A_t^{T_k} \varphi)\| + \|(A_t^{T_k} \varphi) - (A_t^{\tilde{T}} \varphi)\| + \|(A_t^{\tilde{T}} \varphi) - (A_t^T \varphi)\|. \quad (3.3)$$

По следствию 3

$$\begin{aligned}
 & \| (A_t^{\tilde{T}} \varphi) - (A_t^T \varphi) \| \\
 & \leq \| \mathbb{E} \varphi(e^{\xi_{h_1}} \dots e^{\xi_{h_s}} X) - \mathbb{E} \varphi(e^{\xi_{h_1}} \dots e^{\xi_{h_{i_1}+h_{i_1}+1}} \dots e^{\xi_{h_{i_{L-1}}}} e^{\xi_{h_{i_{L-1}+1}}} \dots e^{\xi_{h_s}} X) \| + \dots \\
 & + \| \mathbb{E} \varphi(e^{\xi_{h_1}} \dots e^{\xi_{h_{i_1}+h_{i_1}+1}} \dots e^{\xi_{h_{i_{L-1}}}} e^{\xi_{h_{i_{L-1}+1}}} \dots e^{\xi_{h_s}} X) \\
 & - \mathbb{E} \varphi(e^{\xi_{h_1}} \dots e^{\xi_{h_{i_1}+h_{i_1}+1}} \dots e^{\xi_{h_{i_{L-1}}+h_{i_{L-1}+1}}} \dots e^{\xi_{h_s}} X) \| \\
 & \leq l(\varphi) O(\sqrt{\Delta T})(L-1).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Пусть nL – число отрезков разбиения T_k . Заметим, что

$$\begin{aligned}
 & \| (A_t^{T_k} \varphi) - (A_t^{\tilde{T}} \varphi) \| \\
 & = \| \mathbb{E} \varphi((e^{\xi_1^1} \dots e^{\xi_n^1}) \dots (e^{\xi_1^L} \dots e^{\xi_n^L}) X) - \mathbb{E} \varphi((e^{\xi_{h_1}} \dots e^{\xi_{h_{j_1}}}) \dots (e^{\xi_{h_{j_{n-1}+1}}} \dots e^{\xi_{h_s}}) X) \| \\
 & \leq \| \mathbb{E} \varphi((e^{\xi_1^1} \dots e^{\xi_n^1}) \dots (e^{\xi_1^L} \dots e^{\xi_n^L}) X) - \mathbb{E} \varphi((e^{\xi_1^1+\dots+\xi_n^1}) \dots (e^{\xi_1^L+\dots+\xi_n^L}) X) \| \\
 & \leq \| \mathbb{E} \varphi((e^{\xi_1^1+\dots+\xi_n^1}) \dots (e^{\xi_1^L+\dots+\xi_n^L}) X) - \mathbb{E} \varphi(e^{\xi_r^1} \dots e^{\xi_r^L} X) \| \\
 & + \| \mathbb{E} \varphi(e^{\xi_r^1} \dots e^{\xi_r^L} X) - \mathbb{E} \varphi((e^{\xi_{h_1}+\dots+\xi_{h_{j_1}}}) \dots (e^{\xi_{h_{j_{n-1}+1}+\dots+\xi_{h_s}}}) X) \| \\
 & + \| \mathbb{E} \varphi((e^{\xi_{h_1}+\dots+\xi_{h_{j_1}}}) \dots (e^{\xi_{h_{j_{n-1}+1}+\dots+\xi_{h_s}}}) X) \\
 & - \mathbb{E} \varphi((e^{\xi_{h_1}} \dots e^{\xi_{h_{j_1}}}) \dots (e^{\xi_{h_{j_{n-1}+1}}} \dots e^{\xi_{h_s}}) X) \|.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

В предыдущем выражении $h_1 + \dots + h_{j_1} = t/L$, $h_{j_1+1} + \dots + h_{j_2} = t/L, \dots, h_{j_{n-1}+1} + \dots + h_s = t/L$, ξ_i^j – независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в $T_E G$, имеющие там плотность $p_h(X)$, $h = t/(Ln)$, $\zeta_r^1, \dots, \zeta_r^L$ – независимые одинаково распределенные гауссовские случайные величины с матрицей ковариаций $r E_m$. По следствию 5

$$\begin{aligned}
 & \| \mathbb{E} \varphi((e^{\xi_1^1} \dots e^{\xi_n^1}) \dots (e^{\xi_1^L} \dots e^{\xi_n^L}) X) - \mathbb{E} \varphi((e^{\xi_1^1+\dots+\xi_n^1}) \dots (e^{\xi_1^L+\dots+\xi_n^L}) X) \| \\
 & \leq \| \mathbb{E} \varphi((e^{\xi_1^1} \dots e^{\xi_n^1}) \dots (e^{\xi_1^L} \dots e^{\xi_n^L}) X) - \mathbb{E} \varphi(e^{\xi_1^1+\dots+\xi_n^1} \dots (e^{\xi_1^L} \dots e^{\xi_n^L}) X) \| + \dots \\
 & + \| \mathbb{E} \varphi(e^{\xi_1^1+\dots+\xi_n^1} \dots (e^{\xi_1^L} \dots e^{\xi_n^L}) X) - \mathbb{E} \varphi(e^{\xi_1^1+\dots+\xi_n^1} \dots e^{\xi_1^L+\dots+\xi_n^L} X) \| \\
 & \leq m(\varphi) O\left(\left(\frac{t}{L}\right)^{3/2}\right) L \quad \left(\frac{t}{L} \rightarrow 0\right)
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

и аналогично

$$\begin{aligned}
 & \| \mathbb{E} \varphi((e^{\xi_{h_1}+\dots+\xi_{h_{j_1}}}) \dots (e^{\xi_{h_{j_{n-1}+1}+\dots+\xi_{h_s}}}) X) \\
 & - \mathbb{E} \varphi((e^{\xi_{h_1}} \dots e^{\xi_{h_{j_1}}}) \dots (e^{\xi_{h_{j_{n-1}+1}}} \dots e^{\xi_{h_s}}) X) \| \\
 & \leq m(\varphi) O\left(\left(\frac{t}{L}\right)^{3/2}\right) L \quad \left(\frac{t}{L} \rightarrow 0\right).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Далее по следствию 2

$$\begin{aligned}
 & \left\| \mathbb{E}\varphi((e^{\xi_1^1+\dots+\xi_n^1}) \dots (e^{\xi_1^L+\dots+\xi_n^L})X) - \mathbb{E}\varphi(e^{\zeta_r^1} \dots e^{\zeta_r^L} X) \right\| \\
 & \leq \left| \mathbb{E}\varphi(e^{\xi_1^1+\dots+\xi_n^1} \dots e^{\xi_1^L+\dots+\xi_n^L} X) - \mathbb{E}\varphi(e^{\zeta_r^1} \dots e^{\xi_1^L+\dots+\xi_n^L} X) \right| + \dots \\
 & \quad + \left| \mathbb{E}\varphi(e^{\zeta_r^1} \dots e^{\xi_1^L+\dots+\xi_n^L} X) - \mathbb{E}\varphi(e^{\zeta_r^1} \dots e^{\zeta_r^L} X) \right| \\
 & = o(1)L \quad \left(\frac{t}{Ln} \rightarrow 0 \right). \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Аналогично предыдущей оценке

$$\left\| \mathbb{E}\varphi(e^{\zeta_r^1} \dots e^{\zeta_r^L} X) - \mathbb{E}\varphi((e^{\xi_{h_1}+\dots+\xi_{h_{j_1}}}) \dots (e^{\xi_{h_{j_{n-1}+1}+\dots+\xi_{h_s}}})X) \right\| = o(1)L \quad (\Delta T \rightarrow 0). \tag{3.9}$$

Учитывая (3.6) и (3.7), выберем $K \geq K_0$ так, чтобы

$$\left\| \mathbb{E}\varphi((e^{\xi_1^1} \dots e^{\xi_n^1}) \dots (e^{\xi_1^L} \dots e^{\xi_n^L})X) - \mathbb{E}\varphi((e^{\xi_1^1+\dots+\xi_n^1}) \dots (e^{\xi_1^L+\dots+\xi_n^L})X) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{12}, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\| \mathbb{E}\varphi((e^{\xi_{h_1}+\dots+\xi_{h_{j_1}}}) \dots (e^{\xi_{h_{j_{n-1}+1}+\dots+\xi_{h_s}}})X) \right. \\
 & \quad \left. - \mathbb{E}\varphi((e^{\xi_{h_1}} \dots e^{\xi_{h_{j_1}}}) \dots (e^{\xi_{h_{j_{n-1}+1}} \dots e^{\xi_{h_s}}})X) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{12}. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

В соответствии с (3.8) выберем $k > K$ так, чтобы

$$\left\| \mathbb{E}\varphi((e^{\xi_1^1+\dots+\xi_n^1}) \dots (e^{\xi_1^L+\dots+\xi_n^L})X) - \mathbb{E}\varphi(e^{\zeta_r^1} \dots e^{\zeta_r^L} X) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{12}. \tag{3.12}$$

Тогда по (3.4) и (3.9) существует $\delta > 0$ такое, что для произвольного разбиения T отрезка $[0, t]$ с $\Delta T < \delta$

$$\|(A_t^{\bar{T}} \varphi) - (A_t^T \varphi)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.13}$$

$$\left\| \mathbb{E}\varphi(e^{\zeta_r^1} \dots e^{\zeta_r^L} X) - \mathbb{E}\varphi((e^{\xi_{h_1}+\dots+\xi_{h_{j_1}}}) \dots (e^{\xi_{h_{j_{n-1}+1}+\dots+\xi_{h_s}}})X) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{12}. \tag{3.14}$$

Учитывая (3.5), (3.10)–(3.12) и (3.14), получаем, что

$$\|(A_t^{T_k} \varphi) - (A_t^{\bar{T}} \varphi)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.15}$$

Из (3.3), (3.2), (3.13) и (3.15) следует утверждение теоремы для $\varphi \in C^2(B)$. Следует отметить, что любая функция из $C^2(G)$ продолжается до функции из $C^2(B)$ (см. [14, гл. 6]); следовательно, теорема верна для всех $\varphi \in C^2(G)$. Для произвольной $\varphi \in C(G)$ фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\psi \in C^2(G)$ так, чтобы $\|\psi - \varphi\|_{C(G)} \leq \varepsilon/3$. Возьмем теперь $\delta > 0$ так, чтобы $\|A_t \varphi - A_t^T \varphi\| \leq \varepsilon/3$ для любого разбиения T отрезка $[0, t]$ с $\Delta T \leq \delta$. Тогда $\|A_t \varphi - A_t^T \varphi\| \leq \|A_t \varphi - A_t \psi\| + \|A_t \psi - A_t^T \psi\| + \|A_t^T \psi - A_t^T \varphi\| \leq \varepsilon$ при $\Delta T \leq \delta$. Теорема доказана.

Из формулы (3.1) следует, что $A_t A_s = A_{t+s}$, т.е. операторы $A_t : C(G) \rightarrow C(G)$ образуют полугруппу. Напомним, что $\|A_t\| \leq 1$; значит, полугруппа $\{A_t\}$ сжимающая. Пусть P – инфинитезимальный оператор полугруппы $\{A_t\}$.

ТЕОРЕМА 4. *Сжимающая полугруппа $\{A_t\}$ сильно непрерывна на пространстве $C(G)$. Область определения D_P оператора P содержит $C^2(G)$, причем $P\varphi = \frac{1}{2}\Delta\varphi$ при $\varphi \in C^2(G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала второе утверждение теоремы. Возьмем произвольную функцию $\varphi \in C^2(G)$. Как уже было сказано, φ можно продолжить до функции из $C^2(B)$, где B – шар в M , содержащий G , поэтому мы можем считать, что $\varphi \in C^2(B)$. Фиксируем произвольное $h > 0$. Применяя теорему 2 и следствие 2, выберем $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения T отрезка $[0, h]$ с $\Delta T < \delta$ и для любого $X \in G$

$$|\mathbb{E}\varphi(e^{\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_s}} X) - \mathbb{E}\varphi(e^{\xi_h} X)| < h^{3/2}, \quad |(A_h^T \varphi)(X) - (A_h \varphi)(X)| < h^{3/2}, \quad (3.16)$$

где $h_1 + \dots + h_s = h$, $h_1, \dots, h_s$ – отрезки разбиения T , ξ_h – гауссовская случайная величина с матрицей ковариаций hE_m . Согласно теореме 1

$$|(A_h^T \varphi)(X) - \mathbb{E}\varphi(e^{\xi_{h_1} + \dots + \xi_{h_s}} X)| \leq m(\varphi)O(h^{3/2}). \quad (3.17)$$

Таким образом, учитывая (3.16), (3.17) и равенство $A_0\varphi = \varphi$, имеем

$$(P\varphi)(X) = \frac{(A_h \varphi)(X) - (A_0 \varphi)(X)}{h} = \frac{1}{h}(\mathbb{E}\varphi(e^{\xi_h} X) - \varphi(X)) + O(h^{1/2}),$$

$$\mathbb{E}\varphi(e^{\xi_h} X) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi h})^m} \int_{T_E G} \varphi(e^Y X) e^{-\|Y\|^2/(2h)} dY.$$

В силу известного свойства интеграла Пуассона в $\mathbb{R}^m$

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi h})^m} \int_{\mathbb{R}^m} \psi(Y) e^{-\|Y\|^2/(2h)} dY - \psi(0) \right) = \frac{1}{2} \Delta \psi(0) + o(1) \quad (h \rightarrow 0).$$

Положим $\psi(Y) = \varphi(e^Y X)$, $Y \in T_E G$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{(A_h \varphi)(X) - (A_0 \varphi)(X)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(\sqrt{2\pi h})^m} \int_{\mathbb{R}^m} \psi(Y) e^{-\|Y\|^2/(2h)} dY - \psi(0) \right) + O(h^{1/2}) \\ &= \frac{1}{2} \Delta \psi(0) + o(1) \quad (h \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (3.18)$$

По предложениям 2 и 1

$$\Delta \psi(0) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \psi}{(\partial Y_i)^2} = \sum_{i=1}^m \frac{d^2}{dt^2} \psi(Y_i t) = \sum_{i=1}^m \frac{d^2}{dt^2} \varphi(e^{Y_i t} X) = \Delta \varphi(X), \quad (3.19)$$

где Y_i – ортонормированный базис в $T_E G$. По (3.18) и (3.19) $(P\varphi)(X) = \frac{1}{2}(\Delta\varphi)(X)$.

Для доказательства первого утверждения теоремы достаточно заметить, что на функциях $\varphi \in D_P$ полугруппа A_t сильно непрерывна, а нами уже доказано, что D_P содержит $C^2(G)$ – плотное подпространство в $C(G)$. Известно (см., например, [14, гл. 10]), что подпространство, на котором сжимающая полугруппа сильно непрерывна, замкнуто; следовательно, в нашем случае оно совпадает с $C(G)$. Теорема доказана.

Чтобы доказать формулу для решения уравнения теплопроводности, нам осталось проверить, что $A_t\varphi \in C^2(G)$ для всех $\varphi \in C^2(G)$ и $t > 0$.

ЛЕММА 14. 1. Пусть $\varphi \in C^n(G)$. Тогда $A_t\varphi \in C^n(G)$. 2. Если $W(X)$ – левоинвариантное векторное поле на группе G , т.е. $W(X) = XW(E)$, $W(E) \in T_E G$, то $\nabla_W(A_t\varphi) = A_t(\nabla_W\varphi)$ для любой функции $\varphi \in C^1(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем, что для любого разбиения T отрезка $[0, t]$ дифференцирование вдоль левоинвариантного векторного поля $W(X)$ и оператор A_t^T коммутируют, т.е. $\nabla_W(A_t^T\varphi) = A_t^T(\nabla_W\varphi)$ для любой функции $\varphi \in C^1(G)$.

Заметим, что

$$\int_G \nabla_W f(X) dX = \lim_{t \rightarrow 0} \int_G \frac{1}{t} (f(Xe^{Wt}) - f(X)) dX = 0$$

для левоинвариантного векторного поля W ; следовательно, справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_G g(X) \nabla_W f(X) dX = - \int_G f(X) \nabla_W g(X) dX. \quad (3.20)$$

Теперь заметим, что производные по X и по Y вдоль W от функции $p(X, Y, h)$ связаны соотношением

$$\begin{aligned} \nabla_{W(X)} p(X, Y, h) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} p(Xe^{Wt}, Y, h) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} p(X, Ye^{-Wt}, h) \\ &= -\nabla_{W(Y)} p(X, Y, h). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Пользуясь (3.20) и (3.21), получаем следующее:

$$\begin{aligned} \nabla_{W(X)} (A_t^T \varphi)(X) &= \nabla_{W(X)} \int_G \cdots \int_G \varphi(X_1) p(X_1, X_2, h_1) \cdots p(X_k, X, h_k) dX_1 \cdots dX_k \\ &= - \int_G \cdots \int_G \varphi(X_1) p(X_1, X_2, h_1) \cdots \nabla_{W(X_k)} p(X_k, X, h_k) dX_1 \cdots dX_k = \cdots \\ &= - \int_G \cdots \int_G \varphi(X_1) \nabla_{W(X_1)} p(X_1, X_2, h_1) \cdots p(X_k, X, h_k) dX_1 \cdots dX_k \\ &= \int_G \cdots \int_G \nabla_{W(X_1)} (\varphi(X_1)) p(X_1, X_2, h_1) \cdots p(X_k, X, h_k) dX_1 \cdots dX_k \\ &= A_t^T (\nabla_W \varphi)(X), \quad \varphi \in C^1(G). \end{aligned}$$

Далее возьмем последовательность разбиений T_n отрезка $[0, t]$ таких, что $\Delta T_n \rightarrow 0$. Тогда $(A_t^{T_n} \varphi)(X) \xrightarrow{X} (A_t \varphi)(X)$ ($n \rightarrow \infty$) и

$$(\nabla_W (A_t^{T_n} \varphi))(X) = (A_t^{T_n} (\nabla_W \varphi))(X) \xrightarrow{X} (A_t (\nabla_W \varphi))(X) \quad (n \rightarrow \infty);$$

следовательно, функция $A_t \varphi$ дифференцируема вдоль векторного поля W и $\nabla_W (A_t \varphi) = A_t (\nabla_W \varphi)$. Таким образом, мы доказали второе утверждение леммы.

Фиксируем теперь ортонормированный базис $E_1, \dots, E_m$ в пространстве $T_E G$. Левоинвариантные векторные поля $W_i(X) = X E_i$ образуют ортонормированный базис в

каждой точке $X \in G$. Произвольное гладкое векторное поле $V(X)$, $X \in G$, можно разложить по базису: $V(X) = a_1(X)W_1(X) + \dots + a_m(X)W_m(X)$, где $a_i(X) = (V(X), W_i(X))$ – гладкие функции. В таком случае

$$\begin{aligned} (\nabla_V(A_t^{T_n}\varphi))(X) &= \sum_{i=1}^m a_i(X) (\nabla_{W_i}(A_t^{T_n}\varphi))(X) = \sum_{i=1}^m a_i(X) (A_t^{T_n}(\nabla_{W_i}\varphi))(X) \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^m a_i(X) (A_t(\nabla_{W_i}\varphi))(X) \quad (n \rightarrow \infty); \end{aligned}$$

следовательно, функция $A_t\varphi$ дифференцируема вдоль векторного поля V и

$$\nabla_V(A_t\varphi) = \sum_{i=1}^m a_i A_t(\nabla_{W_i}\varphi).$$

Значит, $A_t C^n(G) \subseteq C^n(G)$. Лемма доказана.

Если $\varphi(X) \in C^2(G)$, то $(A_t\varphi)(X)$ дважды дифференцируема по X для всякого t . Из теоремы 4 вытекает, что для любого $t \geq 0$ $(A_t\varphi)(X)$ дифференцируема по t и

$$\frac{\partial A_t\varphi}{\partial t} = P(A_t\varphi) = \frac{1}{2}\Delta\varphi.$$

Доказательство основного результата этой работы завершено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ёсида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
- [2] Хейер Х. Вероятностные меры на локально компактных группах. М.: Мир, 1981.
- [3] Malliavin M., Malliavin P. Integration on loop groups. Quasi-invariant measures // JFA. 1990. V. 93. P. 207–237.
- [4] Malliavin M., Malliavin P. Integration on loop groups. Asymptotic Peter–Weyl orthogonality // JFA. 1992. V. 108. P. 13–46.
- [5] Leandre R. Integration by parts formulas and rotationally invariant Sobolev calculus on free loop spaces // J. Geom. Phys. 1993. № 11. P. 517–528.
- [6] Airault H., Malliavin P. Integration on loop groups. Heat equation for the Wiener measure // JFA. 1992. V. 104. P. 71–109.
- [7] Albeverio S., Hoegh-Krohn R. The energy representation of a Sobolev Lie Group // Compositio Math. 1978. V. 36. P. 37–52.
- [8] Барут А., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. М.: Мир, 1980.
- [9] Feynmann R. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics // Rev. Mod. Phys. 1948. V. 20. P. 367.
- [10] Nelson E. Feynmann integrals and the Schrödinger equations // J. Math. Phys. 1964. V. 5. P. 332.
- [11] Смолянов О. Г. Гладкие меры на группах петель // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 4. С. 455–458.
- [12] Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Бибфизмат, 1990.
- [13] Винберг Э. Б. Компактные группы Ли. М.: Изд-во МГУ, 1967.
- [14] Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1996.