Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. Т. Султанаев, О. В. Мякинова, Об индексах дефекта сингулярного дифференциального оператора четвертого порядка в пространстве вектор-функций, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 6, 950–953

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm8530>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 10:42:27

Об индексах дефекта сингулярного дифференциального оператора четвертого порядка в пространстве вектор-функций

Я. Т. Султанаев, О. В. Мякинова

Исследованию индексов дефекта обыкновенных дифференциальных операторов посвящено значительное число работ (см. [1], [2] и библиографию к ним). Однако в этих работах, как правило, исследуются скалярные дифференциальные операторы.

В недавних работах Исмагилова и Костюченко [3], [4], посвященных исследованию спектральных свойств неограниченных дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций, отмечено практическое отсутствие результатов об индексах дефекта таких операторов. В настоящей работе мы исследуем индексы дефекта сингулярного дифференциального оператора четвертого порядка в пространстве вектор-функций.

Рассмотрим в пространстве

$$H = L^2(0, +\infty) \oplus L^2(0, +\infty)$$

минимальный дифференциальный оператор L_0 , порожденный выражением

$$l(y) = -y^{(4)} + Q(x)y, \quad (1)$$

$y = (y_1(x), y_2(x))^T$, $0 < x < +\infty$. Здесь $Q(x) = \|q_{i,j}(x)\|_{i,j=1}^2$ – вещественная симметрическая матрица, собственные значения которой

$$\mu_{1,2} = \frac{q_{11} + q_{22} \pm \sqrt{(q_{11} - q_{22})^2 + 4q_{12}^2}}{2},$$

$|\mu_i(x)| \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Функция $\phi'(x)$ – это скорость вращения собственных векторов матрицы $Q(x)$, где $\phi(x)$ определяется по формуле

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{q_{22} - q_{11}}{2q_{12}}.$$

Следуя работе [3], назовем случай, рассматриваемый в теореме 1 *случаем умеренного вращения собственных векторов матрицы $Q(x)$* , а случай теоремы 2 – *случаем быстрого вращения*. Нами доказаны

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены следующие условия: существует x_0 такое, что для всех $x > x_0$

- 1) $|\phi'(x)| < \operatorname{const}$;
- 2) $0 < A \leq |\mu_i/\mu_j| \leq B$, $i, j = 1, 2$;
- 3) имеют место оценки

$$\int_{x_0}^{\infty} |\mu_i|^{-1/4} dx < \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\mu_i'^2}{\mu_i^{9/4}} + \frac{\mu_i''}{\mu_i^{5/4}} \right| dx < \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\phi''}{\mu_i^{1/4}} \right| dx < \infty, \quad i = 1, 2;$$

- 4) $|\mu_i'(x)| \leq c|\mu_i(x)|^\alpha$, $c = \operatorname{const}$, $i = 1, 2$, $0 < \alpha < 5/4$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-97026).

Тогда система $l(y) = \lambda y$ имеет восемь линейно независимых решений $y_j(x, \lambda)$ таких, что при $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \psi_1(x, \lambda) e^{\pm \int_0^x (\lambda - \mu_1)^{1/4} dt} (1 + o(1)), & y_{3,4} &= \psi_1(x, \lambda) e^{\pm i \int_0^x (\lambda - \mu_1)^{1/4} dt} (1 + o(1)), \\ y_{5,6} &= \psi_2(x, \lambda) e^{\pm \int_0^x (\lambda - \mu_2)^{1/4} dt} (1 + o(1)), & y_{7,8} &= \psi_2(x, \lambda) e^{\pm i \int_0^x (\lambda - \mu_2)^{1/4} dt} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt[8]{(\lambda - \mu_1)^3}} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \frac{1}{\sqrt[8]{(\lambda - \mu_2)^3}} \begin{pmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены следующие условия: $\mu_i(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ и существует x_0 такое, что для всех $x > x_0$

- 1) $|\mu'_i(x)| \leq C_1 |\mu_i(x)|^\alpha$, $C_1 = \text{const}$, $i = 1, 2$, $0 < \alpha < 5/4$;
- 2) $0 < A \leq |\mu_i/\mu_j| \leq B$, $i, j = 1, 2$;
- 3) имеют место оценки

$$\int_{x_0}^{\infty} |\mu_i|^{-1/2} dx < \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\mu''_i}{\mu_i^2} \right| dx < \infty, \quad \int_{x_0}^{\infty} \left| \frac{\phi''}{\mu_i^{7/4}} \right| dx < \infty, \quad i = 1, 2;$$

- 4) $|\mu_i/\phi'(x)| \leq C_2$, $C_2 = \text{const}$, $i = 1, 2$.

Тогда система $l(y) = \lambda y$ имеет восемь линейно независимых решений $y_j(x, \lambda)$ таких, что при $x \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= \tilde{\psi}_1(x, \lambda) e^{\int_0^x m^{1/4} dt} (1 + o(1)), & y_{3,4} &= \tilde{\psi}_1(x, \lambda) e^{i \int_0^x m^{1/4} dt} (1 + o(1)), \\ y_{5,6} &= \tilde{\psi}_2(x, \lambda) e^{-\int_0^x m^{1/4} dt} (1 + o(1)), & y_{7,8} &= \tilde{\psi}_2(x, \lambda) e^{-i \int_0^x m^{1/4} dt} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{1}{\sqrt[8]{m^3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}, \quad \tilde{\psi}_2 = \frac{1}{\sqrt[8]{m^3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}, \quad m = \frac{\mu_1 + \mu_2 - 2\lambda}{2}.$$

Наметим схему доказательства. Если ввести обозначение $z = (y, y', y'', y''')^T$, то перейдем к системе дифференциальных уравнений первого порядка $z' = Az$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -Q + \lambda I & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где I – единичная матрица второго порядка. Далее произведем замену

$$z = \underbrace{\text{diag}\{U_1, U_1, U_1, U_1\}}_U w,$$

где $U_1(x)$ – ортогональная матрица

$$U_1 = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Получим систему уравнений

$$w' = U^{-1} A U w + \underbrace{U^{-1} U'}_P w. \quad (2)$$

В первом случае матрицу $U^{-1}AU$ приведем к диагональному виду. Известно, что существует ортогональная матрица $C(x, \lambda)$ такая, что

$$C^{-1}(U^{-1}AU)C = M,$$

где M – диагональная матрица с элементами

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_1(x, \lambda) &= \sqrt[4]{\lambda - \mu_1}, & \tilde{\mu}_2(x, \lambda) &= -\sqrt[4]{\lambda - \mu_1}, & \tilde{\mu}_3(x, \lambda) &= i\sqrt[4]{\lambda - \mu_1}, \\ \tilde{\mu}_4(x, \lambda) &= -i\sqrt[4]{\lambda - \mu_1}, & \tilde{\mu}_5(x, \lambda) &= \sqrt[4]{\lambda - \mu_2}, & \tilde{\mu}_6(x, \lambda) &= -\sqrt[4]{\lambda - \mu_2}, \\ \tilde{\mu}_7(x, \lambda) &= i\sqrt[4]{\lambda - \mu_2}, & \tilde{\mu}_8(x, \lambda) &= -i\sqrt[4]{\lambda - \mu_2}.\end{aligned}$$

Матрицу C можно выбрать так, чтобы выполнялось условие

$$(C^{-1}C')_{ii} = 0, \quad i = 1, \dots, 8.$$

Тогда половина элементов матрицы C равны нулю, а остальные элементы имеют вид

$$a(\lambda - \mu_k)^\gamma, \quad k = 1, 2, \quad \gamma = \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{3}{8}, \quad a = \pm 1, \pm i.$$

Положим

$$w = C(I + G)u, \quad (3)$$

где матрица G с элементами g_{ij} удовлетворяет соотношению

$$GM - MG = C^{-1}C' + C^{-1}PC.$$

После этой замены мы придем к системе уравнений

$$u' = (M + \Theta(x, \lambda))u, \quad (4)$$

где

$$\Theta(x, \lambda) = (I + G)^{-1}(C^{-1}C'G - G' + C^{-1}PCG).$$

Во втором случае в системе (2) приводим к диагональному виду матрицу P заменой $w = Tu$, $T^{-1}PT = \Lambda$,

$$\Lambda = \text{diag}\{\phi'(x)i, -\phi'(x)i, \phi'(x)i, -\phi'(x)i, \phi'(x)i, -\phi'(x)i, \phi'(x)i, -\phi'(x)i\}.$$

Матрица T постоянная, поэтому $T' = 0$. Получим систему

$$u' = (\underbrace{T^{-1}U^{-1}AUT}_C - \Lambda)u,$$

где

$$\begin{aligned}C &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ M_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C_1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{C_2}, \\ M_1 &= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} \\ \frac{\mu_1 - \mu_2}{2} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Приведем матрицу C_1 к диагональному виду заменой $u = Sv$, $S^{-1}C_1S = \Lambda_1$,

$$\Lambda_1 = \text{diag}\{\sqrt[4]{m}, \sqrt[4]{m}, i\sqrt[4]{m}, i\sqrt[4]{m}, -\sqrt[4]{m}, -\sqrt[4]{m}, -i\sqrt[4]{m}, -i\sqrt[4]{m}\}.$$

Как и в первом случае, выберем матрицу S так, чтобы выполнялось условие

$$(S^{-1}S')_{ii} = 0, \quad i = 1, \dots, 8.$$

Тогда половина ее элементов – нули, а остальные элементы имеют вид

$$m^k, \quad k = \pm \frac{3}{8}, \pm \frac{1}{8}.$$

Обозначим $\Lambda_1 - \Lambda = \tilde{\Lambda}$. Положим $v = (I + G)t$, где матрица G с элементами g_{ij} удовлетворяет соотношению

$$G\tilde{\Lambda} - \tilde{\Lambda}G = -S^{-1}S' + S^{-1}C_2S.$$

После этой замены мы придем к системе уравнений

$$t' = (M + \Theta_1(x, \lambda))t, \quad (5)$$

где

$$\Theta_1(x, \lambda) = (I + G)^{-1}(-S^{-1}S'G - G' + S^{-1}C_2SG).$$

Далее показывается, что системы (4) и (5) являются L -диагональными (см. [1; с. 304]). Асимптотика решений этих систем известна (см. [5; с. 224]). Возвращаясь с помощью обратных замен к вектору y , получим требуемые асимптотические формулы.

Из асимптотических формул для решений системы $ly = \lambda y$ можно сделать вывод об индексах дефекта оператора L_0 .

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда

- 1) если $\mu_i \rightarrow +\infty$, $i = 1, 2$, то индексы дефекта оператора L_0 равны (4, 4);
- 2) если $\mu_i \rightarrow -\infty$, $i = 1, 2$, то индексы дефекта оператора L_0 равны (6, 6);
- 3) если $\mu_i \rightarrow +\infty$, $\mu_j \rightarrow -\infty$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, то индексы дефекта оператора L_0 равны (5, 5).

Утверждения теоремы следуют из того, что в первом случае половина показателей экспоненты имеет положительную вещественную часть, а другая половина – отрицательную вещественную часть. Во втором случае при больших x два показателя экспоненты будут чисто мнимыми.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда индексы дефекта оператора L_0 равны (4, 4).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Г. Костюченко, И. С. Саргсян, *Распределение собственных значений. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1979.
 [2] M. S. P. Eastham, *The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems. Applications of the Levinson Theorem*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), 4, Clarendon Press, Oxford, 1989.
 [3] Р. С. Исмагилов, А. Г. Костюченко, *Функц. анализ и его прил.*, 42:2 (2008), 11–22.
 [4] Р. С. Исмагилов, А. Г. Костюченко, *Функц. анализ и его прил.*, 41:1 (2007), 39–51.
 [5] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.

Я. Т. Султанаев

Башкирский государственный университет, г. Уфа
 E-mail: SultanaevYT@bsu.bashedu.ru

Поступило

02.04.2009

О. В. Мякинова

Башкирский государственный университет, г. Уфа
 E-mail: llmmst@rambler.ru